Matematiska institutionen
Linköpings universitet

Kompendium om
KÄGELSNITT

Mats Neymark

1 Inledning

Detta kompendium behandlar parabler, ellipser och hyperbler som är kurvor i ett plan. Med en gemensam benämning kallas de ibland kägelsnitt (eller i äldre böcker också koniska sektioner). Detta beror på att man kan definiera dem som skärningskurvor mellan en kon och ett plan i rymden. Det gjorde den grekiske matematikern *Apollonius*, (250–175 f Kr), i sin bok om kägelsnitt, men det var säkert känt tidigare bl a av *Archimedes* (287–212 f Kr).

Grekiska matematiker använde förstås geometri som i Euklides' *Elementa* för att bevisa egenskaper hos parabler, ellipser och hyperbler. Men för att få en någorlunda kortfattad framställning av teorin är det enklare att här använda analytisk geometri och beskriva kurvorna med ekvationer mellan koordinaterna för punkter i ett koordinatsystem i planet. Definitionerna av kurvorna som kägelsnitt behandlas mycket kortfattat i avsnitt 7 om kägelsnitt.

Här behandlas först det viktigaste om analytisk geometri för punkter och linjer som redan bör vara bekant. Vi ser då på ett **ortonormerat koordinatsystem** i planet som i fig 1.1. Att det är ortonormerat innebär att koordinataxlarna är vinkelräta mot varandra och har samma längdenhet. En punkt P i planet bestäms av sina koordinater x och y enligt figuren och vi skriver då $P = (x, y)$. Punkten $O = (0, 0)$ kallas **origo** i koordinatsystemet.

Avståndet $d = PP'$ mellan $P = (x, y)$ och en punkt $P' = (x', y')$ ges av **avståndsformeln**

$$d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

som följer av Pythagoras sats. (Här är det viktigt att koordinatsystemet är ortonormerat).

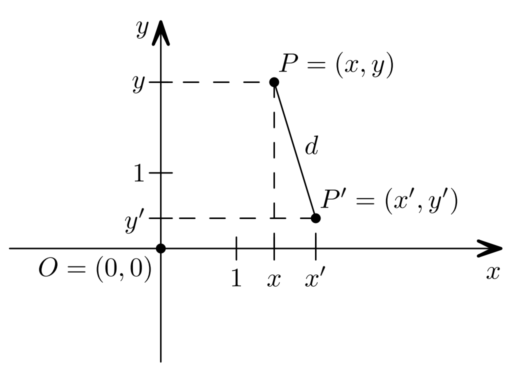

Fig 1.1

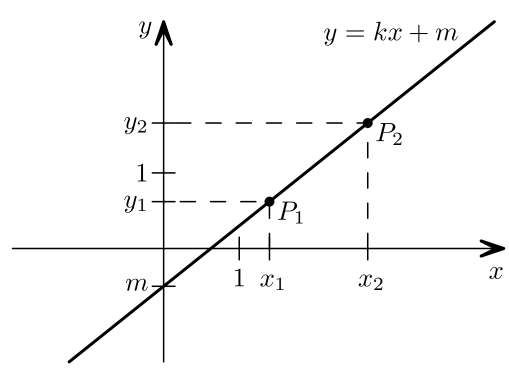

Fig 1.2

En (**rät**) **linje** som inte är parallell med y-axeln kan ges av en ekvation

$$y = kx + m$$

så att en punkt $P = (x, y)$ ligger på linjen om och endast om x och y uppfyller denna ekvation. Man skriver oftast bara "linjen $y = kx + m$" när man menar denna linje.

Här är m y-koordinaten för linjens skärningspunkt med y-axeln och k är linjens **lutning** (eller **riktningskoefficient**) som definieras genom en kvot

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

för två olika punkter $P_1 = (x_1, y_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2)$ på linjen (och det ger samma värde på k hur man än väljer dessa punkter). Detta illustreras i fig 1.2.

Om $P_1 = (x_1, y_1)$ är en punkt på en linje med lutning k, ligger då en punkt $P = (x, y)$ (med $x \neq x_1$) på linjen om och endast om

$$k = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

d v s

$$y = y_1 + k(x - x_1)$$

som är ett annat sätt att skriva en ekvation för linjen (och gäller även för $x = x_1$).

Om lutningen är $k = 0$ får en linje $y = kx + m$ ekvationen

$$y = m$$

och är parallell med x-axeln och skär y-axeln i punkten $(0, m)$. En linje som är parallell med y-axeln ges av en ekvation

$$x = d$$

och skär då x-axeln i punkten $(d, 0)$.

En **normal** till en linje är en linje som är vinkelrät mot den första linjen. Om en linje har lutning $k_1 \neq 0$, så har varje normal till den lutningen

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \neq 0 \qquad \text{så att} \qquad k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

och

$$k_1 k_2 = -1$$

Linjerna $y = m$ och $x = d$ är förstås normaler till varandra.

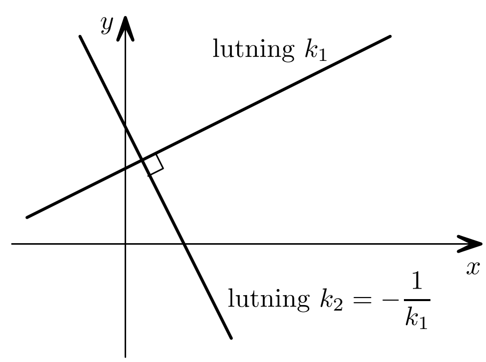

Fig 1.3

I detta kompendium definieras parabler, ellipser och hyperbler som kurvor i ett plan genom geometriska villkor. Från dessa villkor härleds sedan ekvationer för kurvorna i ett ortonormerat koordinatsystem så att en kurva beskrivs som mängden av punkter $P = (x, y)$ sådana att x och y uppfyller ekvationen för kurvan. Med hjälp av dessa ekvationer kan vi också härleda ekvationer för tangenter m m till parabler, ellipser och hyperbler.

2 Parabler

En **parabel** bestäms av en linje l och en punkt F utanför l genom att parabeln är mängden av alla punkter P sådana att avståndet från P till F är lika med (vinkelräta) avståndet från P till l. Punkten F kallas **brännpunkt** eller **fokus** och linjen l kallas **styrlinje** för parabeln. Detta illustreras i fig 2.1 där (en begränsad del av) parabeln ritats som en kurva med några punkter P, P' och P'' på kurvan. Skärningspunkten V mellan parabeln och linjen genom F vinkelrät mot l kallas **vertex** för parabeln, strålen från V genom F kallas parabelns **axel** och parabeln är symmetrisk kring denna axel.

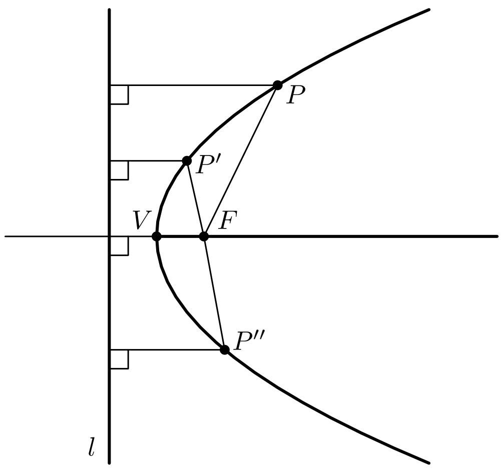

Fig 2.1

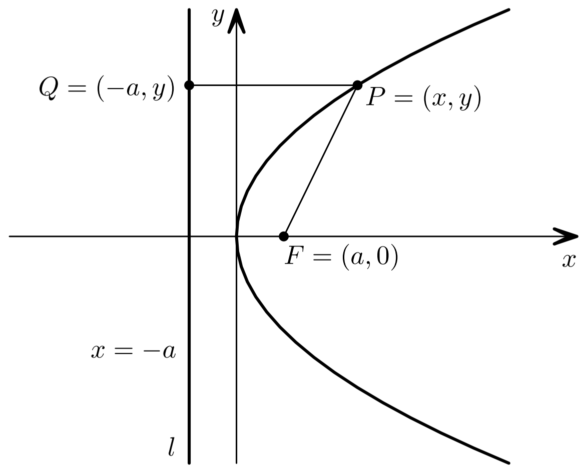

Fig 2.2

Vi inför ett ortonormerat koordinatsystem där brännpunkten ligger på positiva x-axeln och styrlinjen l är parallell med y-axeln genom att $F = (a, 0)$ med $a > 0$ och l har ekvationen $x = -a$. Då blir positiva x-axeln parabelns axel och parabeln går genom origo d v s punkten $(0, 0)$ som blir blir vertex för parabeln. Se fig 2.2.

Avståndet från en punkt $P = (x, y)$ till $F = (a, 0)$ är med avståndsformeln

$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2}$$

och avståndet från P till linjen l är lika med avståndet

$$PQ = x - (-a) = x + a$$

från P till punkten $Q = (-a, y)$ på l. Villkoret $PF = PQ$ ger efter kvadrering

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = (x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^2 = 4ax$$

Vi har därför visat följande sats:

Sats 2.1 *Parabeln med brännpunkten $F = (a, 0)$ (med $a > 0$) och styrlinjen l med ekvation $x = -a$ ges av ekvationen*

$$y^2 = 4ax.$$

Övningar

2.1 Bestäm brännpunkten F och styrlinjen l för parabeln i sats 2.1 då den går genom punkten $(2, 3)$ och kontrollera att avståndet från denna punkt till F är lika med avståndet till l.

2.2 Bestäm **parametern** för parabeln i sats 2.1, d v s avståndet mellan de punkter där parabeln skär den linje som går genom brännpunkten och är parallell med styrlinjen.

3 Ellipser

En **ellips** bestäms av två punkter F_1 och F_2 samt en given positiv konstant genom att ellipsen är mängden av punkter P sådana att summan av avståndet från P till F_1 och avståndet från P till F_2 är den givna kontanten d v s att

$$PF_1 + PF_2 = \text{konstant}. \tag{3.1}$$

Punkterna F_1 och F_2 kallas **brännpunkter** för ellipsen. Detta illustreras i fig 3.1 där ellipsen ritats som en kurva med några punkter P, P' och P'' på kurvan.

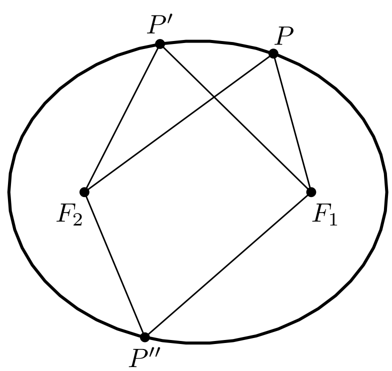

Fig 3.1

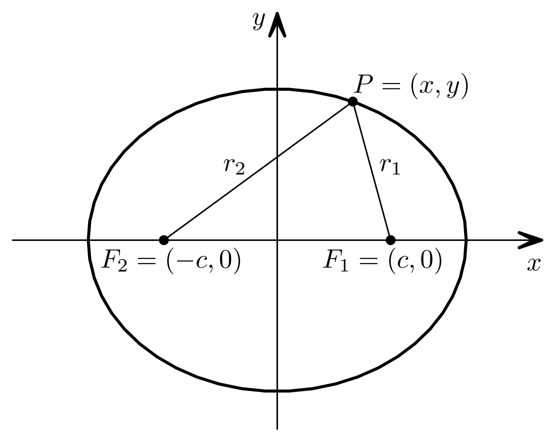

Fig 3.2

Vi inför ett ortonormerat koordinatsystem där brännpunkterna F_1 och F_2 ligger på positiva resp negativa x-axeln genom att $F_1 = (c, 0)$ och $F_2 = (-c, 0)$ med $c \geq 0$.

Avstånden $r_1 = PF_1$ och $r_2 = PF_2$ från $P = (x, y)$ till $F_1 = (c, 0)$ resp $F_2 = (-c, 0)$ är med avståndsformeln

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} \tag{3.2}$$

resp

$$r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} \tag{3.3}$$

och det det ger efter kvadrering

$$(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = r_1^2 - r_2^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - (x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = -4cx.$$

Det är praktiskt att beteckna kontanten i (3.1) med $2a$ där $a > c$ och det ger villkoret

$$r_1 + r_2 = 2a$$

och alltså

$$r_1 - r_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 + r_2} = \frac{-4cx}{2a} = -\frac{2cx}{a}$$

Dessa ekvationer ger

$$r_1 = a - \frac{cx}{a} \qquad \text{och} \qquad r_2 = a + \frac{cx}{a} \tag{3.4}$$

och alltså

$$r_1^2 + r_2^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 + \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} + a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = 2a^2 + \frac{2c^2x^2}{a^2}$$

Men (3.2) och (3.3) ger också

$$r_1^2 + r_2^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 2x^2 + 2c^2 + 2y^2$$

och alltså

$$x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} \iff x^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2$$
$$\iff \frac{(a^2-c^2)x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

där

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \qquad \text{så att} \qquad b^2 = a^2 - c^2.$$

Vi har därmed visat följande sats:

Sats 3.1 *En ellips med brännpunkterna $F_1 = (c, 0)$ och $F_2 = (-c, 0)$ ges av en ekvation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

där $a > c \geq 0$ och $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ så att $0 < b \leq a$.

Ellipsen i sats 3.1 skär x-axeln i punkterna

$$(a, 0) \qquad \text{och} \qquad (-a, 0)$$

och sträckan mellan dem kallas **storaxel** (eller **transversalaxel**) för ellipsen och den har alltså längden $2a$.

Ellipsen skär y-axeln i punkterna

$$(0, b) \qquad \text{och} \qquad (0, -b)$$

och sträckan mellan dem kallas **lillaxel** (eller **konjugataxel**) för ellipsen och den har då längden $2b$.

Ellipsen är symmetrisk kring dessa axlar och kring sin **medelpunkt** (eller **centrum**) $M = (0, 0)$ (origo).

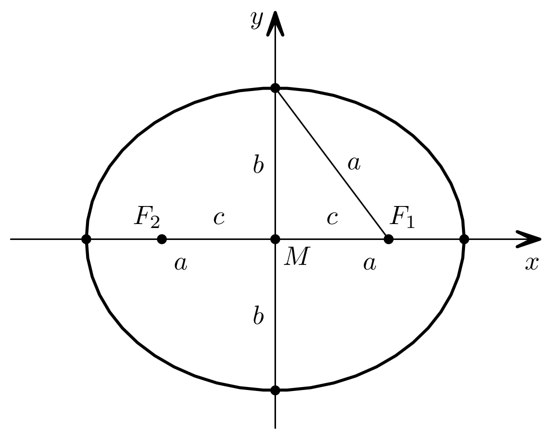

Fig 3.3

Talet

$$e = \frac{c}{a}$$

kallas **excentricitet** för ellipsen och av olikheterna $0 \leq c < a$ följer att

$$0 \leq e < 1.$$

Om speciellt $e = 0$ är $c = 0$ och ellipsens brännpunkter F_1 och F_2 sammanfaller med dess medelpunkt M. Ellipsen är då mängden av punkter som har avståndet a till M och är alltså en **cirkel** med medelpunkt M och **radie** a. Ekvationen i sats 3.1 kan då skrivas i formen

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

För en allmän ellips mäter excentriciteten e hur mycket ellipsen avviker från cirkelformen genom att den blir allt plattare ju större e är (men fortfarande < 1).

Övningar

3.1 Bestäm brännpunkterna F_1 och F_2 för ellipsen i sats 3.1 då den går genom punkten $P = (2, 3)$ och har excentriciteten $e = \frac{1}{2}$ och kontrollera att summan av PF_1 och PF_2 är lika med ellipsens storaxel $2a$.

3.2 Bestäm parametern för ellipsen i sats 3.1, d v s avståndet mellan de punkter där ellipsen skär den linje som går genom en av brännpunkterna och är vinkelrät mot ellipsens storaxel.

4 Hyperbler

En **hyperbel** bestäms av två punkter F_1 och F_2 samt en given positiv konstant genom att hyperbeln är mängden av punkter P sådana att absolutbeloppet av skillnaden mellan avståndet från P till F_1 och avståndet från P till F_2 är den givna kontanten d v s att

$$|PF_1 - PF_2| = \text{konstant}. \tag{4.1}$$

Punkterna F_1 och F_2 kallas **brännpunkter** för hyperbeln. Detta illustreras i fig 4.1 där (begränsade delar av) hyperbeln ritats som två kurvor och P ligger på den ena eller den andra beroende på om PF_1 är mindre eller större än PF_2.

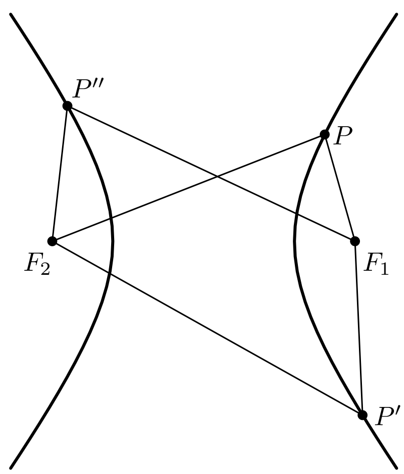

Fig 4.1

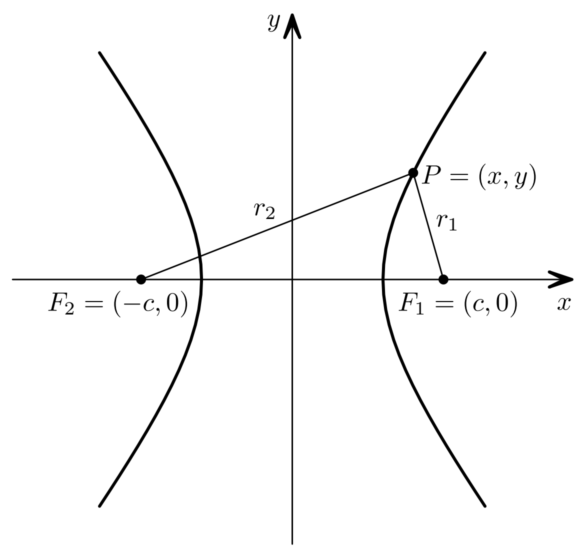

Fig 4.2

Vi inför här ett ortonormerat koordinatsystem där F_1 och F_2 ligger på positiva resp negativa x-axeln genom att $F_1 = (c, 0)$ och $F_2 = (-c, 0)$ med $c > 0$.

Avstånden $r_1 = PF_1$ och $r_2 = PF_2$ är (som för ellipser)

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} \tag{4.2}$$

resp

$$r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} \tag{4.3}$$

så att

$$(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = r_1^2 - r_2^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - (x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = -4cx.$$

Det är här också praktiskt att beteckna konstanten i (4.1) med $2a$ där nu $c > a > 0$ och det ger villkoret $|r_1 - r_2| = 2a$ d v s

och alltså

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= \pm 2a \\ r_1 + r_2 &= \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 - r_2} = \frac{-4cx}{\pm 2a} = \pm\Big(-\frac{2cx}{a}\Big) \end{aligned}$$

Dessa ekvationer ger

$$r_1 = \pm\Big(-\frac{cx}{a} + a\Big) = \mp\Big(\frac{cx}{a} - a\Big) \qquad \text{och} \qquad r_2 = \pm\Big(-\frac{cx}{a} - a\Big) = \mp\Big(\frac{cx}{a} + a\Big) \tag{4.4}$$

där $+$ eller $-$ gäller om $x < 0$ resp $x > 0$.

Härav följer att

$$r_1^2 + r_2^2 = \Big(\frac{cx}{a} - a\Big)^2 + \Big(\frac{cx}{a} + a\Big)^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2 = \frac{2c^2x^2}{a^2} + 2a^2$$

Men (4.2) och (4.3) ger också

$$r_1^2 + r_2^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 2x^2 + 2c^2 + 2y^2$$

och alltså

$$\frac{c^2x^2}{a^2} + a^2 = x^2 + c^2 + y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{c^2x^2}{a^2} - x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{(c^2-a^2)x^2}{a^2} - y^2 = c^2 - a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

där nu

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \qquad \text{så att} \qquad b^2 = a^2 - a^2.$$

Vi har då bevisat följande sats:

Sats 4.1 *En hyperbel med brännpunkterna $F_1 = (c, 0)$ och $F_2 = (-c, 0)$ ges av en ekvation*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

där $c > a > 0$ och $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

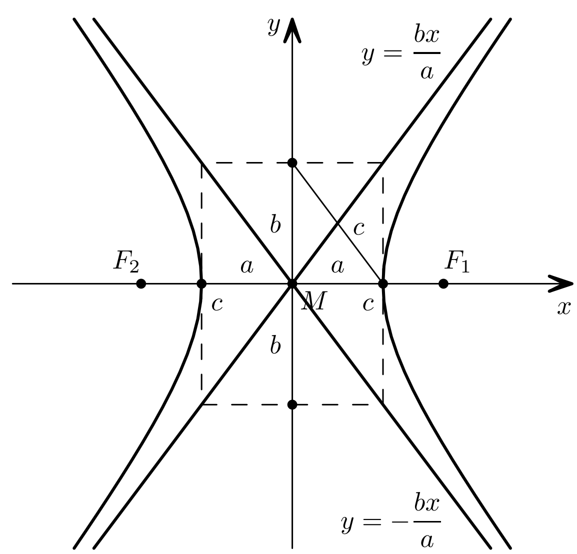

Fig 4.3

Hyperbeln i sats 4.1 skär x-axeln i punkterna

$$(a, 0) \qquad \text{och} \qquad (-a, 0)$$

som båda kallas vertex för hyperbeln. Sträckan mellan dem med längd $2a$ kallas ibland transversalaxel för hyperbeln.

Hyperbeln är symmetrisk kring axlarna och kring sin medelpunkt (eller centrum) $M = (0, 0)$ (origo).

Ekvationen för hyperbeln är också ekvivalent med

$$x^2 = a^2\Big(\frac{y^2}{b^2} + 1\Big)$$

som ger

$$x = \pm a\sqrt{\frac{y^2}{b^2} + 1}$$

där y kan anta alla reella värden. Detta visar att hyperbeln består av två grenar som båda är obegränsade i både x- och y-led.

I fig 4.3 visas också de två linjerna med ekvation

$$y = \frac{bx}{a} \qquad \text{resp} \qquad y = -\frac{bx}{a}. \tag{4.5}$$

Dessa linjer kallas **asymptoter** för hyperbeln därför att de har egenskapen att en punkt $P = (x, y)$ på hyperbeln närmar sig en av dessa linjer alltmer då den rör sig utåt på någon av hyperbelns grenar.

Bevis för asymptotegenskapen Ekvationen för hyperbeln kan också skrivas

$$y^2 = b^2\Big(\frac{x^2}{a^2} - 1\Big) = \frac{b^2x^2}{a^2}\Big(1 - \frac{a^2}{x^2})$$

som ger

$$y = \pm\frac{bx}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \pm\frac{bx}{a}\sqrt{1-\varepsilon} \qquad \text{där} \qquad \varepsilon = \frac{a^2}{x^2}$$

(observera att $x \neq 0$ då punkten (x, y) ligger på hyperbeln). Med konjugatregeln ger det

$$\begin{aligned} y = {} & \pm\frac{bx}{a}(1 + \sqrt{1-\varepsilon} - 1) = \pm\frac{bx}{a}\Big(1 + \frac{1-\varepsilon-1}{\sqrt{1-\varepsilon}+1}\Big) = \pm\frac{bx}{a}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}+1}\Big) = \\ = {} & \pm\frac{bx}{a}\Big(1 - \frac{a^2}{x^2(\sqrt{1-\varepsilon}+1)}\Big) = \pm\frac{bx}{a} \mp \frac{ab}{x(\sqrt{1-\varepsilon}+1)} \end{aligned}$$

där

$$\varepsilon = \frac{a^2}{x^2} \to 0 \qquad \text{och därmed också} \qquad \frac{ab}{x(\sqrt{1-\varepsilon}+1)} \to 0 \qquad \text{då} \qquad x \to \pm\infty.$$

Detta innebär att linjerna med ekvation (4.5) har den angivna asymptotegenskapen. □

Övningar

4.1 Bestäm brännpunkterna F_1 och F_2 för hyperbeln i sats 4.1 då den går genom punkten $P = (-5, 4\sqrt{5})$ och har en asymptot med ekvation $y = 2x$. Kontrollera också att absolutbeloppet av skillnaden mellan PF_1 och PF_2 är lika med hyperbelns transversalaxel $2a$.

4.2 Bestäm parametern för hyperbeln i sats 4.1, d v s avståndet mellan de punkter där hyperbeln skär den linje som går genom en av brännpunkterna och är vinkelrät mot hyperbelns transversalaxel (mot x-axeln).

5 Tangent och diameter

Parabler

Vi ser på en parabel med ekvation

$$y^2 = 4ax \qquad \text{där } a > 0$$

och skall undersöka var en linje med ekvation

$$y = kx + m \qquad \text{med lutning } k \neq 0$$

skär parabeln. Vi löser här ut $x = \dfrac{y-m}{k}$ och insatt i parabelns ekvation ger det

$$\begin{aligned} y^2 = \frac{4a(y-m)}{k} = \frac{4ay}{k} - \frac{4am}{k} \quad &\iff \quad y^2 - \frac{4ay}{k} + \frac{4am}{k} = 0 \\ \iff \quad y = \frac{2a}{k} \pm \sqrt{\frac{4a^2}{k^2} - \frac{4am}{k}} &= \frac{2a}{k} \pm \sqrt{\frac{4a^2 - 4akm}{k^2}} \\ \iff \quad y = \frac{2a}{k} \pm \sqrt{\frac{4a(a-km)}{k^2}} & \qquad (5.1) \end{aligned}$$

som ger reella värden på y bara om $a - km \geq 0$ d v s om

$$km \leq a \qquad \text{d v s} \qquad m \leq \frac{a}{k} \quad \text{då} \quad k > 0 \qquad \text{och} \qquad m \geq \frac{a}{k} \quad \text{då} \quad k < 0.$$

Linjen skär då parabeln i två punkter P^+ och P^- med y-koordinat enligt (5.1) med + för P^+ och − för P^-.

I gränsfallet $a - km = 0$ d v s

$$m = \frac{a}{k}$$

sammanfaller P^+ och P^- i en punkt P_1 som ligger på parabeln och på linjen med ekvation

$$y = kx + \frac{a}{k}.$$

Det är då naturligt att säga att denna linje är **tangent** till parabeln och att P_1 är motsvarande **tangeringspunkt**.

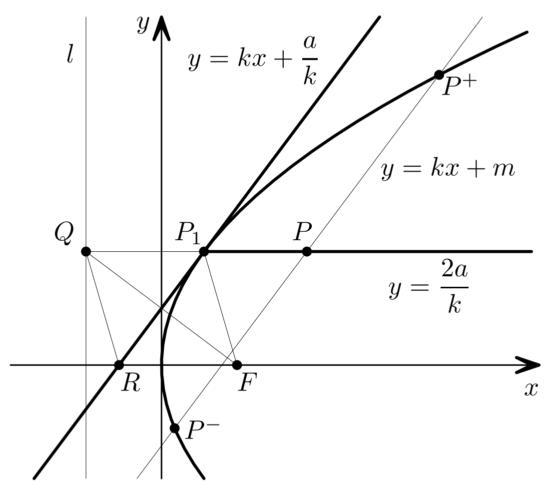

Fig 5.1

I det allmänna fallet gäller att mittpunkten P på **kordan** (d v s sträckan) mellan P^- och P^+ har y-koordinaten lika med medelvärdet av y-koordinaterna för P^+ och P^- d v s

$$y = \frac{2a}{k} \tag{5.2}$$

Vi säger nu att mittpunkterna P på alla kordor till parabeln med samma lutning k tillsammans bildar motsvarande **diameter** till parabeln. Det följer att denna diameter är en del av linjen med ekvation (5.2) och speciellt att tangeringspunkten P_1 är ändpunkt på diametern. Detta illustreras i fig 5.1.

En linje med lutning $k = 0$ har en ekvation $y = m$ och är parallell med x-axeln d v s med parabelns axel. Den skär parabeln i en enda punkt $(x, y) = (x, m)$ där $m^2 = 4ax$, men denna linje är förstås inte tangent till parabeln.

Vi skall också se var parabeln skärs av en linje som är parallell med y-axeln d v s med parabelns styrlinje. Den har en ekvation $x = d$ och skär parabeln i punkter $P^+ = (d, +\sqrt{4ad})$ och $P^- = (d, -\sqrt{4ad})$ om $d \geq 0$ och det medför att mittpunkten på kordan mellan P^- och P^+ då är punkten $P = (d, 0)$.

Om $d = 0$ får vi linjen med ekvation

$$x = 0$$

d v s y-axeln som förstås är tangent till parabeln med tangeringspunkt i $(0, 0)$ d v s parabelns vertex. Motsvarande diameter till parabeln är den positiva x-axeln d v s parabelns axel.

Allt detta kan sammanfattas i följande sats:

Sats 5.1 *För en parabel*

$$y^2 = 4ax \qquad \textit{där} \;\; a > 0 \tag{5.3}$$

gäller att linjen

$$y = kx + \frac{a}{k}$$

för varje $k \neq 0$ är tangent till parabeln, att tangeringspunkten är ändpunkt för motsvarande diameter till parabeln, där diametern är en del av linjen

$$y = \frac{2a}{k}.$$

Dessutom är linjen $x = 0$ d v s y-axeln tangent till parabeln med tangeringspunkt i parabelns vertex och motsvarande diameter till parabeln är parabelns axel.

Ett annat sätt att ange tangenterna till en parabel ges i följande sats:

Sats 5.2 *För varje punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ på parabeln (5.3) är*

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \tag{5.4}$$

en ekvation för tangenten till parabeln i punkten P_1, d v s med tangeringspunkt P_1.

Bevis Om $y_1 \neq 0$ och

$$k = \frac{2a}{y_1} \neq 0 \qquad \text{så att} \qquad y_1 = \frac{2a}{k},$$

är P_1 då ändpunkt på den diameter som enligt sats 5.1 svarar mot tangenten med lutning k och tangeringspunkt P_1. Det medför att tangenten också ges av ekvationen

$$y = y_1 + k(x - x_1) = y_1 + \frac{2a(x - x_1)}{y_1}$$

som är ekvivalent med ekvationen

$$yy_1 = y_1^2 + 2a(x - x_1) = 4ax_1 + 2ax - 2ax_1 = 2ax + 2ax_1 = 2a(x + x_1),$$

där $y_1^2 = 4ax_1$ då P_1 ligger på parabeln.

Om $y_1 = 0$ är också $x_1 = 0$ och (5.4) är ekvivalent med ekvationen $x = 0$ som enligt sats 5.1 är ekvation för tangenten med tangeringspunkt i parabelns vertex d v s punkten $(0, 0)$. $\square$

Övningar

5.1 Bestäm alla tangenter till parabeln $y^2 = 4x$ som går genom punkten $(2, 3)$.

5.2 Bestäm $a > 0$ så att punkten $(2, 2)$ ligger på parabeln med ekvation $y^2 = 4ax$. Bestäm sedan en ekvation för tangenten till parabeln i punkten $(2, 2)$, en ekvation för normalen till parabeln (d v s till tangenten) i denna punkt samt de punkter där tangenten resp normalen skär x-axeln.

5.3 Bevisa att fyrhörningen FP_1QR i fig 5.1 är en romb. Vad säger det om rombens diagonaler?

5.4 Bevisa med hjälp av övning 5.3 att vinkeln $\angle FP_1R$ är lika med (den minsta) vinkeln mellan tangenten och diametern genom P_1 i fig 5.1. Detta innebär att parabeln har egenskapen att en stråle från brännpunkten reflekteras mot parabeln så att den går ut parallellt med axeln (eller omvänt).

Ellipser

Vi skall nu se på en ellips med ekvation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{d v s} \qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad \text{där } a > 0 \text{ och } b > 0$$

och skall bestämma var en linje med ekvation

$$y = kx + m \qquad \text{med lutning } k \neq 0$$

skär ellipsen. Vi sätter därför in $y = kx + m$ i ellipsens ekvation och får då

$$\begin{aligned}
& b^2x^2 + a^2(kx+m)^2 = a^2b^2 \iff b^2x^2 + a^2k^2x^2 + 2a^2kmx + a^2m^2 - a^2b^2 = 0 \\
\iff \quad & (a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2m^2 - a^2b^2 = 0 \\
\iff \quad & x^2 + \frac{2a^2kmx}{a^2k^2+b^2} + \frac{a^2m^2 - a^2b^2}{a^2k^2+b^2} = 0 \qquad (\text{observera att } \ a^2k^2 + b^2 > 0) \\
\iff \quad & x = -\frac{a^2km}{a^2k^2+b^2} \pm \sqrt{\frac{a^4k^2m^2}{(a^2k^2+b^2)^2} - \frac{a^2m^2 - a^2b^2}{a^2k^2+b^2}} \\
\iff \quad & x = -\frac{a^2km}{a^2k^2+b^2} \pm \sqrt{\frac{a^4k^2m^2 - (a^2k^2+b^2)(a^2m^2 - a^2b^2)}{(a^2k^2+b^2)^2}} \\
\iff \quad & x = -\frac{a^2km}{a^2k^2+b^2} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2(a^2k^2+b^2-m^2)}{(a^2k^2+b^2)^2}} \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

som ger reella värden på x bara om $a^2k^2 + b^2 - m^2 \geq 0$ d v s om

$$m^2 \leq a^2k^2 + b^2 \qquad \text{d v s} \qquad -\sqrt{a^2k^2+b^2} \leq m \leq \sqrt{a^2k^2+b^2}$$

och linjen skär då ellipsen i två punkter P^+ och P^- med x-koordinat enligt (5.5) med $+$ för P^+ och $-$ för P^-.

I gränsfallet $m^2 = a^2k^2 + b^2$ d v s

$$m = \sqrt{a^2k^2+b^2} \qquad \text{eller} \qquad m = -\sqrt{a^2k^2+b^2}$$

sammanfaller P^+ och P^- i en punkt som här betecknas med P_1^+ för $m = \sqrt{a^2k^2+b^2}$ och med P_1^- för $m = -\sqrt{a^2k^2+b^2}$. P_1^+ och P_1^- ligger båda på ellipsen och på linjen med ekvation

$$y = kx + \sqrt{a^2k^2+b^2} \qquad \text{resp} \qquad y = kx - \sqrt{a^2k^2+b^2}. \qquad (5.6)$$

och vi säger då att dessa linjer är tangenter till ellipsen med tangeringspunkt P_1^+ resp P_1^-.

I det allmänna fallet gäller att mittpunkten P på kordan mellan P^- och P^+ har x-koordinaten

$$x = -\frac{a^2km}{a^2k^2 + b^2}$$

(medelvärdet av x-koordinaterna för P^+ och P^-) och därmed y-koordinaten

$$y = kx + m = -\frac{a^2k^2m}{a^2k^2+b^2} + m = \frac{-a^2k^2m + (a^2k^2+b^2)m}{a^2k^2+b^2} = \frac{b^2m}{a^2k^2+b^2} = \\ = \frac{b^2}{a^2k} \cdot \frac{a^2km}{a^2k^2+b^2} = -\frac{b^2}{a^2k} \cdot \Big(-\frac{a^2km}{a^2k^2+b^2}\Big).$$

Detta kan skrivas

$$y = k'x \tag{5.7}$$

där

$$k' = -\frac{b^2}{a^2k} \qquad \text{d v s} \qquad kk' = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{5.8}$$

och det betyder att P ligger på den linje som har ekvationen (5.7) och har lutning k' och går genom origo d v s ellipsens medelpunkt.

Vi säger nu att mittpunkterna P på alla kordor till ellipsen med samma lutning k tillsammans bildar motsvarande diameter till ellipsen. Det följer att denna diameter är sträckan på linjen (5.7) mellan P_1^- och P_1^+, symmetriskt i förhållande till ellipsens medelpunkt.

Vi säger också att lutningarna k och k' är **konjugerade** till varandra (med avseende på) ellipsen genom sambandet i (5.8).

I fig 5.2 visas tangenterna med ekvationerna (5.6) och motsvarande tangeringspunkter P_1^+ och P_1^- samt diametern mellan dessa punkter.

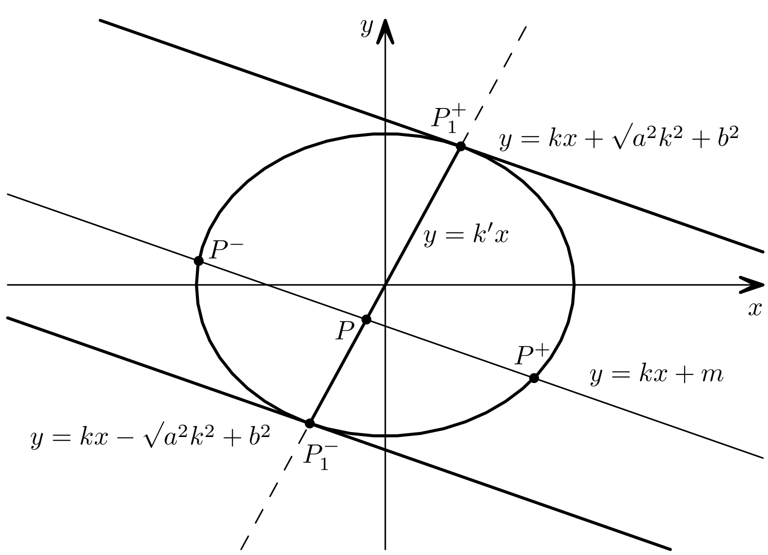

Fig 5.2

En linje med lutning $k = 0$ har en ekvation $y = m$ och är parallell med x-axeln. Man kan då lätt visa att den bara skär ellipsen om

$$-b \le m \le b$$

och att det blir två skärningspunkter P^+ och P^- sådana att mittpunkten P på kordan mellan P^- och P^+ ligger på y-axeln.

Om

$$m = b \qquad \text{eller} \qquad m = -b,$$

sammanfaller P^+, P^- och P i en punkt P_1^+ resp en punkt P_1^- som ligger på ellipsen och på linjen

$$y = b \qquad \text{resp} \qquad y = -b.$$

Vi säger då att dessa linjer också är tangenter till ellipsen med tangeringspunkt P_1^+ resp P_1^- samt att mittpunkterna på alla kordor till ellipsen med lutning $k = 0$ bildar motsvarande diameter till ellipsen. Denna diameter är då sträckan mellan P_1^- och P_1^+ på y-axeln.

En linje som är parallell med y-axeln har en ekvation $x = d$. Man kan då också lätt visa att den bara skär ellipsen om

$$-a \leq d \leq a$$

och att det blir två skärningspunkter P^+ och P^- sådana att mittpunkten P på kordan mellan P^- och P^+ ligger på x-axeln d v s på ellipsens storaxel.

Om

$$d = a \qquad \text{eller} \qquad d = -a$$

sammanfaller P^+, P^- och P i en punkt P_1^+ resp en punkt P_1^- som båda ligger på ellipsen och på linjen

$$x = a \qquad \text{resp} \qquad x = -a.$$

Vi säger då att dessa linjer också är tangenter till ellipsen med tangeringspunkt P_1^+ resp P_1^- samt att mittpunkterna P på alla kordor till ellipsen som är parallella med y-axeln bildar motsvarande diameter till ellipsen. Denna diameter är då sträckan mellan P_1^- och P_1^+ på x-axeln.

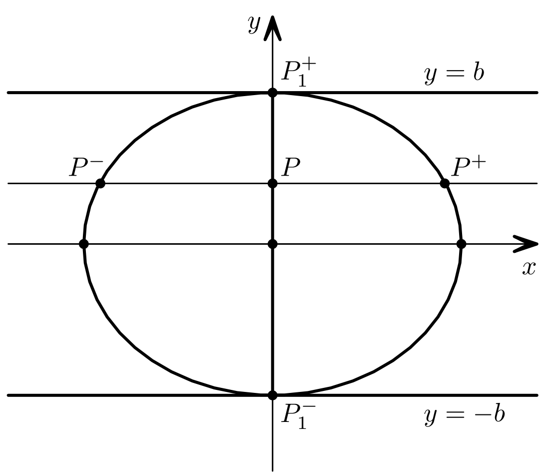

Fig 5.3

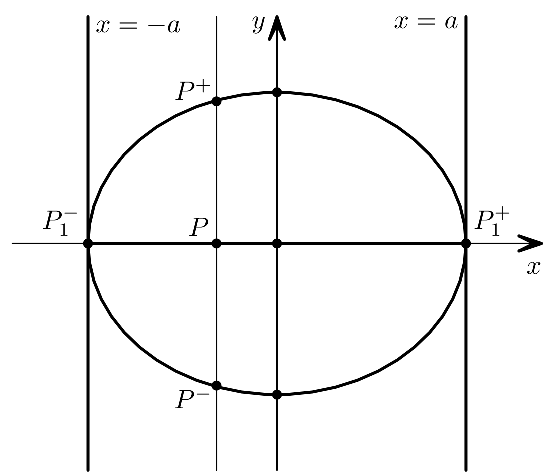

Fig 5.4

Allt detta kan sammanfattas i följande sats:

Sats 5.3 *För en ellips med ekvation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{där } a > 0 \textit{ och } b > 0 \tag{5.9}$$

gäller att linjerna

$$y = kx + \sqrt{a^2k^2 + b^2} \qquad \textit{och} \qquad y = kx - \sqrt{a^2k^2 + b^2}$$

för varje $k \neq 0$ är tangenter till ellipsen, att tangeringspunkterna är ändpunkter för motsvarande *diameter till ellipsen och att diametern är den del av linjen*

$$y = k'x$$

som ligger mellan tangeringspunkterna. Här är lutningarna k och k' konjugerade till varandra genom sambandet

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Dessutom är linjerna $y = b$ och $y = -b$ tangenter till ellipsen med tangeringspunkterna $(0, b)$ resp $(0, -b)$ och motsvarande diameter lika med ellipsens lillaxel. Likaså är linjerna $x = a$ och $x = -a$ tangenter till ellipsen med tangeringspunkterna $(a, 0)$ resp $(-a, 0)$ och motsvarande diameter lika med ellipsens storaxel.

Ett annat sätt att ange tangenterna till en ellips ges i följande sats:

Sats 5.4 *För varje punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ på ellipsen (5.9) är*

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \tag{5.10}$$

en ekvation för tangenten till ellipsen i punkten P_1, d v s med tangeringspunkt P_1.

Bevis Antag först att $x_1 \neq 0$ och $y_1 \neq 0$. Om k' bestäms så att

$$y_1 = k'x_1 \qquad \text{d v s} \qquad k' = \frac{y_1}{x_1}$$

ligger P_1 på linjen

$$y = k'x.$$

Enligt sats 5.3 är P_1 då en ändpunkt för den diameter som svarar mot tangenten med lutning k sådan att

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2} \qquad \text{d v s} \qquad k = -\frac{b^2}{a^2k'} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

och tangeringspunkt P_1. Det medför att tangenten också ges av ekvationen

$$y = y_1 + k(x - x_1) = y_1 - \frac{b^2x_1(x - x_1)}{a^2y_1} = y_1 - \frac{b^2xx_1}{a^2y_1} + \frac{b^2x_1^2}{a^2y_1}$$

som är ekvivalent med ekvationen

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

då $P_1 = (x_1, y_1)$ ligger på ellipsen.

Om $x_1 = 0$ är $y_1 = b$ eller $y_1 = -b$ och (5.10) är ekvivalent med ekvationen

$$y = \frac{b^2}{y_1} \qquad \text{d v s} \qquad y = \frac{b^2}{b} = b \qquad \text{resp} \qquad y = \frac{b^2}{-b} = -b$$

som enligt sats 5.3 är ekvation för tangenten med tangeringspunkt $(0, b)$ resp $(0, -b)$.

Motsvarande gäller om $y_1 = 0$ och alltså $x_1 = a$ eller $x_1 = -a$. □

Övningar

5.5 Bestäm en ekvation för tangenten till ellipsen $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ i punkten $\left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$ samt en ekvation för normalen till ellipsen (d v s till ellipsens tangent) i denna punkt.

5.6 Använd sats 5.4 för att bestämma en ekvation för normalen till ellipsen (5.9) i en punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ på ellipsen och bestäm den punkt N där normalen skär x-axeln då $y_1 \neq 0$.

5.7 Använd bl a övning 5.6 samt (3.4) på sid 4 för att bevisa att normalen till ellipsen i punkten P_1 där är bisektris till vinkeln $\angle F_1P_1F_2$ (med brännpunkterna F_1 och F_2). (Det innebär att en stråle från F_1 reflekteras mot ellipsen så att den sedan går genom F_2.)

Hyperbler

Vi skall också se på en hyperbel med ekvation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{d v s} \qquad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \qquad \text{där } \ a > 0 \ \text{ och } \ b > 0.$$

och bestämma var den skärs av en linje med ekvation

$$y = kx + m \qquad \text{med lutning } k \neq 0.$$

Insatt i hyprbelns ekvation ger detta med liknande räkningar som motsvarande för ellipsen

$$\begin{aligned} & b^2x^2 - a^2(kx+m)^2 = a^2b^2 \quad \iff \quad (a^2k^2 - b^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2m^2 + a^2b^2 = 0 \\ \iff \quad & x^2 + \frac{2a^2km}{a^2k^2 - b^2} + \frac{a^2m^2 + a^2b^2}{a^2k^2 - b^2} = 0 \\ \iff \quad & x = -\frac{a^2km}{a^2k^2 - b^2} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2(m^2 - a^2k^2 + b^2)}{(a^2k^2 - b^2)^2}} \end{aligned} \tag{5.11}$$

förutsatt att

$$a^2k^2 - b^2 \neq 0.$$

Det ger reella värden på x bara om $m^2 - a^2k^2 + b^2 \geq 0$ d v s om

$$m^2 \geq a^2k^2 - b^2$$

och linjen skär då hyperbeln i två punkter P^+ och P^- med x-koordinat enligt (5.11) med $+$ för P^+ och $-$ för P^-.

I gränsfallet då $m^2 = a^2k^2 - b^2$ d v s

$$m = \sqrt{a^2k^2 - b^2} \qquad \text{eller} \qquad m = -\sqrt{a^2k^2 - b^2},$$

där dessutom $a^2k^2 - b^2 > 0$ d v s

$$k^2 > \frac{b^2}{a^2} \qquad \text{d v s} \qquad k > \frac{b}{a} \quad \text{eller} \quad k < -\frac{b}{a},$$

sammanfaller P^+ och P^- i en punkt som här betecknas med P_1^+ för $m = \sqrt{a^2k^2 - b^2}$ och med P_1^- för $m = -\sqrt{a^2k^2 - b^2}$. P_1^+ och P_1^- ligger båda på hyperbeln och på linjen med ekvation

$$y = kx + \sqrt{a^2k^2 - b^2} \qquad \text{resp} \qquad y = kx - \sqrt{a^2k^2 - b^2}. \tag{5.12}$$

Vi säger då att dessa linjer är tangenter till hyperbeln med tangeringspunkt P_1^+ resp P_1^-.

I det allmänna fallet har mittpunkten P på kordan mellan P^- och P^+ x-koordinaten

$$x = -\frac{a^2km}{a^2k^2 - b^2}$$

och därmed y-koordinaten

$$y = kx + m = -\frac{a^2k^2m}{a^2k^2 - b^2} + m = -\frac{b^2m}{a^2k^2 - b^2} = \frac{b^2}{a^2k} \cdot \left(-\frac{a^2km}{a^2k^2 - b^2}\right)$$

med liknande räkningar som motsvarande för ellipsen. Detta kan skrivas

$$y = k'x \tag{5.13}$$

där nu

$$k' = \frac{b^2}{a^2 k} \qquad \text{d v s} \qquad kk' = \frac{b^2}{a^2} \tag{5.14}$$

och det betyder att P ligger på linjen med ekvationen (5.13) och har lutning k' och går genom origo d v s hyperbelns medelpunkt.

Vi säger nu också att mittpunkterna P på alla kordor till hyperbeln med lutning k tillsammans bildar motsvarande diameter till hyperbeln. Det följer att denna diameter består av två obegränsade delar av linjen (5.13) med ändpunkt P_1^- resp P_1^+, som ligger på var sin gren av hyperbeln symmetriskt i förhållande till hyperbelns medelpunkt .

Vi säger också att lutningarna k och k' är **konjugerade** till varandra (med avseende på) hyperbeln genom sambandet i (5.14).

I fig 5.5 visas tangenterna med ekvationerna (5.12) och motsvarande tangeringspunkter P_1^+ och P_1^- samt de två delarna av diametern.

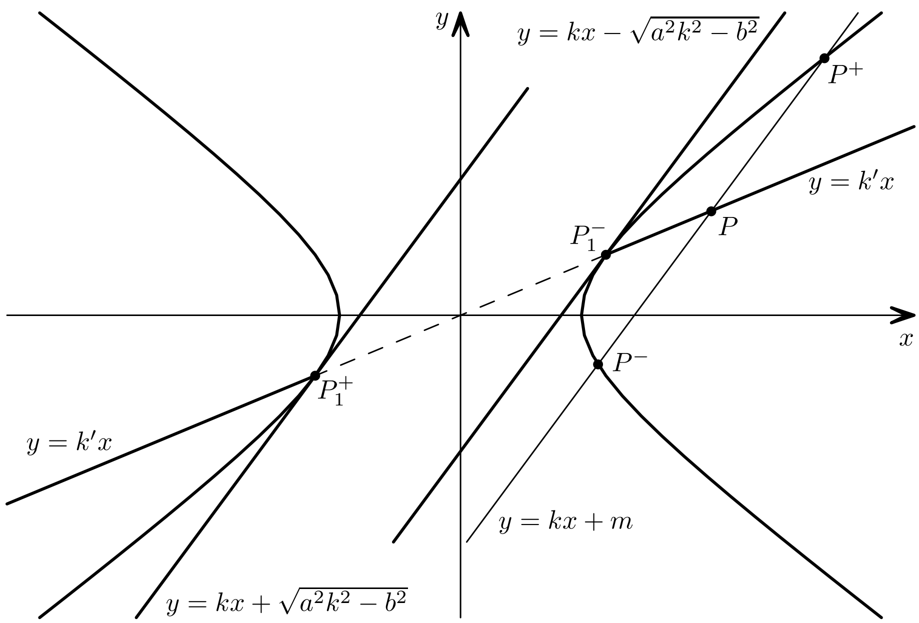

Fig 5.5

En linje som är parallell med y-axeln har en ekvation $x = d$ och man kan lätt visa att den bara skär hyperbeln om

$$d \leq -a \qquad \text{eller} \qquad d \geq a$$

och att det blir två skärningspunker P^+ och P^- sådana att mittpunkten P på kordan mellan P^- och P^+ ligger på x-axeln.

Om

$$d = a \qquad \text{eller} \qquad d = -a$$

sammanfaller P^+, P^- och P i en punkt som betecknas med P_1^+ resp P_1^- och ligger på hyperbeln och på linjen

$$x = d \qquad \text{resp} \qquad x = -d.$$

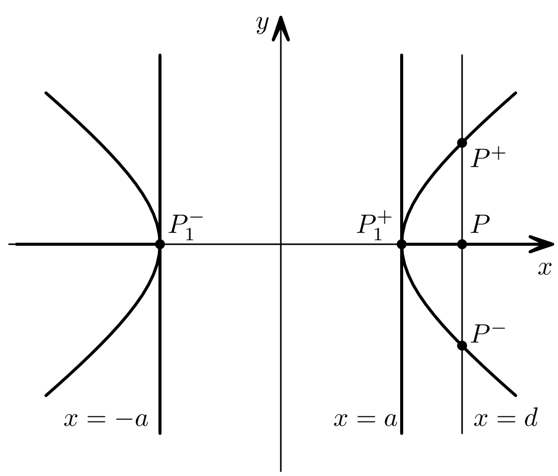

Fig 5.6

Vi säger då att dessa linjer är tangenter till hyperbeln med tangeringspunkter P_1^+ resp P_1^-. Dessutom säger vi att mittpunkterna på alla kordor till hyperbeln, som är parallella med y-axeln, tillsammans bildar motsvarande diameter och den består då av två delar av x-axeln med ändpunkter P_1^- resp P_1^+. Detta illustreras i fig 5.6.

Allt detta kan sammanfattas i följande sats:

Sats 5.5 *För en hyperbel med ekvation*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{där } a > 0 \text{ och } b > 0 \tag{5.15}$$

gäller att linjerna

$$y = kx + \sqrt{a^2k^2 - b^2} \qquad \text{och} \qquad y = kx - \sqrt{a^2k^2 - b^2}$$

är tangenter till hyperbeln för varje k sådant att

$$k > \frac{b}{a} \qquad \text{eller} \qquad k < -\frac{b}{a}$$

och att tangeringspunkterna är ändpunkter på var sin del av motsvarande diameter som ligger på linjen

$$y = k'x,$$

där k och k' är konjugerade till varandra genom sambandet

$$kk' = \frac{b^2}{a^2}.$$

Dessutom är linjerna $x = a$ och $x = -a$ tangenter till hyperbeln med tangeringspunkter $(a, 0)$ resp $(-a, 0)$ och motsvarande diameter lika med x-axeln.

Tangenterna till en hyperbel kan också anges med hjälp av följande sats:

Sats 5.6 *För varje punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ på hyperbeln (5.15) är*

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \tag{5.16}$$

en ekvation för tangenten till hyperbeln i punkten P_1, d v s med tangeringspunkt P_1.

Bevis Analogt med beviset för sats 5.4, men nu används förstås sats 5.5 och sambandet

$$kk' = \frac{b^2}{a^2} \qquad \text{d v s} \qquad k = \frac{b^2}{a^2k'} = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

i fallet då $y_1 \neq 0$. (Då P_1 ligger på hyperbeln är alltid $x_1 \neq 0$.) Här följer att tangenten också ges av ekvationen

$$y = y_1 + k(x - x_1) = y_1 + \frac{b^2x_1(x - x_1)}{a^2y_1} = y_1 + \frac{b^2xx_1}{a^2y_1} - \frac{b^2x_1^2}{a^2y_1}$$

som är ekvivalent med ekvationen

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Om $y_1 = 0$ är $x_1 = a$ eller $x_1 = -a$ och (5.16) är ekvivalent med ekvationen

$$x = \frac{a^2}{x_1} \qquad \text{d v s} \qquad x = \frac{a^2}{a} = a \quad \text{eller} \quad x = \frac{a^2}{-a} = -a$$

som enligt sats 5.5 är ekvation för tangenten med tangeringspunkt $(a, 0)$ resp $(-a, 0)$. □

(5.11) ger reella värden på x också i fallet då $a^2k^2 - b^2 < 0$ d v s

$$-\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}$$

ty då gäller trivialt att $m^2 > a^2k^2 - b^2$.

I detta fall skär linjen $y = kx + m$ också hyperbeln i två punkter P^+ och P^- som har x-koordinat enligt (5.11). Men de ligger nu på var sin gren av hyperbeln och kan inte sammanfalla i en punkt för något m. Det finns då ingen tangent till hyperbeln som har lutning k.

Däremot kan vi även här se på kordan (d v s sträckan) mellan P^- och P^+ och dess mittpunkt P. Samma räkningar som förut visar att P ligger på linjen med ekvation

$$y = k'x$$

där

$$kk' = \frac{b^2}{a^2} \qquad \text{d v s} \qquad k' = \frac{b^2}{a^2k}.$$

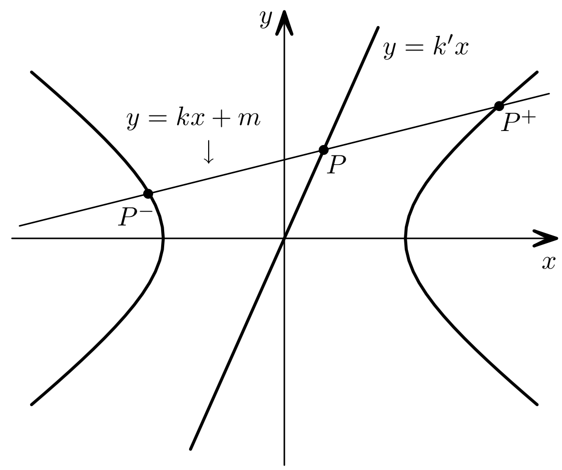

Fig 5.7

Vi säger också i detta fall att mittpunkterna på alla kordor till hyperbeln med samma lutning k bildar motsvarande diameter till hyperbeln och det följer att denna diameter är hela linjen $y = k'x$.

Samma slutsats gäller med andra räkningar, då linjer $y = m$ med lutningen $k = 0$ skär hyperbeln, men motsvarande diameter blir då y-axeln.

I undantagsfallet då $a^2k^2 - b^2 = 0$ d v s

$$k = \frac{b}{a} \qquad \text{eller} \qquad k = -\frac{b}{a}$$

är linjen $y = kx + m$ parallell med en av hyperbelns asymptoter (se (4.5) på sid 7). Om $m \neq 0$ skär då linjen hyperbeln i exakt en punkt och om $m = 0$ är linjen en av asymptoterna som inte alls skär hyperbeln. I dessa fall finns inte heller någon tangent till hyperbeln med lutning k och dessutom inte någon motsvarande diameter.

Övningar

5.8 Bestäm alla tangenter till hyperbeln $2x^2 - y^2 = 1$ som går genom punkten $(2, 3)$.

5.9 Använd sats 5.6 för att bestämma den punkt T där tangenten till hyperbeln (5.15) i en punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ skär x-axeln.

5.10 Använd bl a övning 5.9 och (4.4) på sid 6 för att bevisa att tangenten till hyperbeln i sats 5.6 i en punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ på hyperbeln är bisektris till vinkeln $\angle F_1P_1F_2$ (med brännpunkterna F_1 och F_2). (Det medför att en stråle från F_1 reflekteras mot hyperbeln så att den sedan ser ut att komma från F_2.)

6 Andra sätt att beskriva ellipser och hyperbler

I härledningen av ekvationen i sats 3.1 för en ellips visas att en punkt $P = (x, y)$ på ellipsen har avståndet

$$PF_1 = r_1 = a - \frac{cx}{a}$$

till ellipsens ena brännpunkt $F_1 = (c, 0)$. Med ellipsens excentricitet

$$e = \frac{c}{a}$$

kan detta skrivas

$$PF_1 = a - ex = e\Big(\frac{a}{e} - x\Big)$$

förutsatt att $e > 0$ d v s att ellipsen inte är en cirkel. Här är $\dfrac{a}{e} > a \geq x$ ty $e < 1$ (se sid 5) och då är

$$PQ_1 = \frac{a}{e} - x$$

avståndet från P till punkten Q_1 på linjen l_1 med ekvation

$$x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}. \tag{6.1}$$

i fig 6.1, d v s PQ_1 är (det vinkelräta) avståndet från P till denna linje. Alltså gäller sambandet

$$PF_1 = e \cdot PQ_1 \tag{6.2}$$

för alla punkter P på ellipsen. Omvänt visar man lätt att (6.2) medför att punkten P ligger på ellipsen.

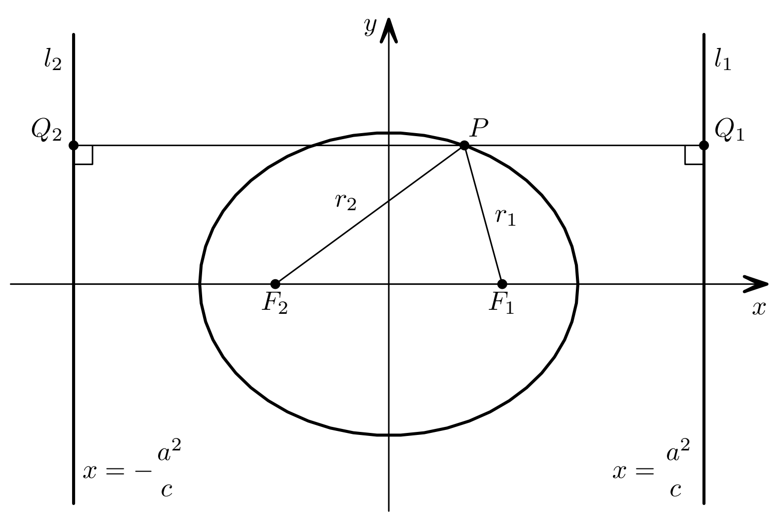

Fig 6.1

På analogt sätt eller helt enkelt genom symmetri ser vi att motsvarande samband

$$PF_2 = e \cdot PQ_2 \tag{6.3}$$

gäller i fig 6.1 med Q_2 på linjen l_2 med ekvation

$$x = -\frac{a^2}{c}. \tag{6.4}$$

Detta sätt att beskriva en ellips är analogt med definitionen av en parabel i avsnitt 2 med en brännpunkt och en styrlinje. Vi säger därför också att linjerna (6.1) och (6.4) är styrlinjer för ellipsen med motsvarande brännpunkt $F_1 = (c, 0)$ resp $F_2 = (-c, 0)$.

Vi kan också göra motsvarande resonemang för en hyperbel. I härledningen av ekvationen i sats 4.1 visas att en punkt $P = (x, y)$ på hyperbeln har avståndet

$$PF_1 = r_1 = \left|\frac{cx}{a} - a\right|$$

till hyperbelns ena brännpunkt $F_1 = (c, 0)$.

Vi definierar nu excentriciteten för hyperbeln som talet

$$e = \frac{c}{a} \qquad \text{där} \qquad e > 1 \qquad \text{eftersom} \qquad c > a > 0$$

och vi kan då skriva

$$PF_1 = |ex - a| = e\left|x - \frac{a}{e}\right|.$$

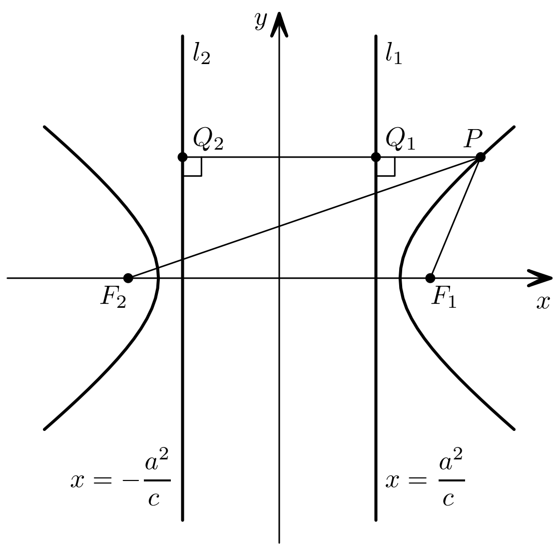

Fig 6.2

Här är

$$PQ_1 = \left|x - \frac{a}{e}\right|$$

avståndet från P till punkten Q_1 på linjen l_1 med ekvation

$$x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} \tag{6.5}$$

i fig 6.2, d v s PQ_1 är avståndet från P till denna linje och vi får sambandet

$$PF_1 = e \cdot PQ_1 \tag{6.6}$$

för alla punkter P på hyperbeln. Omvänt visar man också här lätt att (6.6) medför att P ligger på hyperbeln.

Analogt visar man motsvarande samband

$$PF_2 = e \cdot PQ_2 \tag{6.7}$$

i fig 6.2 med Q_2 på linjen l_2 med ekvation

$$x = -\frac{a^2}{c}. \tag{6.8}$$

Vi säger också här att linjerna (6.5) och (6.8) är styrlinjer för hyperbeln med motsvarande brännpunkter F_1 resp F_2.

För en parabel med brännpunkt $F = (a, 0)$ och styrlinje l med ekvation $x = -a$ gäller alltså att en punkt P ligger på parabeln om och endast om $PF = PQ$ där Q ligger på l och avståndet PQ är avståndet från P till l. Detta villkor kan också skrivas

$$PF = e \cdot PQ \qquad \text{med} \qquad e = 1,$$

där e då kallas excentriciteten för parabeln.

Man kan förstås också härleda ekvationer för parabler, ellipser och hyperbler med andra lägen i ett koordinatsystem än de som har behandlats här. Man får då alltid en andragradsekvation av formen

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

med konstanter A, B, C, D, E och F. Omvänt kan man visa att varje sådan ekvation är ekvation för en parabel, ellips eller hyperbel utom i vissa undantagsfall då kurvan t ex kan bestå av två räta linjer. En kurva med en sådan ekvation kallas också en **andragradskurva**. Det följer att en sådan kurva är bestämd om man har bestämt fem olika punkter på den. (Varför räcker det med fem fastän antalet konstanter är sex?)

Här skall vi bara se på ett enkelt fall med en ellips i annat läge och ett fall med en hyperbel.

Om ellipsen i sats 3.1 på sid 5 flyttas parallellt med x-axeln så att dess medelpunkt blir punkten $(a, 0)$, får den ekvationen

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2 - 2ax + a^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a} + 1 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

som kan skrivas om till

$$y^2 = \frac{2b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2} = \frac{2b^2x}{a} - \frac{(a^2-c^2)x^2}{a^2} = \frac{2b^2x}{a} + \Big(\frac{c^2}{a^2} - 1\Big)x^2.$$

Om hyperbeln i sats 4.1 på sid 7 flyttas parallellt med x-axeln så att medelpunkten blir punkten $(-a, 0)$, får den en ekvation

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2 + 2ax + a^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{2x}{a} + 1 - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

som också kan skrivas

$$y^2 = \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} = \frac{2b^2x}{a} + \frac{(c^2-a^2)x^2}{a^2} = \frac{2b^2x}{a} + \Big(\frac{c^2}{a^2} - 1\Big)x^2$$

Med beteckningarna

$$p = \frac{b^2}{a} \qquad \text{och} \qquad e = \frac{c}{a}$$

kan både ellipsens och hyperbelns ekvation skrivas

$$y^2 = 2px + (e^2 - 1)x \tag{6.9}$$

Både för ellipsen och för hyperbeln är talet $2p$ den s k parametern med geometrisk betydelse i övning 3.2 resp 4.2 medan talet e är excentriciteten (se sid 5 och sid 20).

Speciellt ger $e = 0$ ekvationen

$$y^2 = 2px - x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2px + y^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-p)^2 + y^2 = p^2$$

som är ekvation för en cirkel med radie p och medelpunkt $(p, 0)$.

Med

$$2p = 4a \qquad \text{och} \qquad e = 1$$

reduceras (6.9) till ekvationen

$$y^2 = 4ax$$

i sats 2.1 för en parabel. Här är talet $2p$ parametern för parabeln enligt övning 2.2 och talet $e = 1$ är parabelns excentricitet som på sid 20.

I fig 6.3 visas kurvor med ekvation (6.9) för några olika värden på e men med samma värde på p för alla kurvorna.

För $e > 1$ visar fig 6.3 bara ena grenen av hyperbeln med ekvation (6.9). Men ekvationen uppfylls då också av punkter (x, y) med negativa värden på x sådana att $2px + (e^2 - 1)x^2 \geq 0$, d v s

$$x < -\frac{2p}{e^2 - 1}$$

och det ger hyperbelns andra gren.

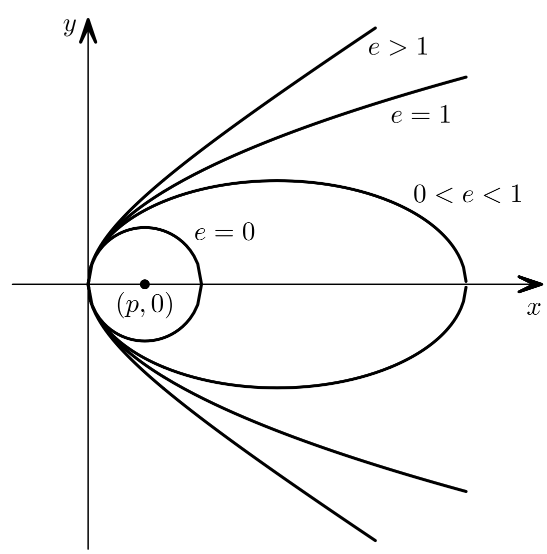

Fig 6.3

7 Något om kägelsnitt

Grekiska matematiker, framför allt Apollonius, studerade parabler, ellipser och hyperbler definierade som skärningskurvor mellan en **cirkulär kon** och ett plan. Om planet inte går genom konens spets får man en parabel, ellips eller hyperbel beroende på planets lutning i förhållande till konens axel.

Om vinkeln mellan planet och axeln är lika med vinkeln mellan konens mantelyta och axeln, blir skärningskurvan en parabel som i fig 7.1. Man kan också visa att man får parabelns brännpunkt och styrlinje med hjälp av en sfär som tangerar dels planet i en punkt F som då är brännpunkten och dels mantelytan längs en cirkel och att styrlinjen är skärningslinjen l mellan det givna planet och det plan som cirkeln ligger i.

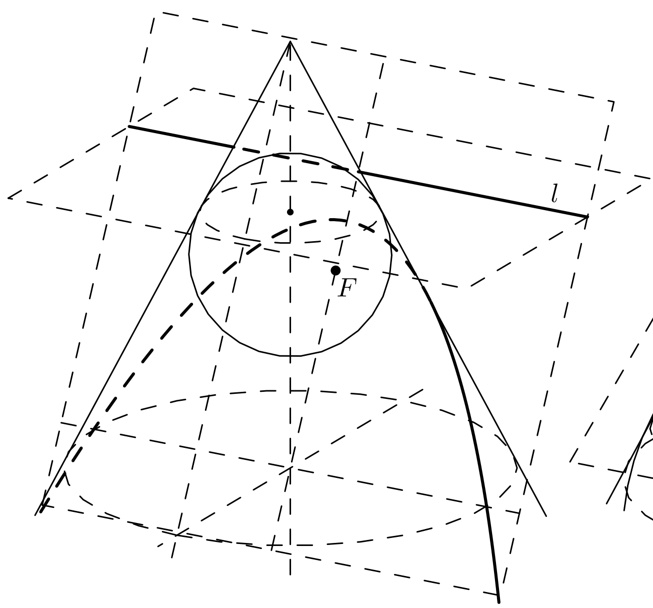

Fig 7.1

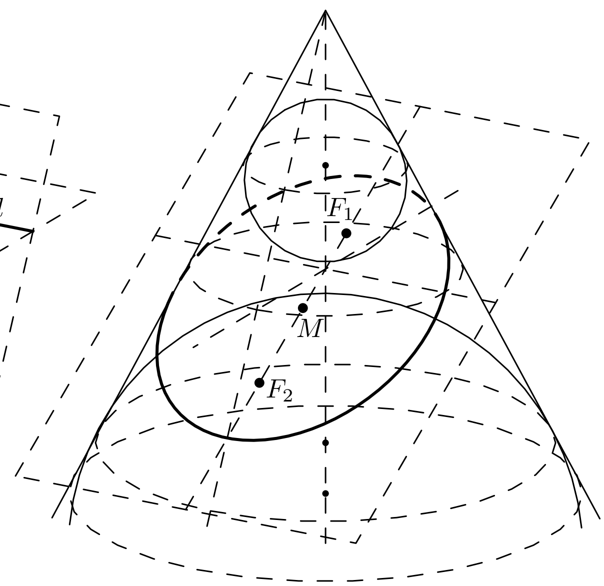

Fig 7.2

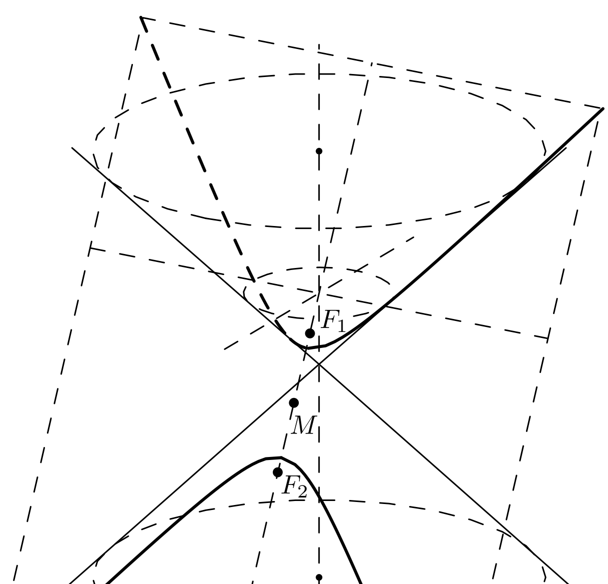

Fig 7.3

Om vinkeln mellan planet och axeln är större än vinkeln mellan mantelytan och axeln blir skärningskurvan en ellips som i fig 7.2. Här kan man också visa att man får ellipsens brännpunkter med hjälp av två sfärer som tangerar dels planet i var sin punkt F_1 resp F_2 och dels mantelytan längs var sin cirkel. Dessutom blir ellipsens storaxel (se sid 5) lika med avståndet mellan de två tangeringscirklarna längs mantelytan.

I specialfallet då planet är vinkelrätt mot konens axel blir skärningskurvan förstås en cirkel och de båda sfärerna tangerar planet i samma punkt $F_1 = F_2$ som då är cirkelns medelpunkt.

Om vinkeln mellan planet och axeln är mindre än vinkeln mellan mantelytan och axeln blir skärningskurvan en hyperbel som i fig 7.3, där vi nu ser på en s k **dubbelkon** sammansatt av två likformiga enkelkoner med topparna mot varandra. Här får man också brännpunkterna med hjälp av två sfärer som tangerar planet i var sin punkt F_1 resp F_2 och mantelytan längs var sin cirkel.

I figurerna streckas de delar av kurvorna som ligger bakom konen.

Vad får man som skärningskurva mellan en dubbelkon och ett plan som går genom konens topp?

8 Svar och ledningar till vissa övningar

2.1 $F = \left(\frac{9}{8}, 0\right)$, l har ekvation $x = -\frac{9}{8}$,

avstånden är $\sqrt{\left(2 - \frac{9}{8}\right)^2 - 3^2} = \frac{25}{8}$ resp $2 - \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{25}{8}$

2.2 $4a$

3.1 $F_1 = (2, 0)$, $F_2 = (-2, 0)$, $(\ a = 4, \quad b = 2\sqrt{3}\ )$, $PF_1 + PF_2 = 3 + \sqrt{(2+2)^2 + 3^2} = 8 = 2a$

3.2 $\frac{2b^2}{a}$

4.1 $F_1 = (5, 0)$, $F_2 = (-5, 0)$, $(\ a = \sqrt{5}, \quad b = 2\sqrt{5}\ )$,

$|PF_1 - PF_2| = \left|\sqrt{(-5-5)^2 + (4\sqrt{5})^2} - 4\sqrt{5}\right| = 2\sqrt{5} = 2a$

4.2 $\frac{2b^2}{a}$

5.1 $y = x + 1$ och $y = \frac{x}{2} + 2$

5.2 $a = \frac{1}{2}$, tangent $y = \frac{x}{2} + 1$, normal $y = -2x + 6$, skärningspunkter $(-2, 0)$ resp $(3, 0)$

5.3 (Använd ekvationen i sats 5.2 med $P_1 = (x_1, y_1)$ för att bestämma koordinaterna för R och visa att $P_1F = P_1Q = RF$)

Diagonalerna P_1R och FQ är vinkelräta mot varandra

5.4 (Använd satsen om likbelägna vinklar vid parallella linjer samt basvinkelsatsen)

5.5 $x + 2y = 5$ resp $2x - y = 2$

5.6 $y = y_1 + \frac{a^2 y_1 (x - x_1)}{b^2 x_1}$ om $x_1 \neq 0$, $x = 0$ om $x_1 = 0$, $N = \left(\frac{c^2 x_1}{a^2}, 0\right)$

5.7 (Bisektrissatsens omvändning för triangeln $\triangle F_1P_1F_2$ med N enligt övning 5.6)

5.8 $2x - y = 1$ och $7y - 10x = 1$ (med sats 5.6)

5.9 $T = \left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$ ($x_1 \neq 0$ för alla P_1 på hyperbeln)

5.10 (Bisektrissatsens omvändning för triangeln $\triangle F_1P_1F_2$ med T enligt övning 5.9)