# Euklides i nya kläder – om dynamiska geometriprogram

- *Christer Bergsten* -

## Inledning

Den deduktiva presentationen av plangeometrin, med Euklides *Elementa* som förebild, har dominerat geometriundervisningen under lång tid, inte minst i Sverige inom läroverkstraditionen. Med den nioåriga grundskolans införande, och genom den nya matematikens inflytande på 1960- och 1970-talen, bröts den traditionen för en mer intuitiv och transformativ geometri. 'Euklides' ansågs alltför teoretisk och svårtillgänglig för den moderna skolan (se t.ex. Lindahl, 1987, s. 5). Någon systematisk framställning av geometrin gjordes därför inte längre och kunskaperna i geometri hos svenska skolelever ändrades både till karaktär och i prestation. Vid internationella jämförelser är geometri ett av de områden inom matematiken där svenska elever hamnar lågt[1]. Även vid universiteten har den klassiska geometrin haft och har mycket liten plats i de grundläggande kurserna, där de återfinns huvudsakligen i kurser för lärarutbildningen.

I vilken grad denna förändring av geometriutbildningen har påverkat studierna och förståelsen inom andra områden i matematiken kan man bara spekulera om. En följd verkar ha varit att utan det analyserande geometriska resonemanget i fokus blev resultatet en ökad fokusering på mätning och kvantitativ användning av formler för areor och volymer. Så skriver t.ex. Bengt Ulin (1998, s. 7) att ”Efter 1950-talet fick geometri en allt mindre roll i svenska skolor. I gymnasieskolan blev den i stort sett reducerad till analytisk geometri, en i och för sig effektiv form av geometri, vars metoder dock är algebraiska. I grundskolan har geometrin starkt begränsats till kvantiteter: beräkning av vinklar, längder, areor och volymer; problem av andra slag har fått ett blygsamt utrymme.” Studierna av symmetrier och transformationer tycks ha kommit helt i skymundan, möjligen beroende på oklarheter och/eller okunskap om syfte och sammanhang. Per Häggmark beskrev denna period som ”de år då geometri ägnades ett förstrött intresse och av många skolmän betraktades som ett omodernt ämnesområde (Häggmark, 1989, s. 5). Under åren sedan dess har flera röster hörts i samma anda (t.ex. Ulin, 1998; Bergsten, 2006a) men inte förrän i de nya kursplanerna för gymnasiet Gy07 har man kunnat se början till en officiell 'återupprättelse' av geometrins betydelse för en mer generell och integrerad matematisk kompetens. En naturlig fråga är då varför det skulle lyckas bättre nu än för 40 år sedan med en logiskt resonerande och konstruktiv geometri?

Det har skett stora förändringar när det gäller synen på matematiken i skolan, på den internationella scenen såväl som på den nationella. Ämnet i skolan har ändrats från en betoning på räkning till matematik, dvs. en styrning från att individuellt träna räkneförmåga till att undersöka, diskutera, resonera och förstå matematiska begrepp, sammanhang och metoder (Wyndhamn, 1997). För geometrins del utgör de nya tekniska hjälpmedlen en annan faktor som ändrat förutsättningarna. Datorprogram där man kan konstruera och dynamiskt manipulera geometriska figurer direkt på skärmen tillåter en kombination av undersökning, hypotesformulering och prövning, med ett då motiverat behov av att förklara och bevisa sina hypoteser. Figurerna blir dessutom snygga och precisa och kan därmed ge en tydligare

[1] I en sammanfattning av resultaten från TIMSS 2003 kan man läsa: “I algebra och geometri ligger Sverige bland de allra sämsta i 20-landsgruppen” (http://www.umu.se/edmeas/timss2003/Sammanfattning.html; 2006-04-10).

återkoppling än handgjorda konstruktioner. Forskning visar dock att dessa datorprogram inte så självklart skapar en direkt koppling mellan tanke och begrepp.

Här kommer dynamiska geometriprogram att diskuteras, illustrerat med ett par exempel (för gymnasiet), dels "vad dom gör", dels deras användning i skolans geometriundervisning. En kort översikt ges också av didaktisk forskning om geometriskt tänkande och om användning av dynamiska geometriprogram i undervisningen.

## Dynamiska geometriprogram

Dynamiska geometriprogram (i fortsättningen förkortat DGS, från engelskans *dynamic geometry software*) kallas de datorprogram som inte bara tillåter konstruktioner av geometriska figurer utan även ger möjlighet att manipulera dom på ett sådant sätt att de egenskaper som byggts in i konstruktionen bibehålls. Har man t.ex. konstruerat en triangel så att den per konstruktion har lika långa sidor kommer den fortfarande att vara liksidig även om man med hjälp av markören flyttar ett av dess hörn så att den kommer i ett annat läge, roteras, eller förminskas/förstoras. Denna funktion att flytta omkring ett objekt på skärmen brukar kallas *drag mode*. Med hjälp av *drag mode* kan man som lärande i matematik bli observant på olika grundläggande invarianser i den klassiska geometrin, som t.ex. att de tre bisektriserna i en triangel skär varandra i en punkt eller att periferivinklar på samma båge i en cirkel är lika stora. Två andra funktioner som karakteriserar DGS är kommandot *locus* (som ritar den geometriska orten för en vald punkt konstruerad utifrån en rörlig punkt) samt möjligheten att skapa *macron* (se t.ex. Strässer, 2004).

Det finns idag ett 70-tal olika DGS tillgängliga, sedan de började utvecklas på 1980-talet, de flesta dock baserade på ca 10 grundkoncept (Laborde et al., 2006). De mest kända är Cabri-Géomètre (Laborde et al. 1988), Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1991), Geometric Supposer (Schwartz et al., 1985) och Thales (Kadunz & Kautschitsch, 1993). Ett Java-baserad välkänt program är Cinderella[2]. De flesta program finns för utprovning som fria demo-versioner på respektive hemsidor. Det finns idag även gratisprogram som t.ex. GEONExT[3]. De flesta av dessa program är utvecklade för användning i undervisningssammanhang men många används även inom matematisk forskning.

För att belysa hur ett DGS fungerar ger jag här ett exempel på arbete med parabeln. Det program jag använt är Cabri-Géomètre II+ (kallat bara Cabri i fortsättningen) men motsvarande konstruktioner kan genomföras i de flesta DGS.[4]

Detta och fler konstruktionsexempel genomförda med Cabri finns att ladda ner från webbsidan www.mai.liu.se/~chber/Geometri .

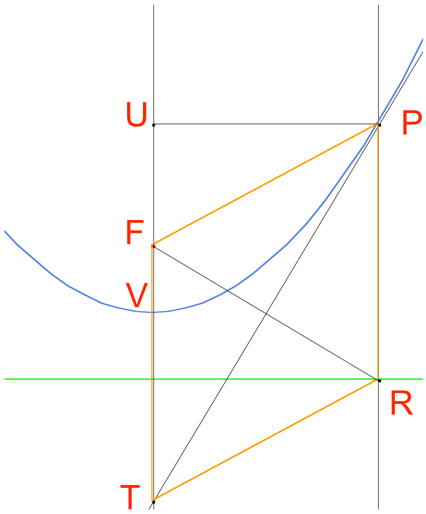
## Exempel 1 – *Parabeln*

Med den grundläggande geometriska kägelsnittsdefinitionen av en parabel följer den välkända avståndsegenskapen[5] som på gymnasienivå ofta använts som definierande egenskap. Med den som grund och kommandot *Conic* kan man i Cabri skapa en parabel att undersöka och arbeta med.[6]

---

[2] Se webbsida på http://cinderella.de/tiki-index.php
[3] Se webbsida på http://geonext.uni-bayreuth.de/
[4] För information om Cabri och dess historia, se http://www-cabri.imag.fr/cabri2/historique-e.php
Publikationer om Cabri i undervisningen finns listade på http://www-cabri.imag.fr/cabri2/publications/
[5] Förvånande nog återfinns inte denna hos Apollonius själv, utan bara motsvarande egenskaper för ellipsen och hyperbeln (se Apollonius, 1952).
[6] Se även Bergsten (2006b) för en historisk-didaktisk diskussion av parabeln, där även andra definitioner tas upp.

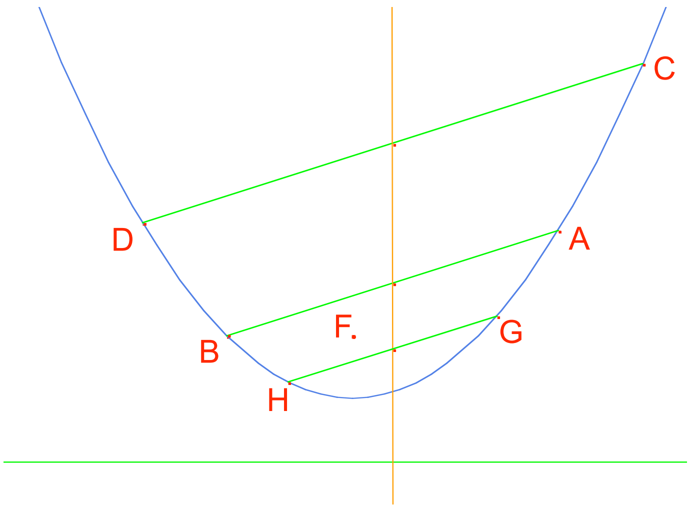
Lägg in en styrlinje L och en punkt F (fokus), godtyckligt valda (se figur 1). Välj sedan en punkt R på L och dra med kommandot *Perpendicular Line* normalen N till L genom R. Mittpunktsnormalen (*Perpendicular Bisector*) till sträckan FR skär N i P. Då har P samma avstånd till F som till R och ligger alltså på parabeln med styrlinjen L och brännpunkten (fokus) F. Flyttar man nu R längs L med *drag mode* kan man se hur P rör sig längs en kurva som kan synliggöras som ett spår med kommandot *Trace On*: Parabeln växer fram som ett resultat av den geometriska konstruktion man just genomfört. Vill man kan arbeta vidare med parabeln är det dock bättre att på samma sätt som P konstruera ytterligare fyra punkter på parabeln och sedan med kommandot *Conic* skapa parabeln genom dessa fem punkter. Genom att flytta F med *drag mode* ser man då hur parabeln blir 'brantare' då F avlägsnas från L och 'flackare' då den närmas. Den så kallade parabelromben PFTR kan lätt konstrueras och undersökas dynamiskt och brännpunktsegenskapen för axelparallella strålar undersökas (med *drag mode*) och förklaras. Att avståndet från parabelns vertex V till tangentens skärningspunkt T med axeln är samma som till tangeringspunkten P:s fotpunkt U på axeln kan undersökas till exempel genom att med kommandot *Distance* markera längden av respektive sträcka, eller dra en cirkel med medelpunkt i V och radie VU, och flytta på R (så att P flyttas) med *drag mode*.




Figur 1. Parabel med brännpunkt, styrlinje och en parabelromb.

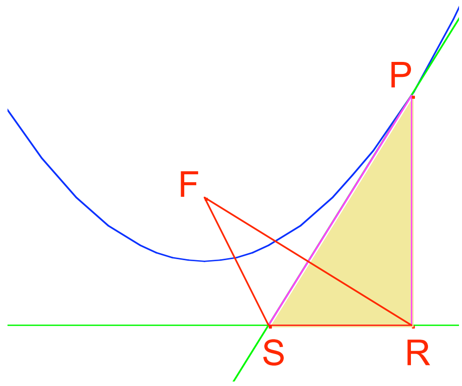
Mindre allmänt känt är kanske begreppet diameter i detta sammanhang (se t.ex. Archimedes, 1952, eller Apollonius, 1952). För att undersöka detta med Cabri väljs två punkter fritt på parabeln (A och B i figur 2). Välj sedan C fritt på parabeln och konstruera medkommandot *Parallel lines* en linje parallell med kordan AB och som förutom i C skär parabeln i D[7]. Genom att flytta A, B eller C med drag mode ser man hur CD förblir parallell med AB. Konstruera gärna ytterligare en korda GH parallell med AB. Marker nu med kommandot *Midpoint* mittpunkterna på AB och CD och dra linjen genom dessa. Man kan då observera att denna linje är parallell med parabelns huvudaxel och att den skär även GH i dess mittpunkt. Apollonius kallar en sådan linje genom mittpunkterna på parallella kordor till en parabel en diameter och definierar parabelns axel som den diameter som är vinkelrät mot de parallella kordorna (Apollonius, 1952).

[7] Dra sträckan (*Segment*) CD och göm (*Hide*) sedan den konstruerade linjen genom C.




Figur 2. Parabel med parallella kordor och tillhörande diameter.

Följande exempel handlar om problemlösning med en parabel konstruerad i Cabri. Med beteckningar som i konstruktionen i figur 3 söks den minsta triangel RPS, där S är skärningspunkten mellan styrlinjen L och mittpunktsnormalen M till F och R, då R är en punkt på L. Triangeln RPS kan lämpligen kallas ”subtriangeln” till parabeln för punkten P, då M är tangent till parabeln i P.




Figur 3. Parabel med ’subtriangel’ PSR till P.

Med Cabri kan situationen undersökas till exempel genom att med kommandot *Triangle* rita triangeln genom att markera punkterna R, P och S, fylla triangeln med en färg så att den lyser fram samt skriva ut mätetalet för dess area med kommandot *Area*. Även måttet för skärningsvinkeln PSR mellan tangenten och L kan markeras. Genom att med *drag mode* flytta punkten P längs parabeln ser man hur triangelns form och area ändras samt vinkeln PSR. Minsta area verkar finnas då vinkeln PSR är 30°, oberoende av avståndet mellan F och L. Att man på detta sätt ’upplevt’ situationen och hur det ser ut kan göra att man får större motivation att söka en förklaring till och/eller en validering av det observerade resultatet. Eftersom det handlar om optimering ligger det nära till hands att algebraisera problemet via ett lämpligt koordinatsystem.

Med avståndet $d$ från F till styrlinjen L ger en enkel kalkyl med hjälp av derivata, med Cartesiska koordinater definierade genom att L är linjen $y = -\frac{d}{2}$ med F i $\left(0, \frac{d}{2}\right)$, att sökt R har koordinaterna $\left(\frac{d}{\sqrt{3}},0\right)$ och att triangelns minsta area är $\frac{2\sqrt{3}}{9}d$. M skär då L i vinkeln 30°, oberoende av *d* och triangeln FSR är liksidig. Triangeln FSR är dock minst då vinkeln FSR är rät; då är trianglarna FSR och PSR kongruenta. Man kan också observera, genom att använda kommandot *Locus* på skärningspunkten mellan FR och PS (beroende punkt) relativt P (oberoende), att denna skärningspunkt ligger på en rät linje (identisk med *x*-axeln i det koordinatsystem som definierats ovan; enkelt att algebraiskt verifiera).[8]

**Geometri och forskning om geometriskt tänkande**

Inom den antika grekiska matematiken garanterades existensen av ett geometriskt objekt om det kunde konstrueras med passare och ograderad linjal, med en kompletterande validering av konstruktionens giltighet genom logisk argumentation[9]. Den deduktiva geometrin i antikens Grekland drevs till en alltmer avancerad nivå efter Euklides, inte minst genom Arkimedes och Apollonius, senare även genom Pappus. Den metod för geometrisk konstruktion (även användbar mer generellt för problemlösning) som kallades ’analys och syntes’ beskrevs under senare delen av antiken av Pappus i *Synagoge*:

> … in analysis we assume that which is sought as if it were already done (xx), and we inquire what it is from which this results, and again what is the antecedent cause of the latter, and so on, until by so retracing our steps we come upon something already known or belonging to the class of first principles, and such a method we call analysis as being solution backwards (xx).
>
> But in *synthesis*, reversing the process, we take as already done that which we last arrived at in the analysis and, by arranging in their natural order as consequencies what before were antecedents, and successively connecting them one with another, we arrive finally at the construction of what was sought; and this we call synthesis.
> (citerat i Heath, 1981, s. 400)

Detta illustrerar en viktig aspekt av geometriskt tänkande, som skolan till stor del tagit bort ur sitt program och som enligt många bör få en renässans (t.ex. Ulin, 1998). Det bör då ske utifrån kunskap om hur geometriskt tänkande utvecklas och en tydligt uttalad bild av målen med skolans matematikverksamhet.

Den mest inflytelserika teorin specifikt för det geometriska tänkandets utveckling utarbetades av Dina och Pierre Van Hiele under 1950-talet, baserad på Piagets utvecklingspsykologi. Teorin urskiljer fem hierarkiska nivåer: igenkänning – analys – logisk ordning – deduktion – stringens. På den första nivån kan barnet känna igen och namnge vanliga figurer (cirkel, rektangel, osv.), vilket utgör en grund för att på den andra nivån analysera egenskaper hos dessa figurer genom att räkna antal hörn, mäta längder och vinklar, osv. Med dessa erfarenheter som bas har man möjlighet att klassificera de geometriska objekten relativt varandra (en rektangel är en parallellogram som är en fyrhörning, osv.). Först på nästa nivå kan man förstå och genomföra en logiskt-deduktiv bevisföring (som att härleda bisektrissatsen genom att se på lämpliga likformiga trianglar). Den femte nivån, som innebär förmåga att förstå innebörden i vad ett axiomatiskt system är och att inse att andra val av axiom (än dom traditionella) kan leda till andra geometriska system. Forskning har visat på en stabilitet

[8] Läsaren uppmanas att genomföra ett geometriskt (Euklidiskt) bevis för dessa resultat.

[9] Långt senare (1797) visade Mascheroni att alla konstruktioner som kan genomföras med passare och linjal också kan genomföras med enbart passare, medan Steiners resultat från 1833 visar att en konstruktion som kan genomföras med passare och linjal också kan genomföras med enbart linjal om man dessutom har en fix cirkel given (se t.ex. Dörrie, 1965, s. 160-170).

för dom grundläggande nivåerna men på problem att identifiera och mäta skillnader mellan de högre nivåerna, vilket lett en reviderad modell med bara tre nivåer – igenkänning, analys och deduktion (se t.ex. Owens & Oughtred, 2006). Teorin kopplades av Van Hiele själva till en undervisningsmodell för hur övergången mellan de olika nivåerna kan underlättas, och senare till en mer generell teori för utveckling av matematiskt tänkande (Van Hiele, 1986). Det ”svåra” steget gäller övergången från nivå två till nivå tre. Forskning har även visat att formella definitioner bara kan förstås på nivå tre (de Villiers, 1998). Nivåerna är inte knutna till specifika åldrar och samma elev kan inom olika begreppsområden befinna sig på olika nivåer.

En grundläggande komplexitet för geometriska objekt är samspelet mellan figur och idé/begrepp, något som inte är intuitivt uppenbart (Fishbein, 1993). Förståelse kan enligt Duval (1998) nås genom samverkan mellan tre olika kognitiva funktioner, visualisering, konstruktioner med hjälp av verktyg (som t.ex. passare och linjal eller datorverktyg), och resonemang. I detta sammanhang skiljer Duval mellan tre olika sätt att betrakta en geometrisk figur,

> An immediate perceptual approach that may be an obstacle for the geometric representation of the diagram, an operative approach that is used for identifying sub-configurations useful for solving the problem and a discursive approach that is related to the statement describing the givens of the problem. (Laborde et al., 2006, p. 276-277)

Följande citat sammanfattar mycket av forskningen om lärande och undervisning i geometri:

> Problem solving was shown to be a key in students attending to key features in shapes and working towards understanding the relationship between shapes. This development was frequently described in terms of Van Hiele levels. These levels were shown to be continuous rather than discrete and studies showed a range of issues in assessing students in accordance with this theory. Nevertheless, experiences that influence preliminary intuitive approaches and more complex visual imagery are important in students' geometry education. (Owens & Oughtred, 2006, p. 105)

En rimlig didaktisk implikation av detta är att elever/studenter bör erbjudas undervisningssituationer i geometri med problemlösning där såväl ett intuitivt som ett mer komplext bildseende kommer i spel. Samtidigt krävs en medvetenhet om inom vilka Van Hiele-nivåer geometriska resonemang kan ske, samt om vilka olika typer av kognitiva funktioner som aktualiseras och integreras i samband med arbete med geometriska figurer – perceptuella, operativa och diskursiva.

**Didaktisk forskning om dynamiska geometriprogram**

En nyskriven översikt om forskning kring DGS i matematikundervisningen ges i Laborde et al. (2006). Ett fruktbart teoretiskt begrepp som används är *utilisation scheme* ('användarschema'; Rabardel, 2002), som står för hur en individ utnyttjar en artefakt (som t.ex. ett verktyg, konkret material eller ett datorprogram) för att klara av en uppgift man avsiktligt försöker lösa. Den process som leder till utvecklingen av ett användarschema kallas *instrumentering*, dvs. *artefakten*, objektet, förvandlas till ett *instrument* (se t.ex. Strässer, 2004). Ett exempel på användarschema när det gäller DGS är hur *drag mode* hanteras. Man har funnit att elever inte naturligt utnyttjar programmets möjligheter att skapa stabila konstruktioner och studera invarianser med hjälp av *drag mode*, utan gärna gör mer direkt visuella konstruktioner med anpassningar (t.ex. med mätetal för sträckor och vinklar för att få dem lika). För detta fenomen har termerna *robusta* respektive *mjuka* konstruktioner använts

(Healy, 2000). Även olika 'typer' av *drag mode* har identifierats, inte alla förutsedda av programkonstruktörerna (ibid.). Vid geometriska konstruktioner blir elevers försök ofta inte robusta under *drag mode*, vilket understryker den separation i elevens tanke mellan den visuella och den teoretiskt-geometriska världen som nämndes ovan (Noss et al., 1994). Hur ett steg i en konstruktion är beroende av tidigare steg inses inte heller alltid av elever som arbetar med DGS, vilket märks förutom vid *drag mode* även när *delete* används, då ibland oväntade delar av en figur försvinner. Detta ger stöd för att använda DGS i geometri-undervisningen då dessa 'misstag' uppmärksammar och medvetandegör sådant beroende.

Att arbete med DGS stöder behovet av och förståelsen för bevis inom geometrin framgår också av den forskning som gjorts, bland annat hur beviset fyller en funktion både som validering för individen av en konstruktion och som stöd för att övertyga en kamrat om att konstruktionen verkligen fungerar (se Laborde et al., 2006).

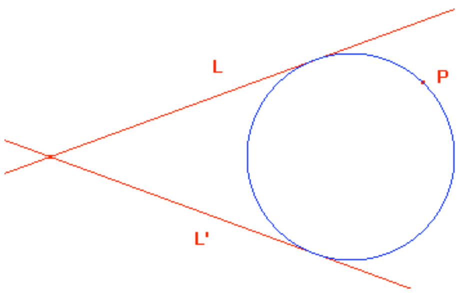
Forskningen kring DGS (och andra datorprogram inom matematikundervisningen) har inte bara visat på hur begreppsutvecklingen kan påverkas via tekniken utan även gett fördjupad insikt i elevers matematiska begreppsuppfattningar. Lärare är i detta sammanhang nyckelpersoner och man har visat hur lärares användning av DGS reflekteras i valet av olika typer av uppgifter, där tillgången till DGS fyller olika funktioner (Laborde, 2001). Bara vissa av dessa ger stöd för lärande medan andra är mer lämpade för forskning kring begrepps-förståelse (Laborde et al., 2006).

I Sverige har denna typ av programvara hittills levt en ganska undanskymd roll, i skola såväl som i didaktisk forskning. En del studier har gjorts i Göteborg (se t.ex. Holmquist & Lingefjärd, 1999; Lingefjärd & Holmquist, 2003; Lingefjärd & Norman, 2006) och nyligen presenterades den första svenska doktorsavhandlingen med DGS i fokus (Engström, 2006).

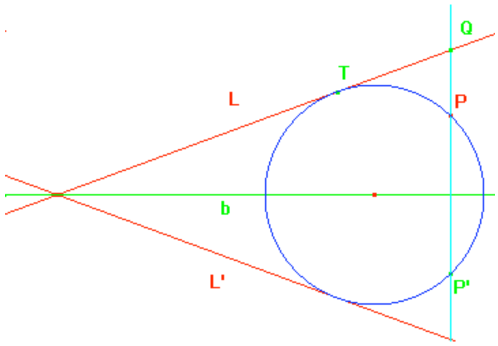
**Exempel 2 – *Apollonius problem***

En enkel situation för det s.k. Apollonius problem ska diskuteras här, dvs. att konstruera en 'cirkel' som tangerar tre givna 'cirklar', där 'cirkel' är en punkt, en rät linje eller en cirkel (se t.ex. Dörrie, s. 154-160): *Konstruera en cirkel som tangerar en punkt och två räta linjer.*

Jag ser här på den konfiguration där punkten ligger utanför två icke-parallella linjer, som i figur 4a. Detta är min *rekonstruktion* av hur Pappus (eller Apollonius) kan ha gjort med tanke på de metoder han brukade använda. Att som lärare i matematik ibland själv genom-föra sådana rekonstruktioner ger en stabil utgångspunkt för att i undervisningen kunna behandla den klassiska geometrin med en erfarenhetsgrund och respekt (och kanske fascina-tion) som eleverna kommer att märka och ta till sig. Sådana rekonstruktioner är också vad matematikhistoriker ibland måste göra då originaldokument saknas. En lärares arbete med sitt ämne måste inte bara vara att undervisa *i* och *om* det, utan även att själv arbeta *med* det.




Figur 4a. Givna objekt och sökt cirkel.

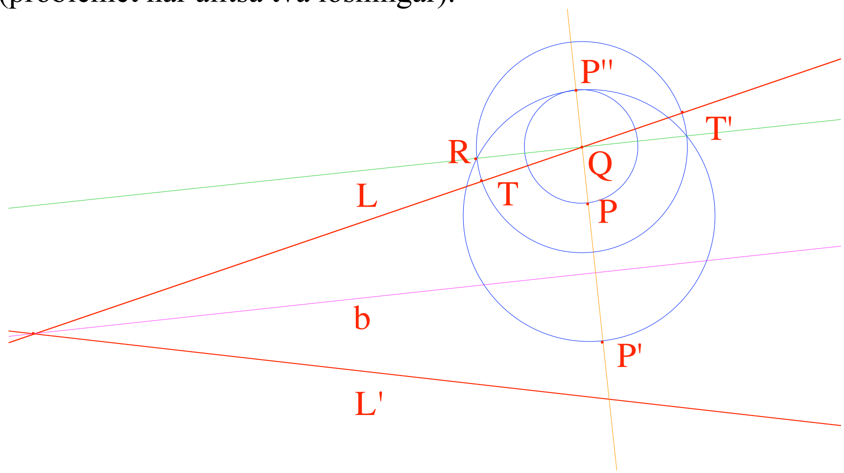



Figur 4b. Konstruktion av *b*, P' och Q.

*Analys*: Om en cirkel tangerar de givna linjerna L och L' och går genom den givna punkten P (se figur 4a), så måste cirkelns medelpunkt ligga på bisektrisen (b) till L och L' och även gå genom spegelpunkten P' till P i b (se figur 4b). Om T är tangeringspunkten mellan L och cirkeln och Q är skärningspunkten mellan L och linjen genom P och P', så följer av kordasatsen att $QT^2 = QP \cdot QP'$.

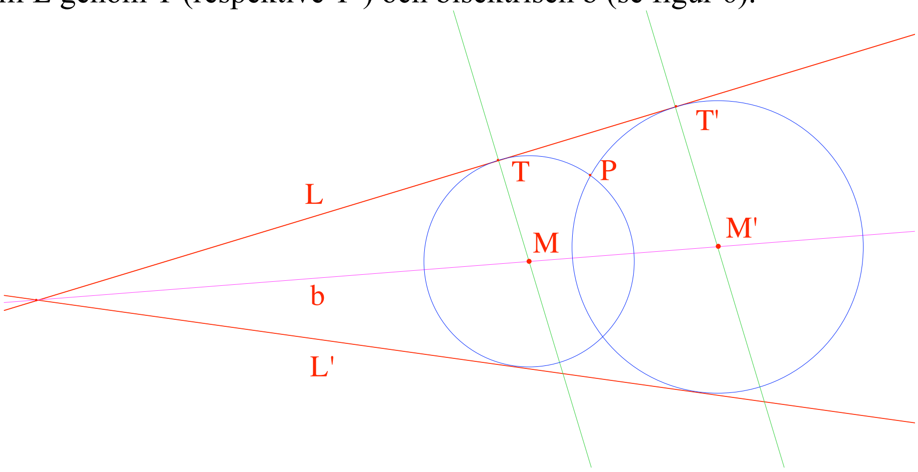
*Syntes*: Konstruera bisektrisen *b* till L och L' och spegelpunkten P' till P i *b* (klassiska konstruktioner). Konstruera Q som skärningen mellan sträckan PP':s förlängning[10] och L. Bestäm sedan T på L så att $QT^2 = QP \cdot QP'$. Där normalen till L skär *b* finns den sökta cirkelns medelpunkt.

Då P, P' och Q på en linje är givna kan T då bestämmas via en klassisk konstruktion på följande sätt (se figur 5). Cirkeln med Q som medelpunkt och QP som radie skär linjen genom P och P' i P''. Slå en cirkel med P'P'' som diameter. Normalen genom Q till denna diameter skär denna cirkel i R. Cirkeln med Q som medelpunkt och QR som radie skär då L i T respektive T' (problemet har alltså två lösningar).




Figur 5. Konstruktion av punkterna T och T'.

Den sökta cirkelns medelpunkt fås nu direkt som skärningspunkten M (respektive M') mellan normalen till L genom T (respektive T') och bisektrisen b (se figur 6).




Figur 6. Konstruktion av punkterna M, M'och de tangerande cirklarna.

[10] Om P ligger på b dras normalen till b genom P.

Konstruktionens robusthet kan nu kontrolleras genom att flytta punkten P med *drag mode*, liksom linjerna L och L'. Man ser då hur cirklarna tangerar varandra då P är på b och hur den 'yttre' cirkeln blir mer och mer lik en linje då vinkeln mellan L och L' närmar sig 180°.

**Euklides i nya kläder**

De exempel som tagits upp här kräver naturligtvis att man redan har en vana att hantera Cabri, vilket man dock lär sig ganska snabbt. Detta kan med fördel göras i samband med enkla övningar direkt inriktade på att belysa grundläggande begrepp och relationer, med fokus på invarianser under drag mode. Några av de mest grundläggande klassiska konstruktionerna (som att bestämma mittpunkten på och normalen till en given sträcka, dra en bisektris till en given vinkel, eller en linje genom en given punkt parallell med en given linje) känns nödvändiga att inledningsvis ha genomfört på papper med passare och linjal. Utan att ha upplevt och förstått vad som ligger bakom de snabbkommandon som finns i menyn på Cabri blir det omöjligt att känna att man har kontroll över vad som händer när man gör konstruktionerna på datorskärmen.

Kanske kan dynamiska geometriprogram ge Euklides den mer moderna klädedräkt som kan förmå fånga ett intresse för geometri hos dagens skolelever, då programmens användning bygger på sådana naturliga mänskliga aktiviteter som att undersöka, upptäcka och söka efter en förklaring. Då krävs dock att programmet av eleven kan hanteras som ett verktyg för att med dess bilder bygga en bro mellan tanken och objektet (här geometriska begrepp och relationer), vilket hos läraren kräver, utifrån föreliggande text, en reflekterad didaktik som bygger bland annat på kunskap om och samspelet mellan de fyra 'noderna' geometrin – programmet – instrumentaliseringsprocessen – geometritänkandet.

**Referenser**


Apollonius of Perga (/1952). Conics. In *Great books of the western world*, *Vol. 11.* Chicago.

Archimedes (/1952). The book of lemmas. In *Great books of the western world*, *Vol. 11.* Chicago.

Bergsten, C. (2004). Beyond the representation given: the parabola and historical metamorphoses of meanings. *SMDF Medlemsblad*, Nr 10, 37-49.

Bergsten, C. (2006a). Att konstruera sitt geometriska tänkande. I *Dokumentation från 14:e Matematikbiennalen*, Malmö 26-27 januari 2006 (CD-rom).

Bergsten, C. (2006b). Vad är en parabel? *Nämnaren*, *33* (1), 45-48.

Dörrie, H. (1965). 100 great problems of elementary mathematics. Their history and solution. New York: Dover Publications, Inc.

Engström, L. (2006). Möjligheter till lärande i matematik. Lärares problemformuleringar och dynamisk programvara. [Teaching Mathematics Posing Problems Using Dynamic Geometry Software]. http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:su:diva-943 (2006-04-09)

Gutiérrez, A. & Boero, P. (Eds.) (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME International Conference*, I, 103-117.

Heath, T. (1981/1921). *A history of Greek mathematics, Volume II.* New York: Dover.

Holmquist, M. & Lingefjärd. T. (1999). Datorstöd i blivande lärares matematiklärares utbildning. I C. Bergsten (Red.), *Datorstödd eller datorstörd matematikundervisning?* Högskoleverkets Skriftserie 1999:4 S.

Häggmark, P. (1989). *Laborativ geometri*. Lund: Studentlitteratur.

Kadunz, G. & Kautschitsch, H. (1993). THALES – Software zur experimentellen Geometrie (Computer program). Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 283-317.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez & P. Boero, (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 275-304). Rotterdam: Sense Publishers.

Laborde, J-M., Baulac, Y., & Bellemain, F. (1988). *Cabri-Géomètre I* (Computer program) Grenoble: Université Joseph Fourier.

Lindahl, G. (1987). *Euklides geometri*. Stockholm: Natur och Kultur.

Lingefjärd. T. & Holmquist, M. (2003). Learning mathematics using dynamic geometry tools. In S.J. Lamon et al. (Eds.), *Mathematical modeling: A way of life, ICTMA 11* (pp. 1119-126).Chichester: Horwood.

Lingefjärd, T. & Norman, V. (2006). Ett undersökande arbetssätt i geometri. *Nämnaren, 33* (1), 42-44.

Noss, R., Hoyles, C., Healy, L., & Hoelzl, R. (1994). Constructing meanings for constructing: An explorative study with Cabri-geometry. In J.D. Ponte & J.P. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference*, 3, 360-367.

Owens, K. & Oughtred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 83-115). Rotterdam: Sense Publishers.

Rabardel, P. (2002). People and technology: a cognitive approach to contemporary instruments. [Available 2006-04-20 at http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr ]

Schwartz, J. & Yerushalmy, M., & Shternberg, B. (1985). *The Geometric Supposer* (Computer program). Pleasantville, NY: Sunburst Communication.

Strässer, R. (2004). Artefacts – nstruments – computers. In C. Bergsten & B. Grevholm (Eds.), *Mathematics and language. Proceedings of Madif4* (pp. 212-218 Linköping: SMDF.

Ulin, B. (1998). *Klassisk geometri – motiv och mening*. Solna: Ekelunds Förlag AB.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education.* New York: Academic Press.

Wyndhamn, J. (1997). Från räkning till matematik. Om matematik och matematikämnet i de senaste läroplanerna. Institutionen för tillämpad lärrakunskap, Linköpings universitet.