# EN KOMMENTAR TILL DEN MATEMATISKA PROBLEMLÖSNINGENS DIDAKTIK

*Christer Bergsten*
Linköpings universitet

Problemlösningens placering och status i skolmatematiken har varierat över tiden. I de svenska kursplanerna levde den länge ett ganska undanskymt liv för att få en central ställning som eget huvudmoment i matematikkursplanen i Lgr80 (Wyndhamn, 1997, s. 43), där man dessutom kan läsa att problemlösning ska ingå i alla andra huvudmoment (Skolöverstyrelsen, 1980, s. 99f). Även i den senaste läroplanen från 1994 har den en kärnfunktion men ses inte längre som ett ”moment” utan ges ett mer övergripande syfte och funktion. Detta illustrerar den förskjutning i synen på problemlösning som skett i takt med den matematikdidaktiska utveckling som ägt rum på den internationella scenen. Under 1980-talet var mycket fokuserat på problemlösningen i sig som kognitiv och metakognitiv aktivitet med betoning på kunskaper, processer och uppfattningar (Schoenfeld, 1992; Silver, 1987). Med ökat inflytande från det sociokulturella perspektivet lyftes andra aspekter och syften fram, där situationella och diskursiva element analyserades (för nordisk forskning se Ahlberg, 1992; Wyndhamn, 1993; Wyndhamn, Riesbeck & Schoultz, 2000; Borgersen, 1994; Björkqvist, 2001). De senaste årens ökade fokusering på meningsskapande samspel mellan olika semiotiska uttrycksformer i synen på lärande och kunnande i matematik (se t.ex. Radford, 2003; Hoffmann, 2006) ger problemlösningen nya dimensioner som ännu inte avspeglats i en färdigutvecklad praktik. Detta gäller i viss mån även kompetensbegreppets framväxt inom matematikdidaktiken (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; Niss , 2004).

Mot bakgrund av denna korta historik över några av problemlösningens olika dimensioner, så som de lyfts fram i den omfångsrika litteratur som växt fram efter den nu klassiska boken om matematisk problemlösning *How to solve it* (Polya, 1957), vill jag i denna uppsats göra ett försök att skriva en kort kommentar eller introduktion till vad som kan kallas *den matematiska problemlösningens didaktik*. Syftet med en sådan ansats kan inte vara att försöka ge en heltäckande bild av existerande kunskap om problemlösning inom matematikdidaktisk forskning och utvecklingsarbete, utan mer anspråkslöst ett försök att identifiera några komponenter som kan ligga till grund för en didaktiskt grundad medveten hantering av problemlösning i faktisk undervisningspraktik. Inledningsvis diskuteras kort olika teoretiska perspektiv för att betrakta problemlösning. Därefter beskrivs några sätt att klassificera matematiska problem och sedan kopplingen mellan problemlösning och kunskapsbildning. Efter en kort diskussion om undervisning och lärande ges avslutningsvis en övergripande didaktisk modell för en matematisk praktik där problemlösning ingår som en central komponent.

## Teoretiska perspektiv

Dagens debatt domineras av tre olika huvudperspektiv när det gäller hur lärande och undervisning i matematik beskrivs, analyseras och utforskas, dvs. ett kognitivt, ett sociokulturellt och ett epistemologiskt perspektiv. Dessa perspektiv kan också anläggas specifikt på matematisk problemlösning och inbjuder även till olika didaktiska handlingar. Det handlar då inte om vilket av dessa (och andra) perspektiv som lämpar sig bäst för att studera problemlösning utan mer om vilka olika frågor respektive perspektiv kan besvara och ge bidrag till problemlösningens didaktik. Det *kognitiva* perspektivet fokuserar på individens tankeprocesser och därmed på samspel mellan minnet, kunskapsstrukturer, strategier och kontroll, samt dessas samspel med uppfattningar och attityder (Schoenfeld, 1992). Även den roll tankeredskap som t.ex. metaforer spelar studeras (Lakoff & Nuñez, 2000). Situationer, kontexter och socialt samspel har av forskare inom en *sociokulturell* teoriram visats starkt påverka utfallet av problemlösning i undervisningssammanhang (Wyndhamn, 1993). I det *episte-mologiska* perspektivet är själva kunskapsstrukturen och kunskapsbildningen inom det specifika ämnet (dvs. matematik) ett huvudfokus, vilket innebär att problemlösningens syfte och koppling till matematiska begreppsstrukturer studeras (Brousseau, 1997; Chevallard, 2002). På senare år har ett *semiotiskt perspektiv* vuxit sig starkt (t.ex. Radford, 2003; Hoffmann, 2006), vilket också kan betraktas som epistemologiskt grundat men har även såväl kognitiva som sociokulturella drag.

## Klassificering av problem

Att försöka definiera en väl avgränsad och generellt accepterad innebörd i termen problemlösning är en lika omöjlig uppgift som att försöka definiera vad matematik är: ”The question, what is problem solving, cannot have an unani-mous answer; it depends too much on personal interests and philosophy.” (Mamona-Downs & Downs, 2005, s. 385). Vad som skiljer ett problem i matematiken från en övning eller rutinuppgift brukar anges som att den/de som ger sig an att lösa uppgiften inte från början har/ser en redan färdig metod att använda (Christiansen & Walther, 1986; Björkqvist, 2001). Denna mycket generella beskrivning av vad som är ett matematiskt problem brukar även kopplas till en affektiv sida, dvs. en vilja att lösa problemet. Det ofta använda uttrycket *att hitta en lösning* antyder att någonstans bakom problemformuleringen finns det en lösningsmetod klar som det gäller att upptäcka, att hitta, vilket innebär att den egentligen redan fanns där. Detta är enligt min mening en missvisande metafor som döljer problemlösningens kreativa, skapande dimension. För den person/grupp för vilken uppgiften är ett problem existerar det per definition inte en metod som löser uppgiften, att lösa är att skapa en metod.

Samtidigt kan uppgiften vara ett rutinproblem för en annan person/grupp, som alltså redan hade en lösning. I den meningen fanns redan en metod för att lösa uppgiften och för problemlösaren kan det då upplevas som att det gäller att upptäcka den, att hitta den, och att det är det som hela aktiviteten går ut på, särskilt om det sker i ett undervisningssammanhang som i ett klassrum.

Förutom dessa glidande innebörder i termerna problem och problemlösning kan problemlösningsaspekter även smyga sig in i andra matematiska aktiviteter som t.ex. läsning av matematiska texter. Ett tydligt exempel är när man läser och försöker förstå ett bevis: ”when a student reads a written proof, can we really say there are no aspects of problem solving incurred in ’understanding’ the proof?” (Mamona-Downs & Downs, 2005, s. 385). Problemlösning i någon form tycks finnas inneboende mer eller mindre i varje matematisk aktivitet. Kan man gå så långt att man vågar påstå att matematik *är* problemlösning? Så ställer sig också Björkqvist (2001) frågan ”är det möjligt att problemlösning är så central för undervisningen i matematik att man kan beskriva den som matematikens kärna?” (s. 116). Och är (matematisk) problemlösning inget annat än *kritiskt tänkande*, i generell mening (applicerat på ämnesområdet matematik):

> Critical thinking is the intellectually disciplined process of actively and skillfully conceptualizing, applying, synthesizing, and/or evaluating information gathered from, or generated by, observation, experience, reflection, reasoning, or communication, as a guide to belief and action. In its exemplary form, it is based on universal intellectual values that transcend subject matter divisions: clarity, accuracy, precision, consistency, relevance, sound evidence, good reasons, depth, breadth, and fairness. /.../ Critical thinking - in being responsive to variable subject matter, issues, and purposes - is incorporated in a family of interwoven modes of thinking, among them: scientific thinking, mathematical thinking, historical thinking, anthropological thinking, economic thinking, moral thinking, and philosophical thinking. (Scriven & Paul, 2004)

Ett sådant samlingsnamn på ett brett spektrum intellektuella funktioner ger dock inte mycket stöd för till exempel konkreta didaktiska beslut och handlingar, utan tjänar mer som en ibland nödvändig påminnelse om att när vi tänker och arbetar matematiskt är vi samma personer som när vi är aktiva inom andra områden. Möjligen kan begreppet problemlösning vara just en sådan ämnesövergripande intellektuell kapacitet, som inom matematikområdet får sina specifika attribut som också kan utvecklas genom lämplig skolning.

I detta sammanhang kan en tolkning av matematisk problemlösning som matematisk modellering nämnas. Detta diskuteras av Björkqvist (2001), som menar att

> Modellering som en fullständig process är en form av normal mänsklig kognitiv aktivitet när man vill utöka sin kunskap och förstå sig bättre på sin omvärld. /…/

> De olika faserna i modelleringsprocessen har ungefärliga motsvarigheter i form av identifierbara steg också vid en problemlösningsprocess där problemet härrör från matematikens egen värld. (s. 120)

För att ringa in karaktären av just matematisk problemlösning kan denna beskrivas utifrån olika nyckelaspekter som är särskilt intressanta ur didaktisk synvinkel. Björkqvist (2001, s. 118) skiljer mellan ”Textuppgift” och ”Icke textuppgift” och relaterar dessa kategorier till om det handlar om ett ”Problem” eller ”Icke problem”, dvs. övning eller rutinuppgift, och menar att de möjliga fyra kombinationerna dessa emellan alla har sin givna plats i matematikundervisningen. Han diskuterar också hur användandet av *öppna uppgifter* kan få eleven att uppleva av läraren förelagda uppgifter mer som sina egna genom de val han/hon själv måste göra i lösningsprocessen genom att det inte bara finns en ’rätt’ lösning.

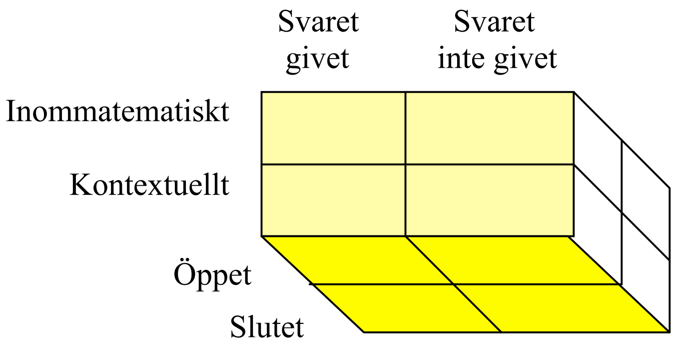
En liknande utvidgad kategorisering görs i Skovsmose (2002) där följande matris ger en översikt över de olika *lärandemiljöer* som olika typer av uppgifter bäddar för.

| | Övnings-paradigmet | Undersöknings-landskap |
|---|---|---|
| Kopplingar till ren matematik | | |
| Kopplingar till en semi-verklighet | | |
| Kopplingar till verkligheten | | |

Figur 1: Lärandemiljöer (efter Skovsmose, 2000, s. 8)

Med undersökningslandskap (*landscapes of investigation*; Skovsmose, 2000, s. 3) menar Skovsmose en miljö som stöder undersökande arbete, i motsats till övningar där kända matematiska samband och metoder tränas. Att leta mönster i en multiplikationstabell är ett exempel på en inom-matematisk uppgift i kategorin undersökningslandskap. Många textuppgifter i skolmatematiken är övningar med kopplingar till en semi-verklighet, dvs. man behöver inte befinna sig i den situationella verklighet som uppgiften handlar om för att kunna lösa den. Skovsmose ser övningsparadigmet som en definierande egenskap av traditionell skolmatematik men stöder ”a mathematics education moving between the different milieus as presented in the matrix” (s. 15).

Det handlar alltså om uppgiftens *problemtyp*, samt vilka typer av *svar* och *processer* som problemet kräver. En sammanställning av dessa sätt att kategorisera problem ges i följande tredimensionella modell:




Figur 2: Dimensioner av problemtyp.

Ett kontextuellt problem kräver en matematiserings- eller modelleringsprocess för att kunna hanteras med matematiska metoder. En lösning av problemet kan ha konsekvenser för praktisk handling, till exempel ett val mellan två olika återbetalningsformer för ett lån. I en undervisningssituation däremot är kontextens syfte oftast att ge en mening åt den matematik som studeras och därmed öka motivationen och intresset för studierna. Ett inommatematiskt problem både startar och slutar innanför matematiken som egen vetenskaplig disciplin, vilket dock inte utesluter dess motivationsskapande potential eller i förlängningen utesluter koppling till en kontext eller praktisk handling. I själva lösningsprocessen av ett inommatematiskt problem kan dock en kontextuell koppling skapas av problemlösaren, till exempel via metaforiskt tänkande, för att initiera idéer till lösningsmetoder.

Huruvida ett svar på uppgiften/problemet är givet från början eller inte kan vara avgörande för hur problemet angrips. Låt mig som exempel betrakta en hypotetisk skolelev som är bekant med likformighet men aldrig tidigare konfronterats med Pythagoras sats. Då eleven får uppgiften att beräkna längden av diagonalen i en rektangel med givna sidor kan han/hon ha svårt att få en idé till en lösning och kanske inte alls tänker på möjligheten att använda likformighet. Om samma elev istället ges uppgiften att visa att diagonalen i kvadrat är summan av kvadraterna på de två sidorna är det en specifik given geometrisk relation som efterfrågas och det ligger närmre till hands att använda andra kända relationer som att höjden i en rätvinklig triangel delar denna i två trianglar som båda är likformiga med ursprungstriangeln. Därmed kan eleven lättare komma en lösningsmetod på spåren.

Ur didaktisk synpunkt har ett öppet problem större lärandepotential då den inbjuder till en variation som bygger på och utvecklar begreppsligt tänkande. En elev som får (det öppna) problemet att konstruera en triangel med arean 36 $cm^2$ leds till att betrakta olika typer av trianglar, hur relationen mellan höjd och bas varieras då deras produkt hålls konstant, samt hur triangelns omkrets kan variera trots bibehållen area. Att istället konstruera en kvadrat med denna area (slutet problem) begränsar tanken till det enda faktiska objekt som har denna area då ingen variation är möjlig. Ett öppet problem stimulerar ofta i högre grad ett undersökande arbetssätt i en mer levande och aktiv lärandemiljö. Vad som brukar kallas *rika uppgifter* (Björkqvist, 1998) eller *rika problem* (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005) kan ses som en typ av öppna problem då de har en potential att leda vidare utöver den givna problemformuleringen. Björkqvist betonar dock att rika uppgifter inte kan svara upp mot alla syften att arbeta med problemlösning i skolmatematiken.

En fjärde dimension som inte låter sig enkelt beskrivas men som avsevärt påverkar vad som händer under en problemlösningsaktivitet är problemets *svårighetsgrad*. Detta är naturligtvis precis som problem ett individrelaterat begrepp men kan ändå beskrivas med hjälp av analytiska termer som komplexitet och djup. Så är till exempel komplexiteten i Apollonius klassiska tangeringsproblem, där det gäller att konstruera en cirkel som tangerar tre givna cirklar, det som gör det svårt, medan integralkalkylens huvudsats har stort djup utan att vara särskilt komplex. Ett både djupt och komplext problem kan bli genuint svårt.

### *Typ av svar*

Den typ av svar som förväntas på ett matematiskt problem kan också på ytan se mycket olika ut och påverka hur man angriper problemet. Jag kan här identifiera tre huvudkategorier, produktion, konstruktion och beskrivning. Den vanligaste svarstypen, särskilt i skolmatematik, är en *produktion*, där problemlösaren oftast ska producera en efterfrågad storhet, som en kvantitet (med ett talvärde, t.ex. 45 kr eller $\sqrt{3}$ cm) eller ett algebraiskt uttryck (t.ex. $y' = x^2e^{-x}$ som svar på uppgiften att bestämma en lösning till en differentialekvation). Att ge ett bevis för ett matematiskt påstående är också en produktion, där svaret är själva beviset, medan *konstruktion* innebär att ta fram och beskriva en matematisk procedur. Det kan handla om en geometrisk konstruktion som vid det ovan nämnda Apollonius tangeringsproblem eller en beräkningsalgoritm för lösningen av en andragradsekvation. En *beskrivning* behövs ofta i samband med öppna problemtyper, där olika svarsmöjligheter med tillhörande villkor anges. Ett exempel kan vara svar som ges på uppgiften att rita en triangel med arean 36 $cm^2$ (se ovan).

### *Typ av process*

Då det i problemlösningens natur ligger att en bestämd lösningsmetod inte på förhand är given, innebär det att problemlösaren inleder och genomgår en process under arbetet med problemet. Beroende på problemets karaktär, bestämd bland annat genom de olika kategorier som beskrivits ovan, kan man skilja mellan en process som är pre-analytisk respektive post-analytisk. Ett *pre-analytiskt* angreppssätt innebär att man utgår från problemformulering och givna förutsättningar, söker identifiera en process som kan leda fram till en lösning, eller åtminsone en bit på vägen, och sedan arbeta sig fram mot en lösning. Detta är ungefär vad Polya (1957) kallar att göra upp en plan. En medveten målsökningsprocess kan också försöka inkludera alla möjligheter som finns inom den givna miljön för att öka chansen att hitta en väg som leder ända fram (jfr. Newell & Simon, 1972). Det kan då finnas ett visst mått av osäkerhet då man ofta inte vet riktigt var man kommer att befinna sig i lösningsprocessen efter en tid även om pre-analysen lett till en beskrivning av en följd av delsteg som ska leda fram till en lösning.

Vid ett *post-analytiskt* angreppssätt utgår man istället från den (potentiella) kunskap man skulle haft om problemet redan varit löst. Man söker på detta sätt följa lösningen ”baklänges” tills man hittar en situation man kan klara av att skapa utifrån de förutsättningar som var givna. Modellen för denna problemlösningsprocess gavs redan av Pappus då han i sin ’Synagoge’ beskrev den metod med *analys-syntes* han använde för att lösa geometriska konstruktionsuppgifter, en metod som han tillskrev Euklides, Apollonius och Aristaeus:

> … in analysis we assume that which is sought as if it were already done (γεγονοζ), and we inquire what it is from which this results, and again what is the antecedent cause of the latter, and so on, until by so retracing our steps we come upon something already known or belonging to the class of first principles, and such a method we call analysis as being solution backwards (αναπαλιν λυσιν).
>
> But in *synthesis*, reversing the process, we take as already done that which we last arrived at in the analysis and, by arranging in their natural order as consequences what before were antecedents, and successively connecting them one with another, we arrive finally at the construction of what was sought; and this we call synthesis. (citerat i Heath, 1981, s. 400)

Problemet med pre-analysen är att den ofta är svår att genomföra. Det är då man får ta till olika problemlösningsstrategier för att komma vidare (se t.ex. Björkqvist, 2001). Då en post-analys är möjlig att genomföra har man en större grad av kontroll över processen.

All matematisk verksamhet har både en praktisk sida (know-how: kunskap om problemtyper och tillhörande lösningsmetoder) och en teoretisk (know-why: kunskap om teoretiska verktyg och matematisk teori), där den senare berättigar de metoder som används i den förra. Helheten och samspelet mellan dessa komponenter i en matematisk praktik skapar en *matematisk organisation* (Chevallard, 2002). En problemlösningsprocess har en uttalat praktisk karaktär – man måste i varje steg göra något för att komma vidare – men en del av de lösningsidéer man får kan vara inspirerade av teoretisk kunskap. Detta är exempel på den dialektik mellan *praxis* och *logos* som är så karakteristisk för matematik.

### Kunskapsbildning

Arbete med problemlösning kan bidra till kunskapsbildning både inom disciplinen matematik, dvs. *utveckling av matematik*, och inom individen som *lärande i matematik*, *metakognitiv utveckling* och *utveckling av uppfattningar och attityder*. Att matematikens nya resultat erövras genom problemlösning kan låta som en självklarhet och är det säkert också men det tål att påpekas i ett undervisningssammanhang. Denna nyckelaspekt av problemlösningens funktion tappas ofta bort vid diskussioner om problemlösningens plats och didaktiska hantering i klassrummet.

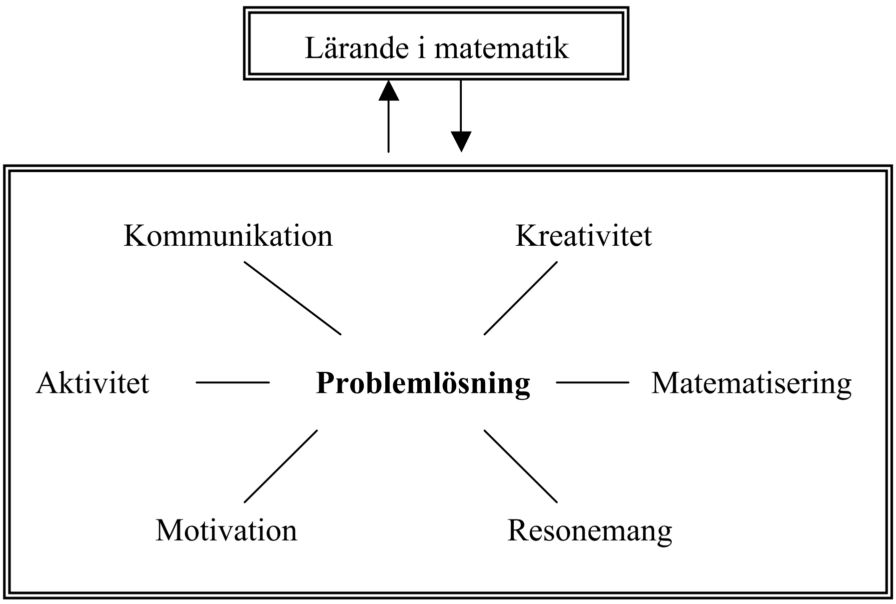
Att aktivt medverka i en verksamhet innebär att man samtidigt lär något om denna verksamhet, eller uttryckt på ett enklare sätt, man lär av erfarenheten. Man kan därför reciprokt argumentera att de förmågor som är engagerade vid problemlösning också utvecklas genom detta arbete med problemlösning. En ofta refererad beskrivning av sådana förmågor ges i Schoenfeld (1992) och innefattar de ovan listade individrelaterade kunskapsbildningsområdena. Utveckling av strategier kan här ses som en del av lärande i matematik. Sedd som didaktisk praktik är dock relationen mellan att undervisa i matematik *via* problemlösning (se mer om detta nedan) och lärandet av matematiska begrepp och metoder dåligt utforskad (Mamona-Downs & Downs, 2005).

### Undervisning och problemlösning

Problemlösningens roll i den grundläggande matematikutbildningen har betonats olika under olika perioder. En distinktion som vunnit genomslagskraft är den mellan att undervisa *för*, *om* eller *via* problemlösning (Schroeder & Lester, 1989). Genom det starka inflytandet av ett konstruktivistiskt och sociokulturellt synsätt på dagens matematikutbildning har matematikundervisning via problemlösning fått en stark ställning (se t.ex. Cai, 2003). I svenska studier har dessa tre kategorier kopplats till matematikkursplanernas utveckling i de olika läroplanerna för grundskolan Lgr 69, Lgr 80 och Lpo 94, och olika teorier för lärande som behaviorism, kognitivism respektive sociokulturell teori (Wyndhamn, 1993; Wyndhamn et al., 2000). I dagens undervisningspraktik lever dessa aspekter av problemlösning sida vid sida, även om lärares uttalade didaktiska medvetenhet om problemlösningens roll ibland visar sig vara mer en retorik än en praktik (Wyndhamn et al., 2000). En orsak till detta kan vara att den didaktiska transpositionen skapat en skolmatematik där problemlösningen tappat sin ursprungliga funktion, nämligen den att lösa problem. I skolan löser eleverna problemen av andra skäl, för att träna problemlösning, för att via problemlösningen lära sig matematik, att få matematiken att kännas meningsfull eller användbar, eller kanske bara för att läraren vill skapa variation på matematiklektionen. Att problemlösningen behöver sin egen didaktik är då framtvingat av den institutionella skolformen. En konsekvens av detta är att bygga upp en matematikundervisning där problemlösningens ursprungliga funktion återskapas som en matematisk praktik inom den institution som klassen utgör (Chevallard, 2002). Ett sätt att analysera och konkret utveckla sådant arbete utgår från begreppet *didaktisk situation* och de fyra arbetsfaserna *handling*, *formulering*, *validering* och *institutionalisering* (Brousseau, 1997).

Detta sätt att se på problemlösning i undervisningen anknyter till matematisk modellering, så som det beskrivs i Björkqvist (2001, s. 119f). Man kan också uttrycka det så att matematiskt arbete kan modelleras i skolan av problemlösning, vilket skulle ge problemlösning en central roll i skolmatematiken. Detta förutsätter dock en systematisk didaktisk hantering av den matematiska praktik som utvecklas i klassen.

Förutom dessa epistemologiska aspekter av problemlösning måste i ett undervisningssammanhang andra dimensioner beaktas som för individen kan spela en avgörande roll för lärandet. Arbete med problemlösning kan skapa förutsättningar för matematiska resonemang och matematisering, kreativitet, aktivitet, kommunikation och motivation. Detta komplex ger förutsättningar för lärande i matematik, vilket sedan återkopplar till fördjupat utforskande inom de olika delarna i detta komplex. Här ges inte utrymme att utifrån den rika litteratur som finns om dessa aspekter gå in i en diskussion kring vilka funktioner och mekanismer dessa delar har och ger upphov till i samband med olika arbetsformer i klassrummet, utan jag nöjer mig med att i figur 3 ge en bild av den kraft som finns i en tillämpad didaktik med problemlösning som hjärta.

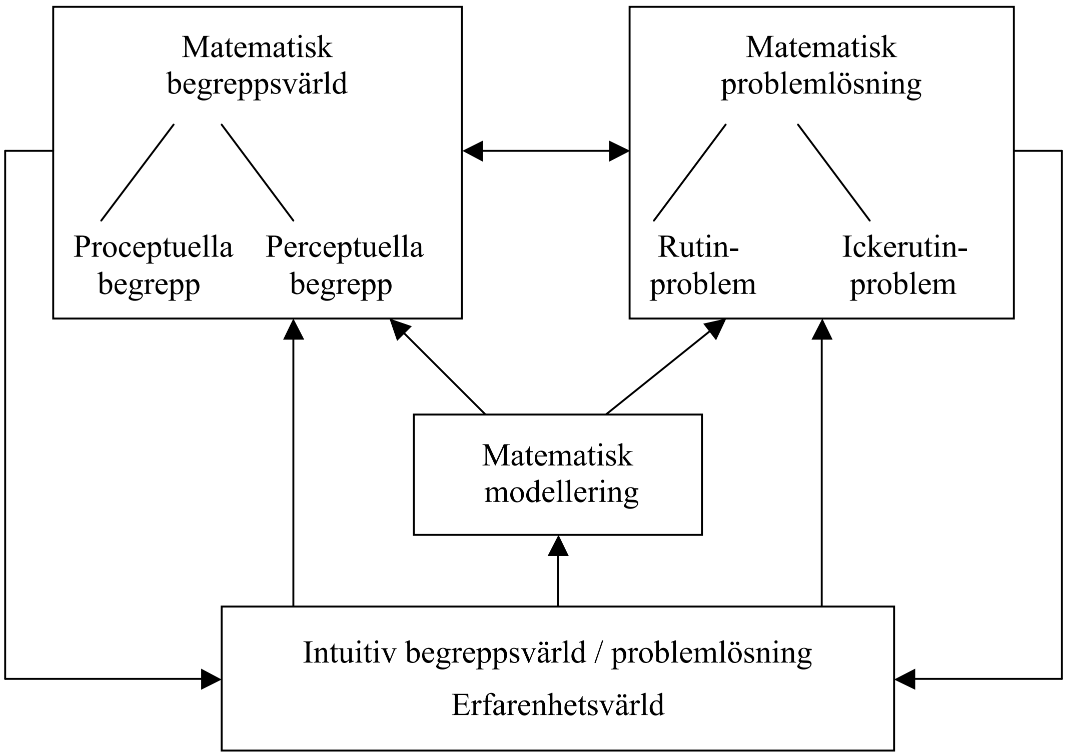



Figur 3: Matematisk problemlösning och lärande.

En fördjupad diskussion om problemlösningens didaktiska identitet och angelägna forskningsområden ges i Mamona-Downs och Downs (2005). Bredvid problemlösning har även andra didaktiska komponenter ett avgörande inflytande på lärande i matematik, vilket diskuteras i nästa avsnitt.

### En didaktisk modell

I figur 4 presenteras ett försök att placera in problemlösning (i vid mening) i en allmän epistemologisk modell för en matematisk praktik där lärande kan vara ett objekt (mål) för verksamheten.




Figur 4: Epistemologisk modell för matematisk praktik.

Den erfarenhet och begrepps- och tankevärld man som individ äger lägger i varje situation man ställs inför en grund för hur man uppfattar situationen och agerar för att hantera den. Man kan kalla detta en intuitiv (eller idiosynkratisk) handlingsgrund. Att befinna sig i en undervisningssituation i matematik utgör inget undantag härvidlag men situationen och de uppgifter man ställs inför ger här ett specifikt fokus på matematikens två huvudinnehåll, dvs. dess begrepp och dess metoder för problemlösning. Med verkliga eller semi-verkliga problem för handen når man dit först efter en modelleringsprocess. Dessa ”delar” av den matematiska praktiken existerar samtidigt och återverkar på varandra och skapar en loop för matematiklärandets utveckling, hela tiden med sin grund i den undre boxen i schemat i figur 4. Vad som är möjligt vid den matematiska problemlösningen styrs av det komplexa samspelet mellan sådana typer av didaktiska faktorer och kategorier som diskuterats ovan men även av inflytandet från kraften i de andra boxarna i figur 4. Enligt Tall (2004) byggs matematiken upp av två skilda världar, den ena med sin genes i perceptionen (modellerad genom geometrin: perceptuella begrepp) och den andra handlingsgrundad (modellerad genom aritmetik och algebra: proceptuella begrepp). Med den teoretiska överbyggnaden för dessa som grund (jfr. begreppet matematisk organisation ovan) kan en tredje matematisk värld skapas genom teoretiskt tänkande, dvs. den rent axiomatiska matematiken.

Modellen i figur 4 försöker beskriva huvuddelarna och dynamiken i en matematisk praktik, som också kan ligga till grund för en didaktisk praktik, som genererar lärande i matematik men också matematiskt vetande (jfr. avsnittet 'kunskapsbildning' ovan). Det är matematikdidaktikens uppgift att skapa förutsättningar för att utveckla didaktiska organisationer som placerar in problemlösningen på ett konstruktivt sätt i detta komplex.

## Referenser


Ahlberg, A. (1992). Att möta matematiska problem. En belysning av barns lärande. *Göteborg Studies in Educational Sciences 87*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Björkqvist, O. (1998). Matematiskt rika uppgifter för högstadiet och gymnasiet. *Studie- och undervisningsmaterial från Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi, nr 22.* Institutionen för lärarutbildning, Pedagogiska fakulteten, Åbo Akademi, Vasa.

Björkqvist, O. (2001). Matematisk problemlösning. I B. Grevholm (red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.

Borgersen, H.E. (1994). Open ended problem solving in geometry. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 2(2), 6-35.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield. Dordrecht: Kluwer.

Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In F. Lester (Ed.), *Research and issues in teaching mathematics through problem solving*. Reston, VA: Natioinal Council of Teachers of Mathematics.

Chevallard, Y. (2002). Organiser de l'étude. 1. Structures et fonctions. In Dorier, J-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R. & Floris, R. (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Corps (Isère) – du 21 au 30 août 2001. La Pensée Sauvage Edition.

Christiansen, B. & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A.G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education.* Dordrecht: Reidel.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Heath, T. (1981/1921). *A history of Greek mathematics, Volume II: From Aristarchus to Diophantus.* New York: Dover.

Hoffmann, M. (2006). What is a "semiotic perspective", and what could it be? Some comments on the contributions to this special issue. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 279-291.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Lakoff, G. & Nuñez, R. (2000). *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Mamona-Downs, J. & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 385-401.
Newell, A. & Simon, H. (1972). *Human problem solving*. Englewood-Cliffs: Prentice-Hall.
Niss, M. (2004). The Danish “KOM” project and possible consequences for teacher education. In R. Strässer, G. Brandell, B. Grevholm & O. Helenius (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 179-190). Göteborg: The Royal Swedish Academy of Sciences.
Polya, G. (1957). *How to solve it.* [2nd edition] Princeton: Princeton University Press.
Radford, L. (2003). Gestures, speech, and sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students’ types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning* 5(1), 37-70.
Scriven, M. & Paul, R. (2004). Defining critical thinking. [Available 2006-06-01 at http://www.criticalthinking.org/aboutCT/definingCT.shtNml]
Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem-solving, meta-cognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.
Schroeder, T.L. & Lester, Jr. F. (1989). Developing understanding in mathematics via problem-solving. In *New directions for elementary school mathematics*, 1989 Yearbook, NCTM (pp. 31-42). Reston, VA: The Council.
Silver, E. (1987). Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem-solving. In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 33-60). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
Skolöverstyrelsen (1980). *Lgr 80. Läroplan för grundskolan, allmän del*. Stockholm: Skolöverstyrelsen och Liber Utbildningsförlaget.
Skovsmose, O. (2000). Landscapes of investigation. Centre for Research in Learning Mathematics, Roskilde University.
Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. In M. Johnsen Høines & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *Vol. 4*, pp.281-288. Bergen University College, Norway.
Wyndhamn, J. (1993). Problem-solving revisited. On school mathematics as a situated practice. *Linköpings Studies in Arts and Science 98*, Linköping University.
Wyndhamn, J. (1997). Från räkning till matematik. Om matematik och matematik-ämnet I de senaste läroplanerna. Institutionen för tillämpad lärarkunskap, Linkö-pings universitet.
Wyndhamn, J, Riesbeck, E. & Schoultz, J. (2000). Problemlösning som metafor och praktik. Institutionen för tillämpad lärarkunskap, Linköpings universitet.