Bedömning av kvalitet i matematikkunskaper

En jämförelse mellan Skolverkets betygskriterier, SOLO-taxonomin och van Hieles nivåer av tänkande.

Peter Nyström

Abstract

The present study originates from the question of what characterises high quality in mathematical knowledge and how such qualities can be identified in written student work on open-ended problems. Three models for judging levels of quality in mathematical knowledge are presented, interpreted, analysed and implemented on student work on two tasks in geometry. The models are the Swedish national assessment criteria for mathematics in upper secondary school, the SOLO taxonomy and van Hiele´s levels of thinking. The reasons for choosing these models include the apparent differences in for example subject specificity; the SOLO taxonomy is developed for all school subjects, the assessment criteria are common for all areas of mathematics and the van Hiele levels are developed for geometry. The geometry tasks are taken from the Swedish national assessment in mathematics for the upper secondary school, course A, in 1996. The process of developing the tasks is described, and an analysis of the tasks in relation to the curriculum, attainment targets and assessment criteria is presented. High levels of attainment in relation to one model are accompanied by high levels in relation to the other models for most students in the sample. But in some cases differences are found. These can at least partially be explained by the fact that the different models focus on different complexities of competence. The chosen models prove to be useful and provide meaningful descriptions of different levels of understanding.

Innehållsförteckning

INTRODUKTION

Relativa, eller grupprelaterade, betyg infördes i den svenska folk- och enhetsskolan redan i slutet av 40-talet (Andersson, 1991). Jämfört med de inträdesprov till realskolan som tidigare använts skulle dessa betyg vara mer pålitliga som urvalsinstrument och ge ett mer rättvist urvalsförfarande byggt på vetenskaplig grund. När grundskolan infördes 1962 så ersattes den sjugradiga relativa bokstavsskalan av en femgradig sifferskala av samma relativa typ. I gymnasiet avskaffades studentexamen 1967, och relativa betyg infördes då även i denna skolform. Men redan 1969 gav regeringen skolöverstyrelsen (SÖ) i uppdrag att utreda och belysa betygsfrågan. SÖ tillsatte i sin tur en arbetsgrupp som hösten 1970 föreslog att de relativa betygen på sikt skulle ersättas med målrelaterade betyg (Skolöverstyrelsen, 1971). I den skrivelse som SÖ lämnade till regeringen 1972 som svar på uppdraget var huvudtanken

…att man genom fortsatt målpreciseringsarbete skulle kunna komma vidare från en allmän relativism och rangordning till mera målpreciserade betygskriterier. (Marklund, 1987, s. 302)

Genom MUT-projektet (Målbestämning och UTvärdering i skolan) skulle en kärna av kunskaper och färdigheter kunna beskrivas. Därigenom ansågs kursen för ett ämne eller ämnesområde kunna preciseras och medelkraven för en sådan kurs skulle svara mot betyget tre.

Sedan dess har flera utredningar kommit fram till att de relativa betygen borde till förmån för målrelaterade betyg avskaffas (Andersson, 1991), men det kom att dröja till 1994 innan ett nytt betygssystem för gymnasiet såg dagens ljus. I detta ”mål- och kunskapsrelaterade” betygssystem ska eleven bedömas utifrån kriterier för olika betyg. Dessa kriterier bygger på centralt utformade betygskriterier vilka skall tolkas lokalt och formuleras i en lokal arbetsplan. 60-talets idéer om mycket detaljerade kravlistor har idag ersatts av en insikt om att mål och kriterier måste preciseras på en ”lagom” nivå. I samband med införandet av nya läro- och kursplaner samt ett nytt betygssystem för gymnasiala utbildningar så beslutades även om nya nationella prov som ska stödja lärarnas betygssättning.

Såväl nationella kursprov som lärarkonstruerade bedömningssituationer i skolan syftar till bedömning av elevers kunskaper i olika ämnen.

Proven kan ha en formativ funktion, dvs utgöra grund för planering av fortsatta undervisningsinsatser, eller en summativ funktion som avslutande redovisning på ett område, ofta för betygssättning. Vilket syftet med bedömningen än är så måste elevens prestation värderas mot någon form av måttstock. Vid en relativ betygssättning (grupprelaterad) jämförs individerna med varandra, men en graderad målrelaterad bedömning bygger på en föreställning om vissa mål som ska uppnås och att detta kan ske på olika kvalitativa nivåer.

Centrala frågor i detta sammahang är därför vad som menas med kvalitet i matematikkunskaper och hur dessa kvaliteter visar sig i elevers skriftliga lösningar till olika uppgifter. Mer specifikt kommer andra frågor att behandlas här: Vilka modeller kan man tänka sig att använda för att bedöma elevers kunnande? För vilka bedömningssituatiationer är modellerna användbara? Ger modellerna samma bild av kvalitet? På vilka grunder kan en elevs lösning sägas vara bättre än en annans? Vilka möjligheter erbjuder uppgifter av mer öppen typ? Hur väl motsvarar elevers lösning till uppgifter de intentioner och idéer som legat till grund för konstruktionen av uppgifterna?

För att i någon mån belysa dessa frågor följer nedan först ett svep över ett antal olika försök att beskriva olika aspekter och kvaliteter av kunskaper i matematik. Sedan beskrivs mer ingående tre kvalitetsmått eller modeller, nämligen betygskriterier för gymnasieskolans matematik, SOLO-taxonomin samt van Hieles nivåer av kunnande. I det följande redovisas användningen av dessa modeller på elevlösningar till två matematikuppgifter som ingick i det nationella kursprovet i Matematik A våren 1996. Uppgifternas förhållande till bland annat kursplanen redovisas också samt vissa resultat vid provets genomförande. Avslutningsvis diskuteras erfarenheterna vid studiet och tillämpningen av de valda modellerna.

Kvaliteter i kunnande

Det finns naturligtvis mycket skrivet om kunnande och förståelse i allmänhet, men vi ska här ge några exempel på modeller som används inom det matematikdidaktiska fältet.

Den kanske mest kända måttstocken för kvaliteter i kunnande är Blooms taxonomi (Bloom, 1956). Den skapades för att ge lärare och provkonstruktörer en möjlighet att sortera uppgifter i hierarkiska kvalitetsnivåer. De sex nivåerna i Blooms taxonomi för kognitiva mål är: Utantillkunskap, Begreppsförståelse, Tillämpning, Analys, Syntes och Värdering. Biggs & Collis (1982) skriver att denna taxonomi har visat sig användbar, men att den också är problematisk. De påpekar att den i första hand är avsedd att användas vid urval av uppgifter till ett prov. Den är svår att använda på ett meningsfullt sätt för bedömning av elevlösningar till uppgifter där eleverna själva ska producera ett svar. Biggs & Collis menar vidare att Blooms nivåer bygger på en *a priori* bedömning gjord av läraren. Den beskriver inte nivåer som uppstår naturligt vid tolkningen av materialet. Trots kritiken bär många beskrivningar av kvaliteter i kunnande ändå spår av Blooms taxonomi.

Sierpinska (1994) skriver att forskare har olika mål när de närmar sig frågan om förståelse i matematik. Vissa mål är mer pragmatiska (att förbättra förståelsen), vissa är mer diagnostiska (att beskriva hur studerande förstår) och vissa är mer explicit teoretiska eller metodiska. Men alla har någon teori om förståelse i bakgrunden, vare sig den uttrycks explicit eller ej. Sierpinska säger vidare att det finns åtminstone fyra typer av sådana teorier eller modeller. För det första har vi teorier som centreras kring en hierarki av förståelsenivåer. Här nämner hon Van Hiele (se nedan), men även andra. För det andra finns det modeller vars huvudidé är en växande ”mental modell”, ”begreppsmodell”, ”kognitiv struktur” eller liknande. Kognitiv struktur är en term hämtad från Piaget och flera författare refererar explicit till honom när de konstruerar sin förståelsemodell. För det tredje nämner Sierpinska modeller som betraktar förståelseprocessen som ett dialektiskt spel mellan två sätt att uppfatta förståelse. Det dialektiska paret kan bildas av ett begrepp betraktat som ett verktyg vid problemlösning och samma begrepp betraktat som ett objekt att studera, analysera och utveckla teoretiskt. Ett välkänt exempel är Skemps uppdelning i instrumentell och relationell förståelse (Skemp, 1978). En instrumentell förståelse innebär att man förstår hur man ska göra för att komma fram till rätt svar. En relationell förståelse innebär både att förstå vad man ska göra och varför. Ett annat exempel i denna kategori är Anna Sfards operationella respektive strukturella förståelse i algebra (Sfard, 1994). Den fjärde typen av förståelsemodell betecknar Sierpinska som det historiskt - empiriska perspektivet. Här fokuseras de hinder för förståelse som återfinns dels i matematikens idéhistoria och dels i dagens studerande.

Robert & Schwarzenberger (1991) menar när det gäller högre matematik att det ur ett psykologiskt perspektiv är meningsfullt att fokusera på äldre studenters ökade förmåga att reflektera över sin egen verksamhet. De framför hypotesen att ett högre matematiskt tänkande inkluderar förmågan att skilja mellan matematisk kunskap och metamatematisk kunskap (t.ex. bedömning av hur korrekt, relevant eller elegant en lösning är). Dessutom menar de att studenter på denna nivå bör ha ett stort mått av matematikkunskaper, erfarenhet av matematiska strategier och fungerande metoder samt kunna kommunicera dem på åtminstone någon basal nivå. Författarna presenterar dock undersökningar som visar att nivån på studenterna i dessa avseenden är mycket ojämn.

I Sverige har Mats Martinsson (personlig kommunikation) presenterat en uppdelning av matematisk förståelse i sju olika kompetenser:

1	**Algoritmisk förståelse**	Kunna utföra enkla räkningar enligt givna recept.
2	**Tolkningsförståelse**	Kunna tolka ett matematiskt begrepp, dvs kunna beskriva det i allmänna ordalag.
3	**Funktionell förståelse**	Kunna använda matematiska begrepp för att lösa problem.
4	**Historisk förståelse**	Förstå vilka problem och vilka förutsättningar som gett upphov till ett matematiskt begrepp och inse vilka svårigheter som måste övervinnas för att begreppet ska accepteras.
5	**Komplementär förståelse**	Kunna ge en precis definition av ett matematiskt begrepp samt kunna ge exempel och motexempel.
6	**Strukturell förståelse**	Kunna ge en strikt logisk framställning av ett matematiskt begrepps egenskaper och dess relationer till andra begrepp.
7	**Didaktisk förståelse**	Kunna undervisa om begreppet.

I svensk forskning om prov i skolan har kategoriseringar gjorts utifrån olika modeller.

Jansson (1975) använder sig av olika taxonomier (bl.a. Wilson, 1971) och undersöker deras egenskaper i relation till konstruktionen av målrelaterade prov i matematik.

Mattson (1989) beskriver hela prov med hjälp av de fyra kategorierna

KUNSKAP	dvs återgivande av inlärda fakta, resonemang, principer m.m.
TILLÄMPNING	dvs problemlösning eller arbetsprov där kunskaper, intränade lösningsstrategier, språkregler m.m. tillämpas.
FÖRSTÅELSE	dvs uppgifter som prövar förståelse av begrepp, principer, argumentation etc. (OBS! Ej återgivning av tidigare presenterade resonemang).
PRODUKTION	dvs främst omfattande referat, uppsatser och dylikt där krav ställs på ”eget” innehåll eller en disposition.

Mattsson påpekar att en och samma uppgift kan ha olika ”kognitiv karaktär” för olika elever beroende på vilka förkunskaper, tidigare erfarenheter etc som dessa har. Ljung (1991) använde samma kategorier vid sin analys av centrala prov. I en annan rapport om centrala prov (Pettersson, 1994) användes tre kategorier. Rutinuppgifter som mäter fakta-färdighet, uppgifter av tillämpningskaraktär och uppgifter som mäter förståelse. Där påpekas att förståelseuppgifterna kan, efter att ha använts och övats, bli rutinuppgifter. För att alla typer av uppgifter ska vara representerade i proven skulle det därför vara viktigt att fortlöpande introducera nya typer av uppgifter.

Det finns även exempel på enstaka skolor som upprättat sina egna taxonomier för bedömning av elevers kunskaper i matematik. Exemplet nedan är hämtat från en skola där lärarna inte var nöjda med kategorierna från Matsson ovan (personlig kommunikation). Vid en studiedag hösten 1994 arbetade de fram följande:

Vår matematiktaxonomi

I	Eleven löser standardproblem där det endast krävs enkel beräkning.
II	Eleven löser standardproblem där det krävs flera, var för sig lätt identifierbara steg.
III	Eleven löser problem som kräver flera steg och där något steg kräver en åtgärd som inte direkt antyds av problemet.
IV	Eleven löser problem som kräver flera steg tagna från olika områden av matematiken.
V	Eleven löser problem som kräver många steg från flera områden av matematiken och där minst ett av stegen innefattar ett kreativt moment.

Lärarna kopplar sin taxonomi till betygssystemet och menar grovt sett att kategori I och II kan kopplas till betyget Godkänd, kategori III till betyget Väl godkänd och kategori IV och V till betyget Mycket väl godkänd.

Som en del i alla de överväganden och diskussioner som följt arbetet med de nationella kursproven har modeller för kvaliteter av kunnande i matematik presenterats. En av dessa är hämtad från Holland och bygger på begreppsparet produktion och reproduktion (Lindström, 1994). Reproduktion innebär ett återgivande av kunskapsområden och färdigheter som eleven mött tidigare. Produktion innebär att eleven ska omsätta sina kunskaper och använda dem i en ny situation. Lindström har även visat att denna modell kan relateras till våra betygskriterier och erbjuda en möjlig struktur till kriterierna.

I Lindström, Nyström & Palm (1996) presenteras en modell för kategorisering av provuppgifter i matematik som kan tjäna som underlag för en diskussion av provets egenskaper men som också är anpassad till behovet vid en systematisk lagring av uppgifterna i en databas för en framtida provbank. Varje uppgift kategoriseras utifrån ett antal olika aspekter. Dessa är kopplade till kursplanens mål, uppgiftens utformning eller format, förväntad svårighetsgrad och relation till betygskriterierna. Två aspekter kan betraktas som ”kognitiva”. Med *Rutin* avses graden av förtrogenhet som eleven kan förväntas ha med gången vid lösandet av en uppgift. Här återfinns tre kategorier, nämligen enstegsrutin, flerstegsrutin och problemlösning. I de uppgifter som kategoriseras som problemlösning förväntas någon form av (icke-rutinmässig) produktion av kunskap ske, dvs eleven tillämpar sina kunskaper på en för honom eller henne ny situation. I bedömningen av *Aktivitet* ingår kategorierna fakta, algoritm, begreppsförståelse, resonemang och modellering. Dessa betraktas som hierarkiska i nämnd ordning. Dessutom ingår kategorin kommunikation i bedömningen av aktivitet trots att den inte kan inordnas i hierarkin. Man reserverar denna kategori för uppgifter där ändamålet är att speciellt pröva färdigheten att producera information med matematiskt innehåll.

Flertalet av ovanstående modeller eller taxonomier är intressanta för bedömning av elevers kunnande i matematik. I detta arbete har jag dock valt att närmare presentera och diskutera tre andra modeller, nämligen kursplaner och betygskriterier för gymnasieskolans kurs A i matematik, SOLO-taxonomin samt van Hieles nivåer. Dessa har valts därför att de har viktiga och intressanta olikheter, men även likheter. De har också en större spridning eller betydelse än de tidigare nämnda modellerna. Betygskriteriernas betydelse är ganska självklar eftersom Sveriges matematiklärare på gymnasiet har försökt tillämpa dem för bedömning och betygssättning av sina elever sedan höstterminen 1994. SOLO-taxonomin har fått viss uppmärksamhet och det finns exempel på att den används på universitetsnivå för bedömning av studenter. Van Hieles nivåer av tänkande är utvecklade för matematik och i synnerhet geometri. De är relativt okända i Sverige, men ganska ofta nämnda i amerikansk litteratur för lärare (se t.ex. Burger & Culpepper, 1993).

Betygssystemet

Från och med höstterminen 1994 har vi i svensk gymnasial utbildning ett ”mål- och kunskapsrelaterat” betygssystem. Här ska eleven bedömas utifrån kriterier för olika betyg. Dessa kriterier bygger på centralt utformade betygskriterier vilka skall tolkas lokalt och formuleras i en lokal arbetsplan. 60-talets idéer om mycket detaljerade kravlistor har idag ersatts av en insikt om att mål och kriterier måste preciseras på en lagom nivå. Genom en förberedande utredning (Läraruppdraget, SOU 1992:59) kom man fram till att en likvärdig bedömning skulle kunna grundas på ganska allmänt och kortfattat formulerade kriterier. Men en viktig aspekt av betygssystemet är att kraven för olika betyg kan göras synliga, och därför måste kriterierna tolkas och exemplifieras lokalt. I bakgrunden ligger föreställningen om kunskap som ett mångtydigt begrepp med kvalitet i en kontinuerlig skala. De betygskriterier som utformats kan anses utgöra nedslag i olika aspekter av kunnande i ett ämne och får exemplifiera hur kunskap på olika nivåer kan visa sig. För att bl.a. öka möjligheterna till likvärdig bedömning på olika skolor så har regering och riksdag beslutat om nationella kursprov i tre ämnen: matematik, svenska och engelska.

Bakgrund och utgångspunkter

Det rådande betygssystemet föregicks av flera utredningar. I 1990 års betygsberedning, som publicerade sitt slutbetänkande i september 1993, så föreslogs ett så kallat kunskapsrelaterat betygssystem med sex betygssteg (SOU 1992:86). Denna progressiva betygsskala avfärdades senare av regeringen som oförenlig med en kursformad gymnasieskola och ersattes med det nuvarande fyrgradiga betygssystemet. Men många av tankarna i betygsberedningens betänkande får anses kvarstå i regeringens proposition till nytt betygssystem som kom 1993. Beredningens direktiv innebar bland annat att det relativa betygssystemet skulle ersättas med ett kunskaps- och målrelaterat betygssystem. I tilläggsdirektiv angavs att beredningen hade till uppgift att analysera hur många steg som behövs i ett kvalitativt inriktat betygssystem. För att pröva möjligheten av att införa ett målrelaterat betygssystem lade beredningen ut ett uppdrag där en grupp lärare skulle lyfta fram centrala strukturer i sina ämnen, skissa kärnstrukturer på olika nivåer och pröva dessa i syfte att utvärdera ett antal tydliga definierbara kvalitativa kunskapsnivåer i sina klasser. Uppdragets inriktning och syfte formulerades:

> *Lärarna bör lägga särskild vikt vid förståelseinriktad undervisning och arbeta utifrån tydliga måldefinitioner med öppna och gripbara kriterier för de kvalitativa nivåer som skulle kunna motsvara betygssteg. Avsikten är att på detta sätt få klarhet i det möjliga antal steg som kan definieras så tydligt i olika ämnen att beredningen, innan förslag till nytt betygssystem läggs, kan utgå från att betygssystemet kommer att fungera. (SOU 1992:86, s 48)*

Arbetet har redovisats i rapporten Läraruppdraget (SOU 1992:59). I betygsberedningens betänkande sammanfattas slutsatserna och betygsberedningen konstaterar att det förefaller möjligt att uppfylla två nödvändiga förutsättningar för att ett kunskapsrelaterat betygssystem ska kunna fungera:

1. Man kan ange och öppet redovisa vad som fordras för ett visst betyg.

2. Man kan avgöra huruvida en elev har uppnått det kunnande och/eller den kompetens som krävs för ett visst betyg.

Beredningen skriver vidare att läraruppdraget visade på vikten av att mål, både centralt och lokalt, formuleras så att de kunskapsstrukturer, samband och sammanhang eleverna förväntas tillgodogöra sig är angivna. Med sådana målformuleringar blir det möjligt att formulera kriterier som speglar elevernas långsiktiga och mer generella utveckling i ämnet. Vidare skriver man att betygskriterierna representerar kontentan av det målen föreskriver med betoning på vilken kunskapskvalitet som gäller för olika betygssteg.

Betygsberedningens betänkande ger inga ledtrådar till en struktur som skulle kunna ligga till grund för formuleringen av betygskriterier, annat än att kvaliteten i det ämneskunnande som avses i kursplanens mål ska framträda. Däremot beskriver man hur processen med framtagning av kriterier ska gå till. Lärare ska ämnesvis formulera sin tysta kunskap om hur elevernas kunskapsutveckling går till. Betygsberedningen anser det viktigt att denna erfarenhet används, inte minst då det är lärarkåren som skall använda betygen. Lärarerfarenheten utgör också en grund för bedömaröverensstämmelsen, och här hänvisas till Läraruppdraget. Det är enligt betygsberedningen och Läraruppdraget möjligt att ange och öppet redovisa vad som fordras för ett visst betyg i ett ämne, på grundval av lärarnas samlade erfarenheter. Det är också möjligt att avgöra huruvida en elev har uppnått det kunnande och/eller den kompetens som krävs för ett visst betyg. Med dessa utgångspunkter verkar arbetet med betygskriterierna ha genomförts.

Betygskriterier

I juli 1994 publicerade Skolverket Betygsboken (Skolverket, 1994). Där skriver man att en svårighet i arbetet med betygskriterier har varit att finna uttryck för olika nivåer eller kvalitet av kunskap. Därför har man studerat hur denna problematik behandlats och lösts i liknande sammanhang, och även tagit del av tidigare publicerat material som rör betygsfrågor, t.ex. Betygsberedningens betänkande och Läraruppdraget. Man har dessutom varit i kontakt med ett flertal pedagogikforskare och andra sakkunniga inom utbildningsområdet, samt hämtat intryck från andra länder. Vidare förklaras några av de nivåuttryck och aktiva verb som används i betygskriterierna i en ”ordlista”. Ett nivåuttryck för resultatet eller prestationen är insikter. Här anges att *eleven har insikter i ämnet, det vill säga har relativt sett jämnare kunskaper inom ämnet*. Med god insikt avses att eleven är relativt jämn i sitt kunnande och har goda kunskaper inom kunskapsområdet. Denna ”förklaring” av begreppet anger att det handlar om en allmän kunskapsnivå i ämnet.

Vid det nya betygssystemets införande föreskrev Skolverket att eleven för att erhålla ett visst betyg ska ha uppnått kunskaper enligt samtliga betygskriterier för detta betyg (SKOLFS 1994:11). I december 1996 ändrar Skolverket sina föreskrifter från 1994. Man skriver

> *för att erhålla ett betyg skall eleven ha uppnått kunskaper enligt samtliga betygskriterier för detta betyg. Om särskilda skäl föreligger med hänsyn till personliga förhållanden hos enskild elev kan dock bortses från enstaka kriterier. Väl utvecklad förmåga avseende något eller några kriterier kan väga upp brister avseende ett eller ett par andra kriterier. (SKOLFS 1996:22)*

Denna ändring gäller från mitten av januari 1997. Nu kan alltså goda prestationer i ett avseende i någon mån uppväga brister på andra områden.

En möjlig tolkning av betygssystemet för den gymnasiala utbildningen är att bedömningen grundar sig på en tvådimensionell kunskapsmatris. Denna fås genom att de kunskapsområden som beskrivs i kursplanens mål att uppnå korsas med betygskriterierna.

	Kriterium		
Mål	1	2	3
A			
B			

Betygssystemet kan tolkas så att eleven ska visa alla tecken på måluppfyllelse som anges i betygskriterierna (Kriterium 1, 2, 3, …), och att eleven bör kunna göra detta för varje kunskapsområde i målbeskrivningen (Mål A, B, C, …). (Observera att detta egentligen kanske innebär att kriterierna i själva verket är mål, om än mål av en annan karaktär än de mål att uppnå som bestäms av kunskapsområdena.) Kunskapsmatrisen kan sägas spegla de två dimensionerna innehåll och kvalitet. En sådan tvådimensionell bedömning av eleven ger upphov till en kunskapsprofil som speglar elevens kunnande. Vid betygssättning måste dock denna profil reduceras till ett betyg. Då kan det vara rimligt med ett visst kompensatoriskt förhållningssätt så att goda omdömen i en del av kunskapsmatrisen kan uppväga sämre omdömen i andra.

I utredningsarbetet ansågs inte ett kursutformat gymnasium, med kurser som byggde på varandra, kunna ha mål att sträva mot. Därför ansågs det nödvändigt att väva in sådana mål i de centralt utarbetade betygskriterierna. Betygskriterierna har därför formuleringar som kan betraktas som mål och inte kriterier. Detta gäller t.ex. kriterier som avser matematikens idéhistoria. Det är svårt att spåra vilka grundläggande strukturer som legat till grund för formuleringen av betygskriterierna. De utgör en blandning av mål och kriterier och saknar en struktur som skulle underlätta tolkningen. Grundskolans betygssystem gavs längre tid att finna en form och där kan också en bättre struktur skönjas. För den skull är det knappast lättare att sätta betyg i grundskolan, men det finns åtminstone bättre möjligheter att förstå tanken bakom bedömning och betygssättning.

Sammanfattning

I det mål- och kunskapsrelaterade betygssystem som tillämpas i gymnasial utbildning så ska eleven bedömas i förhållande till lokala tolkningar av centralt fastställda betygskriterier. Utformningen av betygssystemet har föregåtts av flera utredningar. De centralt fastställda betygskriterierna har formulerats utifrån lärares erfarenheter av bedömning av elevprestationer och i Skolverkets kommentarmaterial påpekas vikten av att de läses tillsammans med kursplanen. Föreskrifterna säger i princip att alla kriterier för ett betyg ska vara uppfyllda för att en elev ska få det betyget. Betygskriterierna utgör en blandning av kriterier och mål och de har ingen överordnad explicit struktur.

SOLO-taxonomin

Bakgrund och utgångspunkter

SOLO-taxonomin (Structure of the Observed Learning Outcome) presenterades 1982 av de australiensiska forskarna John B.Biggs och Kevin F. Collis (Biggs & Collis, 1982). Författarna beskriver hur de några år tidigare påbörjat ett arbete där avsikten var att samla exempel på arbeten av elever som befinner sig i olika stadier av kognitiv utveckling. Syftet var att åstadkomma en katalog där lärare skulle kunna se vad de borde kunna förvänta sig från elever i olika åldrar. Utgångspunkten var Piagets teori om kognitiva utvecklingsstadier vilka kopplas till barnens ålder genom ett ungefärligt åldersintervall inom vilket dessa stadier oftast dominerar. Teoretiker som förordar denna typ av utvecklingsstegar menar enligt Biggs & Collis att:

1 Barnets utveckling sker i en irreversibel sekvens av stadier
2 Stadier och undernivåer är stabila
3 En konsekvens av punkt 2 är att förutsägelser om hur ett barn kommer att utföra en uppgift kan baseras på observationer av hur hon presterar på andra logiskt relaterade uppgifter
4 Det är barnet som karaktäriseras med de olika utvecklingsstadierna

Denna inledande inriktning på Biggs & Collis arbete övergavs därför att de vid sina studier av hundratals elevsvar till olika uppgifter från olika utbildningsnivåer fann att antagandena ovan inte håller. Utvecklingsmässigt mogna elever presterade ofta omogna lösningar men framförallt presterade samma elev i enlighet med ett utvecklingsstadium i ett ämne och enligt ett annat i ett annat ämne, eller uppvisade variation i detta avseende från dag till dag. Tillsammans med vissa teoretiska överväganden kan sådana resonemang t.o.m. innebära att hela idén med utvecklingsstadier ifrågasätts. Biggs & Collis menar att konflikten kan lösas helt enkelt genom att fokus flyttas från elevens generella utvecklingsnivå till kvaliteten hos elevens lösning till en bestämd uppgift. Alltså särskiljer man en individs generella kognitiva struktur, ett helt hypotetiskt begrepp som inte är direkt mätbart (hypothetical cognitive structure, HCS), från strukturen hos individens faktiska gensvar på specifika inlärningsuppgifter (learning tasks). Den senare kallar författarna för *Structure of the Observed Learning Outcome* (SOLO).

I sitt arbete tar Biggs & Collis inte helt avstånd från Piagets utvecklingspsykologi, utan menar att en individs utvecklingsstadium kan (möjligen) ange en övre gräns för hur hon presterar. Många andra faktorer som motivation, förkunskaper osv. kan påverka individen så att hon inte alltid når upp till sin nivå. Författarna påpekar att distinktionen mellan HCS och SOLO är mycket viktig när det gäller förståelsen av relationerna mellan kvalitet i lärande och utvecklingsstadier. Denna distinktion är enligt författarna analog med distinktionen mellan förmåga och prestation. En elevs förmåga (ability), uttryckt i IQ, är relativt stabil över tid och är praktiskt taget oberoende av undervisningsinsatser. Prestation (attainment) avser elevens resultat på ett prov omfattande ett stoff som specifikt har varit utsatt för undervisning och lärande. Förmåga och prestation är oftast starkt korrelerade, därför kan en förmågeskala (t.ex. IQ) användas för att predicera hur väl eleven kan tillägna sig undervisning. Men den faktiska prestationen beror dessutom på andra faktorer: den studerandes avsikter, motivation, lärandestrategier och hur effektiv undervisning man utsatts för. HCS liknar i många avseenden förmåga och SOLO liknar prestation. SOLO-nivåer är detsamma som prestationer på prov genom att de beskriver en speciell prestation vid en speciell tidpunkt. De är inte avsedda som etiketter på elever.

Biggs & Collis säger sig endast betrakta det de kallar för slutna aspekter av lärande, dvs undervisningssituationer där läraren har relativt klara intentioner om vad som ska läras och strukturerar uppgiften kring ett bestämt innehåll - fakta, begrepp, eller färdigheter - som eleverna ska inhämta och sedan tillämpa. Resultatet av sådant lärande kan vara avsett för, och utvärderas efter, två huvudsakliga dimensioner: kvantitet och kvalitet. Båda dimensionerna bestäms i en komplex interaktion mellan lärarberoende och elevberoende faktorer.

I boken om SOLO-taxonomin presenteras tre tidigare försök till kvalitativa måttstockar för lärande, nämligen Bloom (1956), Schroder et al (1967) och Marton (1976). Dessa har olika syften och tillämpningsområden men det finns enligt Biggs & Collis viss överensstämmelse mellan dessa och SOLO-taxonomin:

1 Kvalitativ bedömning av elevers lärande är önskvärt och nödvändigt.
2 Sådana bedömningar kan göras utifrån resultatets strukturella komplexitet.

3 Nivåerna är ordnade med avseende på karakteristika som innefattar progression från konkret till abstrakt, ökande antal av organiserande dimensioner (organizing dimensions), ökande grad av följdriktighet (consistency), och användande av organiserande eller relaterande principer, med användning av hypotetiska eller självgenererade principer i den mest komplexa änden.

Huvudfrågan är: Hur fastställer vi dessa nivåer av strukturell komplexitet? Biggs & Collis menar sig ha en utgångspunkt som avviker från de andra presenterade taxonomiernas perspektiv. De anser att det finns ”naturliga” nivåer i lärande av något komplext material eller färdighet och att dessa nivåer i vissa viktiga avseenden liknar de kognitiva utvecklingsstadier som Piaget beskrev, utan att vara identiska med dessa (se vidare under rubriken Beskrivning av taxonomin).

Beskrivning av taxonomin

Tabell 1 är en sammanfattande beskrivning av SOLO-taxonomin hämtad från Biggs & Collis (1982). Den innehåller namnen för de olika SOLO-nivåerna och de utvecklingsstadier enligt Piaget som kan ange en övre begränsning av SOLO. I tre kolumner redovisas centrala karakteristika hos olika SOLO-nivåer utifrån dimensionerna kapacitet, samband mellan operationer samt konsekvens och avslut. I den sista kolumnen beskrivs hur svarsstrukturen kan representeras i diagramform. Taxonomin innehåller alltså nivåer som är likformiga med, men inte desamma som, Piagets utvecklingsstadier. Dessa nivåer av strukturell komplexitet i elevers lösningar till olika uppgifter definieras av beskrivningar i fyra kategorier:

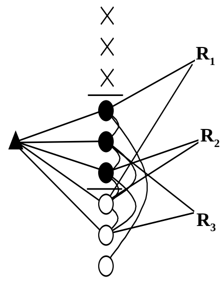
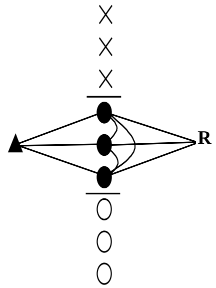
1. Kapacitet

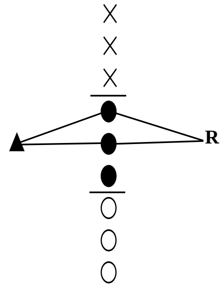
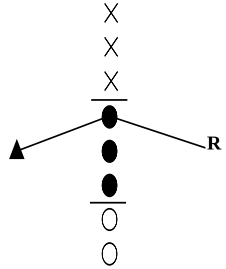
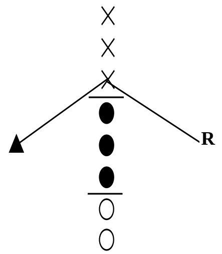
Denna dimension handlar om hur stort arbetsminne som olika SOLO-nivåer kräver. Man måste tänka på fler saker samtidigt för att åstadkomma ett relationellt eller utökat abstrakt svar jämfört med ett unistrukturellt. Denna minneskapacitet ökar med barnens ålder.

2. Sambandsoperationer

Här handlar det om sambanden mellan problemformulering och svar. När det gäller elevsvar på den lägsta nivån anger Biggs & Collis tre typer av prestrukturell förvirring: Förnekelse innebär att eleven vägrar att låta sig engageras av uppgiften (”Jag vet inte!”). Tautologi innebär

Tabell 1 Sammanfattande beskrivning av de olika nivåerna i SOLO-taxonomin och de aspekter som ligger till grund för bedömningen (Biggs & Collis, 1982).
Teckenförklaring: ▲ problemformulering ● relevant och given data ❍ relevant, hypotetisk och inte given data X irrelevant eller olämplig data R svar

Underliggande utvecklingsstadium med minsta ålder	SOLO-nivå	Kapacitet	Operationssamband	Konsekvens och avslut	Svarsstruktur
Formella operationer (16- år)	Utökad abstrakt	Maximal: problemformulering + relevanta data + samband + hypoteser	Deduktion och induktion. Kan generalisera till nya situationer.	Utredning av inkonsekvenser. Inget behov av att ge ”slutna” besked - slutsatser hålls öppna eller begränsade för att öppna för logiskt möjliga alternativ. (R_1, R_2 eller R_3)	
Konkreta generaliseringar (13-15 år)	Relationell	Hög: problemformulering + relevanta data + samband	Induktion. Kan generalisera inom givna eller erfarna sammanhang med hjälp av närliggande aspekter.	Ingen inkonsekvens inom det givna systemet, men eftersom ett enda svar ges kan inkonsekvenser uppstå när eleven går utanför systemet.	

Mellan konkret (10-12 år)	Multistrukturell	Medium: problemformulering + isolerade relevanta data	Kan endast ”generalisera” med några få begränsade och oberoende aspekter	Även om eleven visar en känsla för konsekvens kan inkonsekvenser uppstå eftersom avslut kommer snabbt baserat på isolerad fixering vid data, och därför koan komma till olika slutsatser med samma data	
Tidig konkret (7-9 år)	Unistrukturell	Låg: problemformulering + en relevant data	Kan endast ”generalisera” utifrån en aspekt	Inget behov av konsekvens och därför alltför snabbt avslut. Drar slutsatser utifrån en aspekt och kan därför vara mycket inkonsekvent	
Preoperationell (4-6 år)	Prestrukturell	Minimal: problemformulering och svar är sammanblandade	Vägran, tautologi, transduktion. Bundenhet till specialfall	Inget behov av konsekvens. Avslutar utan att inse problemet.	

bara en omformulering av frågan. Transduktion innebär något av en ”kvalificerad gissning” (guesstimate). Eleven försöker hitta ett relevant svar men misslyckas eftersom hon inte kan forma en adekvat logisk bas för val av lösning. Istället gör hon ett språng på grundval av ett intryck eller en känsla. Svar på högre nivåer analyseras mot bakgrund av begreppen induktion och deduktion. Induktion betyder här att eleven relaterar en viss aspekt eller avgörande punkt i data till en slutsats. Ju fler relevanta delar som används och ju bättre de sammankopplas till en slutsats, desto högre SOLO-nivå. Bara på den högsta nivån kan man förvänta sig någon verklig logisk deduktion.

Några karakteristiska kännetecken på utökat abstrakta lösningar är:

1 Introduktionen av en abstrakt princip som inte ges i problemtexten.
2 Deduktion av olika slutsatser från denna princip och prövning av denna deduktion i förhållande till givna data.
3 Introduktion av analogier som är kompatibla med principen och inte givna i data.
4 Resultatet kan vara obestämt, dvs sakna avslut (se nedan) och istället presentera olika slutsatser som möjliga beroende på olika faktorer.

3. Konsekvens och avslut

Här refereras till två motsatta behov hos eleven. Å ena sidan finns en önskan att komma fram till en slutsats av något slag (ett avslut). Å andra sidan finns en strävan efter konsistenta slutsatser, med minimala motsägelser mellan slutsats och data eller mellan olika möjliga slutsatser. Ju större behov av ett snabbt avslut, desto färre data blir använda och därmed ökar sannolikheten för ett inkonsistent resultat. Men om strävan efter konsistens är hög så säkerställs användningen av mer information och slutsatserna tenderar att bli mer öppna.

4. Struktur

Scheman för att i diagramform beskriva dessa karakteristika är det som kanske är mest känt om SOLO-taxonomin.

Övergångsformer

Ibland kan inte en elevlösning placeras in i någon av de fem beskrivna nivåerna. Lösningen kan visa tecken på en högre nivå, men utan att riktigt nå dit. Dessa övergångsformer kan ibland vara svåra att skilja från lösningar som verkligen hör hemma på den högre nivån.

Användning av taxonomin

Taxonomin är konstruerad för användning i vissa kontrollerade sammanhang, och framförallt av undervisande lärare som kan integrera allt från planering av undervisning till utvärdering. När det gäller summativ utvärdering menar Biggs & Collis att SOLO kan ge viktiga bidrag, men att denna typ av utvärdering alltid innefattar en värderande bedömning och att den inte kan göras av någon som inte känner inlärningssekvensens funktion, de ursprungliga intentionerna samt omständigheterna kring undervisningssituationen. Hur SOLO ska användas för summativ utvärdering är något som den inblandade läraren måste avgöra. Biggs & Collis beskriver användningen av taxonomin i fyra steg: fastställande av lärarens intentioner, val och anpassning av uppgifter, analys av valda uppgifter samt slutligen analys av elevarbeten.

Lärarens intentioner

Den läroplansteoretiska frågan, dvs Varför undervisas det i detta ämne överhuvudtaget?, är enligt Biggs & Collis viktig. De behandlar dock inte denna fråga utan utgår från att det har beslutats om att ett ämne skall undervisas, och att vissa specifierbara resultat (”outcomes”) avses. Då blir situationen i författarnas språkbruk ”sluten”. De resultat som eftersträvas kan vara kvantitativa (hur mycket av materialet ska läras) eller kvalitativa (hur bra ska materialet läras). SOLO taxonomin kan vara användbar när man frågar ”hur bra”.

SOLO-taxonomins upphovsmän menar att läro- och kursplaner (”curriculum”) innehåller både innehålls- och processaspekter även om innehållsaspekterna traditionellt har givits större tyngd i de flesta ämnen. Med innehållsaspekter menar de assimilationen och förståelsen av ämnesinnehållet, fakta och begrepp som utgör kunskap i ämnet. Processaspekten avser de kognitiva processer som induceras av en riktig förståelse och tillämpning av ämnet, färdigheter och strategier som utgör riktiga (lämpliga) sätt att tänka inom ämnet. Resonemanget är relevant här eftersom SOLO-taxonomin erbjuder ett mått på kvaliteten i assimilationen avseende progressiv strukturell komplexitet. En verklig förståelse av ett ämne skulle inkludera den högsta SOLO-nivån inom vissa grundläggande områden. Biggs & Collis menar att detta är ett orealistiskt mål i high school för många elever. Författarna menar att SOLO kan användas som ett viktigt mått på strukturell komplexitet och därmed utgöra ett instrument för att operationalisera läroplansmål (curricular goals).

När undervisning i ett ämne beslutats om och vissa specifierbara resultat fastställts är nästa steg i utbildningsplaneringen att definiera innehållsliga och processinriktade generella koder och att bestämma kunskapsnivåer som är lämpliga för en årskurs. Den primära analysen innebär alltså att centrala innehålls- och processområden väljs ut vilka ska behandlas upp till en given strukturell komplexitet. De uppgifter man vill använda för utvärdering väljs mot den bakgrunden.

Val och anpassning av uppgifter

Uppgifter väljs på grundval av att specifika komponenter i uppgiften har varit utsatta för undervisning och lärande. Frågor och uppgifter anpassas så att relevanta komponenter sannolikt kommer att behandlas.

Biggs & Collis diskuterar några aspekter på prov som de anser viktiga. De påpekar att formuleringen av frågor eller problem har stor betydelse för hur eleven löser uppgiften och för vilken SOLO-nivå de kan visa. Likaså kan elevens kännedom om och erfarenhet av problemtypen vara av största betydelse. Författarna drar parallellen med bilkörning. Även en erfaren bilförare kan uppträda osäkert om hon sätts att köra en för henne obekant bil. Det är först efter en tid av körning med det nya fordonet som förarens verkliga kunnande kommer till sin rätt. När det gäller SOLO så kan alltså en elevs optimala prestation i SOLO-termer bara utvärderas när hon har viss erfarenhet av uppgiftstypen i provet. Uppgiftens karaktär och utformning kan även påverka de nivåer på lösningar som erhålls. Som ett exempel nämner författarna att de funnit att tolkning av tecknade serier är mycket svårare än tolkning av dokumentärt material (brev) som behandlar samma historiska period. Att kunna beräkna 4 +1 betyder inte nödvändigtvis att man kan beräkna 234 + 121. Olika individer fattar tycke för olika typer av aktiviteter och om de är mycket motiverade kommer de att ägna mycket tid och kraft på en sådan uppgift. Det viktiga är hur eleven uppfattar och upplever uppgiften. Biggs & Collis påpekar vidare att tidspress kan sänka nivån i lösningen och hävdar att det är troligt att ökade svarsnivåer (i SOLO-termer) kan åstadkommas helt enkelt genom att tillhandahålla mer tid, så att eleverna inte känner att de måste skynda på. Tidsaspekten är inblandad när det gäller begreppet

”avslut”. Ett snabbt avslut innebär att man väljer endast en eller några få aspekter innan man fattar ett beslut och ger ett svar. Högre nivåer kan inte nås utan ett grundligt beaktande av alla data. Vidare har elevens känslomässiga status och motivation direkt påverkan på de kognitiva funktionerna. Det är viktigt att skilja på stress och motivation. Samma förhållanden kan för vissa elever innebära ett positivt stimulus men helt knäcka andra elever. Lärarens uppgift är att hitta lämpliga nivåer av press för olika elever, dvs de lägen där eleven är motiverad men inte så stressad att prestationen försämras.

Analys av uppgiften

Nästa steg innebär en listning av de komponenter eller dimensioner i uppgiften som möjliggör ett särskiljande mellan de olika SOLO-nivåerna. En komponenttabell kan upprättas vare sig det gäller innehållsliga eller processinriktade komponenter som uppgiften kan pröva. Vid upprättandet av tabellen försöker man avgöra vilka komponenter som kräver tänkande av olika strukturell komplexitet. Vissa komponenter kan om de uppträder var för sig tyda på unistrukturell nivå och tillsammans på multistrukturell nivå. Andra komponenter förutsätter en relationell eller utökad abstrakt nivå. Komponentanalysen är central för användningen av SOLO (*Component analysis is the key to using SOLO*.) En utgångspunkt för denna analys är att man genomför uppgiften själv, och därefter söker de viktigaste komponenterna.

Analys av elevarbeten

Biggs & Collis framhäver betydelsen av att läraren måste veta vad hon ska titta efter när elevlösningarna ska kategoriseras. Det är här inte fråga om någon förutsättningslös granskning av elevernas arbeten, utan elevlösningarna granskas och kategoriseras efter på förhand fastställda kriterier och komponenter.

Sammanfattning

SOLO är en förkortning för Structure of the Observed Learning Outcome och utgör en referensram för bedömning av nivåer av strukturell komplexitet i elevers arbete med uppgifter. Taxonomin är generell för alla ämnen. Till skillnad från Piaget så fokuserar den på den strukturella komplexiteten i en elevs arbete med en viss uppgift och försöker inte ge något generellt omdöme om eleven. Den är endast avsedd att användas i slutna undervisningssituationer där ett visst stoff avses att läras till en viss nivå.

Bedömningen sker utifrån tre aspekter: minneskapacitet, förekomst av sambandsoperationer samt konsekvens och avslut. Med minneskapacitet menas elevens förmåga att tänka på flera saker samtidigt, vilket är en förutsättning för prestationer på högre SOLO-nivåer. Sambandsoperationer avser sambanden mellan problemformulering och svar. Ju fler relevanta delar som används och ju bättre de sammankopplas till en slutsats, desto högre SOLO-nivå. Elever strävar i allmänhet efter konstistenta slutsatser (konsekvens) där alla data används och motsägelserna mellan slutsats och data är minimala. Men eleven vill även snabbt komma till en slutsats av något slag, ett avslut. För de högre SOLO-nivåerna måste eleven kunna vara konsekvent och därmed acceptera flera och mer öppna slutsatser. Alla dessa aspekter kan sammanfattas i diagramform. Analysen förutsätter att en komponentlista tas fram, där alla relevanta komponenter (dvs fakta, lagar, formler osv) finns med.

Van Hieles nivåer av tänkande

Bakgrund och utgångspunkter

De teorier om undervisning, lärande och nivåer av tänkande som Pierre M. van Hiele (1986) utvecklat har sin bas i hans egna lärarerfarenheter. Han arbetade bland annat som lärare i en Montessoriskola under åren 1938 - 1951. Van Hiele skriver själv att ingången till nivåerna av tänkande var helt och hållet empirisk. Han la märke till dem eftersom hans studenters lärandeprocesser körde fast på samma ställen varje år och menar att nivåerna av tänkande korresponderar med platåer i lärandekurvan, platåer med mycket speciell karaktär.

Van Hiele har hämtat mycket inspiration från psykologisk forskning, och inte minst från Gestaltpsykologin. Han skriver att de flesta idéer om struktur som utvecklas i boken är hämtade från denna skola. Piaget är förstås en annan viktig källa. Van Hiele säger sig i grunden vara överens med Piaget, även om han i vissa avseenden är kritisk. Van Hieles nivåer har sitt ursprung i Piagets, men han menar sig ha arbetat med nivåer på ett helt nytt sätt. I boken skriver han att uppnåendet av en nivå är ett resultat av en lärandeprocess. Den kan visserligen försiggå utan ledning så att nivån uppnås genom ett tillfälligheternas lärande (incidental learning), men nivåerna nås inte genom ett biologiskt mognande som läraren inte kan påverka.

Struktur och insikt

Strukturbegreppet är centralt för förståelsen av de nivåer av tänkande som presenteras i den aktuella boken. En definition är enligt författaren endast möjlig om man redan i viss utsträckning känner till det som ska definieras. Om diskussionen av struktur börjar med en definition av begreppet menar van Hiele att risken är stor att läsarens uppfattning om struktur väsentligen kommer att skilja sig från det begrepp som han vill utveckla.

Struktur är enligt van Hiele ett viktigt fenomen. Det möjliggör för människor och djur att handla i situationer som inte är exakt desamma som situationer de har mött förut. Struktur räddar människor och djur från ett oändlig liv av ”trial and error”. Struktur möjliggör för människor att förstå varandra. Olika människor ser samma struktur och de kan uttrycka sin harmoni genom att utöka strukturen på samma sätt.

Van Hiele beskriver två egenskaper hos strukturer:

1. En människa eller ett djur kan agera i nya situationer på grundval av en struktur. Strukturer kan kännas igen på deras rigiditet. Om strukturen är vek är det inte lätt att reagera på ett adekvat sätt, ofta kan man bara säga ”det här är en bra utökning av strukturen och det där är en mindre bra”. Alltså är den viktigaste egenskapen hos en struktur att den kan utökas p.g.a. sin komposition.

2. Strukturer är objektiva. Andra människor ser (hör och luktar) en struktur på samma sätt som vi och kan reagera på en struktur på samma sätt som vi. Här ger van Hiele ett exempel: Om man ber någon att utöka en mosaikstruktur så finns en förväntan. Personen lägger till en bit och jag blir besviken om han gör det på fel sätt. Strukturer har alltså en objektivitet, olika människor utökar strukturen på samma sätt.

Han skriver vidare att språket är ett viktigt medium. För konstruktionen av många strukturer, speciellt när det gäller mänsklighetens gemensamma tänkande, så är språket nödvändigt. Men konstruktionen av visuella strukturer i vårt tänkande behöver ofta inte språket till hjälp. I många fall där språket spelar en roll så hittas inte strukturens utökning genom att en regel tillämpas. T.ex. ett barn som säger gådde istället för gick. I denna fas av förståelse är den vuxnes påverkan mycket liten, och den kan definitivt inte förstärkas med regler. Det finns dock strukturer som bara kan förstås med hjälp av språk T.ex. är strukturerna av molekyler och atomer inte direkt observerbara, och det tar lång tid att lära sig att se dem på ett visuellt sätt. Modeller av atomer och molekyler ger visserligen ett visuellt intryck, men modellerna är väldigt komplicerade.

I gestaltpsykologin återfinns fyra viktiga egenskaper som kännetecknar strukturer:
1. Det är möjligt att utöka en struktur. Den som känner delar av strukturen vet också hur den ska utökas.
2. En struktur kan ses som en del av en finare struktur.
3. En struktur kan ses som en del av en större, mer omfattande struktur.

4. En given struktur kan vara isomorf med en annan struktur.

Om undervisning syftar till utveckling av insikt så borde den stimulera elever att utveckla deras förmåga att känna igen och använda den andra och den tredje egenskapen.

Van Hiele skriver i sin avhandling (van Hiele, 1957): *Insikt existerar när en person agerar på ett adekvat sätt och med avsikt i en ny situation.* Påståendet är inspirerat av tänkande om insikt inom gestaltpsykologin. Han hävdar att denna beskrivning av hur insikt kan kännas igen har visat sig vara framgångsrik. Det är en användbar beskrivning. Van Hiele konstaterar att:

1. Insikt kan observeras när ett adekvat handlande har skett i en ny situation.
2. Insikt kan säkerställas när handlande har skett i kraft av en etablerad struktur från vilken svaren till nya frågor kan härledas.
3. De bästa exemplen på insikt fås oförhappandes, de är inte frukten av planering.

Förekomsten av insikt kan därför endast prövas om det är säkert att den situation som eleven ställs inför är tillräckligt ny. Det finns många frågor som kan ställas för att visa att eleven har otillräcklig insikt i en specifik del av ett ämnesområde. Det är mycket enklare att hitta frågor som fastställer brist på insikt än att hitta sådana som positivt fastställer insikt. I prov så är vanligtvis den enda insikt som visas sådan som provtagaren tidigare erhållit. Man kan bara gissa om det är en reproduktion av resultatet av provtagarens eget tänkande eller andra människors tänkande. Hur adekvat ett sätt att pröva eleven är kan bara bedömas om typen av undervisning som eleven fått är känd.

Nivåer av tänkande

Enligt van Hiele är tänkande endast säkerställt i det ögonblick som det har kommit till uttryck - eller för att tala i mer generella termer - när det har skett en symbolisering. Han citerar sin egen text från 1955 som beskriver hur han först beskrev sin upptäckt om nivåer av tänkande:

> *Man kan säga att någon har nått en högre nivå av tänkande då ett nytt sätt att tänka gör det möjligt att, i anslutning till vissa operationer, tillämpa dessa operationer på nya objekt. Uppnåendet av den nya nivån kan inte påverkas av undervisning, men ändå kan läraren genom ett lämplig val*

> *av övningar skapa en situation som underlättar elevens uppnående av tänkande på en högre nivå.* (van Hiele, 1955, s. 289)

I anslutning till detta citat påpekar van Hiele själv att en påverkan från Piaget kan spåras i och med att övergången till nya nivåer var kopplad till operationer. En ny nivå kunde uppnås genom vissa operationer utfördes. Senare menar han sig ha förstått att ett nytt språk var inblandat. I van Hieles tänkande från 1986 så har språket stor betydelse. Språk är mycket viktigt för tänkandet, och utan språk är tänkandet omöjligt.

Den mest kännetecknande egenskapen hos van Hieles nivåer av tänkande är deras diskontinuitet, dvs avsaknaden av koherens mellan nivåernas olika strukturer. Synonymt med strukturer använder van Hiele uttrycket nätverk av relationer.

Hjärtat i van Hieles begrepp om nivåer av tänkande är att ett objekt inom ett ämnesområde på varje nivå betyder olika saker. Olika ämnesområden (t.ex. geometri och aritmetik) utgör olika kontexter med sina egna symbolbetydelser. Men även varje nivå av tänkande kan betraktas som en egen kontext där samma symboler har olika betydelser. Det ämne eller ämnesområde som studeras definieras av den kontext inom vilken de språkliga symbolerna måste utvecklas. Läraren måste försöka hjälpa eleven med utvecklandet av dessa språkliga symboler och han måste göra detta i precis den kontext som hör till det ämnesområde som ska introduceras, och på den nivå som eleverna befinner sig. I efterföljande faser utvecklar eleven allt rikare språkliga symboler inom den anvisade kontexten. I lärandeprocessens sista fas arbetar eleven med ett antal uppgifter, vilka kan genomföras på olika sätt, för att kunna finna sin väg in i det påvisade fältet och bekanta sig med det från alla håll. På detta sätt kommer signaler att utvecklas. Symbolerna förlorar gradvis sitt visuella innehåll och utvecklas till knutpunkter i det nätverk av relationer som bildats. Om lärandeprocessen kommer så här långt så uppnås nästa nivå av tänkande. Här uttrycker de språkliga symbolerna helt andra saker är de gjorde på den första nivån. De relaterar t ex inte längre till visuella strukturer utan till vissa relationer till andra språkliga symboler. En geometrisk figur kallas rektangel därför att den har räta vinklar och inte därför att eleven direkt känner igen den på dess form. Då har elevens tänkande utvecklats från nivå 1 till nivå 2.

Övergång mellan nivåer

Övergången från en nivå till nästa är inte en naturlig process, den sker under inflytande av ett undervisnings/inlärnings program. Övergången är inte möjlig utan inlärning av ett nytt språk. Människor som befinner sig i den första perioden (dvs innan de nått nivå 2) resonerar korrekt när de förnekar att en kvadrat är en romb. De vägleds av ett visuellt nätverk av relationer, deras intuition visar dem vägen. Inte förrän det typiska nätverket av relationer på den tredje nivån har accepterats så måste kvadraten uppfattas som tillhörande mängden av alla romber. Detta accepterande måste vara frivilligt, det är inte möjligt att tvinga på någon ett nätverk av relationer.

Om en individ i en lärandeprocess har lärt sig förstå en struktur genom direkt kontakt med verkligheten så måste hon lära sig språket för den vilket gör det möjligt att utväxla uppfattningar om den med andra människor. Efter detta synliggörande så blir strukturen explicit, det blir möjligt att tala med andra människor om den. Därigenom kommer möjligheten att beskriva superstrukturer genom reproduktion av länkar mellan de givna strukturerna. Sedan kan man nå en högre nivå av tänkande.

Nivå 1

Van Hiele skriver att nivå 1 (den **visuella** nivån) är en nivå utan något nätverk av relationer. Men han skriver på ett annat ställe att de som ännu inte nått nivå 2 vägleds av ett visuellt nätverk av relationer där deras intuition visar dem vägen. (Därför resonerar de korrekt när de t.ex. förnekar att en kvadrat är en romb.) men människan kan reagera direkt på visuella strukturer och detta kan ske utan hjälp av språket. I basnivån finns visserligen ett språk, men användningen av språket är begränsad till angivande av konfigurationer (former) som har uppfattats genom observation. T.ex. ”detta är en romb”. Enligt gestaltpsykologin kan en klass av begrepp kännas igen på grundval av ett enda signifikant exempel. Språket på den första nivån gör det möjligt att tala om visuella observationer. Detta språk är inte nödvändigt för att reagera på en observation.

Övergången från basnivån till andra nivån (det som van Hiele kallar period 1) är från en nivå utan något nätverk av relationer till en nivå som har ett sådant nätverk. Allt eftersom kommer symboler att bestämma en riktning hos tänkandet i ett ämne. Symboler jämförs och blir slutligen igenkända p.g.a. deras egenskaper. Att eleven blir mindre upptagen med utforskande och börjar uppfatta problem indikerar att hon håller på att lämna den första nivån av tänkande, och att relationerna mellan de ursprungliga objekten för elevens tänkande håller på att bli de nya objekten som studeras. Vid slutet av denna lärandeprocess nås den andra nivån av tänkande. Då har också kontexten ändrats. När geometri-studierna inleddes betraktades figurerna som helheter på grundval av deras globala karaktär. Efter att ha sett figurerna kan ett litet barn särskilja en romb från en kvadrat utan att kunna nämna en enda egenskap hos figurerna. Efter att ha uppnått nivå 2 så betraktar eleven också romben och kvadraten som helheter, men nu som en samling av deras egenskaper och deras relationer till andra figurer, och dessa egenskaper och relationer har kommit från karakteristiska kännetecken för romben och kvadraten. Nu känns figurerna igen på deras egenskaper och därmed har bilden blivit mindre viktig.

Om en individ i en lärandeprocess har lärt sig förstå en struktur genom direkt kontakt med verkligheten så måste hon lära sig språket för den vilket gör det möjligt att utväxla uppfattningar om den med andra människor. Efter detta synliggörande så blir strukturen explicit, det blir möjligt att tala med andra människor om den. Då blir det möjligt att beskriva superstrukturer genom reproduktion av länkar mellan de givna strukturerna. Sedan kan man nå en högre nivå av tänkande. Övergången är inte möjlig utan inlärning av ett nytt språk.

Nivå 2

Det nätverk av relationer som baserar sig på att klä fakta från observationer i ord tillhör tänkandet på nivå 2 (den **deskriptiva** nivån). Meningsskiljaktigheter på basnivån kan följas av en analys som leder till den andra nivån: ”Detta är ingen romb, för de fyra sidorna är inte lika”. På denna nivå handlar t.ex. beräkningar om relationer mellan konkreta tal: $4 \cdot 3 = 12$; $6 + 8 = 14$. Orsaksrelationer, logiska relationer och andra relationer som inkluderas i den observerade strukturen tillhör språket på denna nivå. Diskursivt tänkande och därmed förklaringar använder oftast språk på denna nivå.

Påståendet ”två plus ett är tre” hör hemma på nivå 2. Påståendet kan förklaras med hjälp av visuella strukturer och det säger något generellt om sådana strukturer.

Under lärandeprocessen som leder från nivå 2 till nivå 3 (period 2) så är det ordnandet (*the ordering*) av geometriska figurers egenskaper som är studieobjektet. Genom denna sortering får gamla symboler nytt innehåll och vid slutet av lärandeprocessen så uppfattas figurerna som en ordnad mängd av egenskaper. Men nya symboler föds också under denna period (t.ex. kongruens, likhet, parallellitet, och ”därav följer”). Dessa symboler kan bara förstås efter det att den första periodens kontext har ändrats. De nya symbolerna är typiska för den nya kontexten.

Nivå 3

Resonerande på tredje nivån (den **teoretiska** nivån) behandlar strukturer på den andra nivån. Slutsatser baseras inte längre på förekomsten eller avsaknaden av länkar i nätverket av relationer på den andra nivån, utan på sambandet som antas existera mellan dessa länkar. Den som använder ett dåligt utvecklat nätverk av nivå-2 relationer eller som använder detta nätverk relativt automatiskt kommer att ha dåligt grepp om den inre strukturen av detta nätverk och kommer därför inte att kunna göra bedömningar på nivå 3. Resonemang från ett logiskt deduktivt system tillhör den tredje nivån av tänkande.

På den tredje nivån behandlas generaliseringar av resultat, t.ex. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. I dessa generaliseringar återvänder man inte till de ursprungliga objekten på den andra nivån, de konkreta talen.

Språket på nivå 3 har samma relation till språket på nivå 2 som språket på nivå 2 har till språket på den första nivån. Språket på den teoretiska nivån har en mycket mer abstrakt karaktär än språket på den beskrivande nivån eftersom det handlar om orsaksrelationer, logiska relationer och andra relationer hos en struktur. Dessa relationer används på nivå 2 men är inte synliga där. Resonemang om logiska relationer mellan satser i geometri sker med hjälp av språket på nivå 3. Förståelsen för dessa samband kan inte åstadkommas med hjälp av visuella representationer.

Påståendet ”summan av två heltal är ett heltal” hör hemma på nivå 3. Detta är ett påstående om strukturer i nivå 2. Regeln ”om du vill addera två bråk med olika nämnare så måste du först göra dem liknämniga” handlar inte om visuella strukturer. Eftersom den är ett påstående om icke-visuella strukturer på nivå 2 så hör regeln till nivå 3. Den som inte talar språket på nivå 3 kan visualisera problemet. Då reduceras strukturen på tredje nivån till en struktur på nivå 2. Vi kan påstå att den som måste göra detta inte har förstått någonting av det verkliga problemet.

Högre nivåer

Van Hiele diskuterar även möjligheten av högre nivåer. Han nämner nivå 4 som skulle betecknas formell logik och innehålla studiet av logikens lagar samt nivå 5 vars struktur behandlar de logiska lagarnas natur. Van Hiele skriver att denna klassificering är lämplig för en struktur i matematik och möjligen kan matematiker arbeta med den. Men eftersom syftet med nivåerna av tänkande var att utveckla tänkandet så karaktäriseras nivåerna på ett annat sätt.

Sätten att tänka på basnivån, den andra nivån och den tredje nivån är hierarkiskt ordnade. Kan man tänka sig att det finns högre nivåer än så? Van Hiele menar att det är uppenbart att den tredje nivån i vetenskaper som matematik, fysik, kemi, biologi, historia och lingvistik är konstruerad på olika sätt. Kanske är det just på grundval av denna skillnad som vi talar om olika vetenskaper. Skulle det då inte vara möjligt att konstruera en fjärde nivå av tänkande genom jämförelsen av de olika strukturerna på nivå 3? Skulle inte detta vara filosofins nivå?

Koordinerade strukturer

Att det finns färre nivåer än man ibland tror kan förklaras med koordinerade strukturer. Det innebär att eleven för att förstå ett sammanhang inte behöver strukturer på en högre nivå, utan endast måste inse att den struktur man har omfattar även det nya problemet. Van Hiele exemplifierar med att det är möjligt att bygga upp analytisk geometri på ett traditionellt sätt utgående från koordinaterna för en punkt. Men det är också möjligt att använda vektorer, och genom att göra det så tror vi oss nå en högre nivå eftersom vi då befriar oss från koordinatsystemet och dess begränsningar när det gäller dimensioner i rymden. Men någon högre nivå har inte uppnåtts utan endast en koordinerad struktur. Detta beror på att den traditionella analytiska geometrin kan betraktas som en del av vektorgeometrin.

Nivå-reduktion

En annan omständighet som försvårar möjligheterna att se de verkliga relationerna mellan nivåer är **nivå-reduktion**. Det är möjligt att omvandla strukturer på den teoretiska nivån med hjälp av ett teckensystem (system of signs) genom vilket strukturerna blir synliga. Så ger algebran en transformation av strukturer på den teoretiska nivån i aritmetiken och formell logik ger en transformation av algebrans teoretiska nivå.

Enligt van Hiele är det rätta sättet att åstadkomma en nivå-reduktion att eleverna har sett strukturen hos den tredje nivån, har diskuterat den och själva uttryckt relationerna i strukturen i ord. När de nu kommer till nivå-reduktion genom regelanvändning så har de själva bidragit till reduktionen. Om nödvändigt kan de återvända till den övergivna tredje nivån. Inom exakta ämnesområden kan en reduktion av en handling till en lägre nivå av tänkande vara möjlig eftersom de operationer som måste kontrolleras inom fältet kan särskiljas från kontexten och praktiseras separat. I icke-exakta ämnen åstadkommer en sådan reduktion att verbala strukturer av tänkande utvecklade, ofta är dessa lånade från andra vetenskaper. Då kan inte ämnet utvecklas på rätt sätt.

Van Hiele menar att det är vanligt, men alltid förkastligt, att tala till eleverna om begrepp som hör till en nivå som de ännu inte alls nått. Detta är den viktigaste orsaken till dåliga resultat i matematikundervisningen. Resultatet av sådan undervisning är att eleverna tvingas imitera handlingsstrukturen hos läraren. Därigenom lyckas de vanligen behärska operationerna som hör till nivån. Men eftersom handlingsstrukturen inte är ett resultat av verklig förståelse (dvs inte kommer från en analys av lägre strukturer) så måste den komma från en global handlingsstruktur. Läraren använder inte visuella strukturer vid beräkningar och det gör inte eleven heller. Men läraren har nått sin kunskap om beräkningar genom en omvandling av strukturer på en lägre nivå, medan denna relation inte återfinns hos eleven.

Tolkningar av taxonomin för praktiskt bruk

Även om Pierre M. Van Hiele i sin bok från 1986 bara anger tre nivåer av tänkande som spelar någon praktisk roll i skolan, har andra identifierat fler nivåer. Burger & Culpepper (1993) summerar fem nivåer hämtade från Burger & Shaughnessy (1986), vilka var och en karakteriseras av sitt särskilda språk, sina särskilda symboler och metoder för slutsatser:

Helhetsnivå När studerande i första hand tänker holistiskt så använder de oprecisa egenskaper för att jämföra figurer och identifiera former. Visuella prototyper används för att karakterisera former (”en rektangel är som en dörr”). Irrelevanta attribut, som t.ex. orientering på papperet, inkluderas ofta när former identifieras och beskrivs. Till exempel kan en studerande insistera på att två sidor hos en kvadrat måste vara horisontella, eftersom kvadraten tycks förlora sin kvadratkaraktär när den roteras. Omvänt kan relevanta attribut exkluderas när former identifieras (t.ex. kan böjda sidor i trianglar tillåtas). Dessutom kan studerande som tänker holistiskt vara inkapabla att föreställa sig en oändlig variation avseende typer av former. De fokuserar vanligen inte explicit på egenskaper hos former när de ska identifiera och beskriva dessa former, utan betraktar vanligen varje form som ett helt objekt som representerar en oklart uppfattad klass. Burger & Culpepper hävdar att det finns studier som visar att många studenter i USA tänker holistiskt när de börjar geometristudierna på high school.

Analytisk nivå När studerande tänker analytiskt så fokuserar de explicit på egenskaper hos former. En form blir en samling av dess nödvändiga egenskaper, vilka används för att beskriva, identifiera och karakterisera den. Till exempel kan den studerande istället för ”rektangel” referera till ”en fyrsidig form med enbart räta vinklar” även om termen ”rektangel” är bekant. Dessutom kan klassinneslutningar bland typer av former förkastas explicit till förmån för personliga karakteriseringar. För vissa studerande som tänker analytiskt har t.ex. parallelogram inte räta vinklar, och därför betraktas rektanglar inte som en underklass till parallellogram. Studerande som tänker analytiskt kan betrakta geometri som fysik när de prövar sanningshalten i en utsaga, t.ex. luta sig mot en mängd skisser och göra observationer om dem. På denna nivå kan matematiska bevis bli omöjliga att förstå och föga uppskattade.

Abstrakt nivå Studerande som tänker abstrakt bildar kompletta definitioner som utnyttjas explicit. Definitioner kan modifieras eller användas i ekvivalenta utformningar. Klassinneslutningar bland typer av former förstås sedan och tillämpas. Dessutom används om-då utsagor explicit vid resonemang om former, och studerande kan bilda korrekta deduktiva argument som baseras på naturlig logik. (T.ex. om p implicerar q och q implicerar r, så innebär det att p implicerar r.) På denna nivå kan studerande formulera ”lokal” deduktion i några få steg - t.ex. korta argument om egenskaper hos former som inte explicit relaterar till grunderna för den särskilda geometri som den studerande implicit opererar i. Studerande kan möjligen använda specifika axiom eller satser utan att riktigt förstå den logiska distinktionen mellan dem.

Deduktiv nivå På denna nivå är geometrins matematiska struktur fullständigt uppenbar för den studerande. Bevis betraktas som den slutliga auktoriteten som avgör sanningshalten i en slutsats. Rollerna hos komponenterna i den matematiska diskursen uppfattas korrekt (odefinierade termer, axiom, ett logiskt system, satser, och bevis). De studerande kan alltså föra matematiska resonemang inom ett bestämt matematiskt system, även om de kanske inte är medvetna om att andra axiom skulle ge andra system och därigenom andra satser.

Sträng nivå På denna nivå inser de studerande värdet av undersökningar av olika axiomsystem och logiska system och kan föra resonemang på det mest stränga sättet inom olika system. Denna nivå förekommer normalt endast på universitetsnivå.
I Burger & Culpepper (1993) skriver författarna vidare att det är frestande att använda van Hiele modellen på processer av resonemang hos individuella studerande som ett beskrivande verktyg. Men de menar att vi bör undvika att sätta etiketter på människor med hjälp av nivåerna. Modellen menar man ger en ram för hur aktiviteter i geometri kan sekvenseras med syfte att möjliggöra för de studerande att mer eller mindre omärkligt gå från en nivå till nästa.

Sammanfattning

Boken som denna framställning bygger på (van Hiele, 1986) tycks vara en sammanfattning av en gammal mans hela tänkande om undervisning, tankar som samlats under ett långt liv och en lång karriär. Därför är det naturligtvis extra svårt att sammanfatta dessa tankar på några sidor. Mitt syfte med att försöka tränga in i van Hieles idéer är förstås att försöka hitta en tolkningsram som kan beskriva kvaliteter i elevlösningar till uppgifter utan att känna till elevernas undervisningshistoria. Detta syfte är knappast i enlighet med van Hieles intentioner med sin teori. Men avsikten är att pröva teorins möjligheter även i detta avseende.

Enligt van Hiele ska skolan erbjuda eleven möjligheter att uppfatta strukturer och målet skulle ytterst vara insikt, dvs förmågan att agera på ett adekvat sätt och med avsikt i en ny situation. Detta kan endast ske om eleven har ett grepp om strukturen i det ämnesområde som avhandlas. Van Hiele betonar språkets betydelse för tänkandet och tänkandets utveckling.

Van Hiele understryker att eleverna själva vill lära sig hitta i ämnesområdet, de vill se sig om i tankefältet och börjar därför jämföra symboler för att så småningom kunna orientera sig. Eleven är aktiv och måste själv skapa sina strukturer, att härma någon annan leder inte till insikt. Läraren ska behandla eleverna som värdiga opponenter med förmåga att introducera nya argument. Indoktrinering av en allvetande lärare är enligt van Hiele ett hinder för verkligt lärande.

Van Hiele illustrerar sina nivåer av tänkande utifrån exempel från skolans geometriundervisning. I geometriundervisningen ändras studieobjektet fler än en gång. När eleven första gången möter likbenta trianglar så uppträder de som figurer som igenkänns genom sin tydliga form, inte genom sina egenskaper. Att se och känna igen en likbent triangel kan jämföras med att se och känna igen en ek eller en mus. Denna typ av struktur kännetecknar van Hieles första nivå av tänkande, den visuella. Senare, när eleven uppnått den andra nivån av tänkande (den deskriptiva), så har den visuella formen redan fallit i bakgrunden. Då känns en likbent triangel igen på grund av sina egenskaper (två lika långa sidor eller två lika stora vinklar). Om eleverna är säkra på dessa egenskaper så tvivlar de inte på att en viss triangel är likbent även om figuren är slarvigt ritad, eller om figuren ger upphov till en optisk illusion som förvränger intrycket. På den tredje nivån av tänkande, den teoretiska, så är triangelns egenskaper inte längre det objekt som studeras. Då fokuseras istället sambanden mellan egenskaper. Att två sidor i triangeln är lika implicerar att två vinklar är lika, eller tvärtom. På nivå fyra utgörs studieobjektet av karaktären hos relationer mellan satser. Vad betyder t.ex. ”Om två sidor i en triangel är lika så är två vinklar lika”, eller vad betyder det när man pratar om ”omvändningen till en sats”?

På den första nivån betraktas rymden som den presenterar sig, så här kan vi tala om *spatialt tänkande*. På den andra nivån har vi *geometriskt spatialt tänkande*. På nivå tre återfinns *matematiskt geometriskt tänkande*, på denna nivå undersöks betydelsen av geometriskt tänkande. På nästa nivå studeras *logiskt matematiskt tänkande*. Här är objektet att veta varför geometriska sätt att tänka kan höra till matematiken.

Syfte

Det arbete som redovisas här har utgått från några centrala och viktiga frågeställningar. Den mest grundläggande är frågan om vad som är kvalitet i kunnande och hur dessa kvaliteter kan visa sig i elevers arbete med en uppgift.

Ett kvalitetsmått utgörs av de betygskriterier som ligger till grund för betygssättningen i gymnasieskolan. För att få några andra mått har även två andra perspektiv valts, dels den s.k. SOLO-taxonomin och dels de beskrivningar av nivåer av tänkande som brukar kallas van Hiele-nivåer. Valet av kvalitetsmått ger möjlighet till stor spännvidd i vissa avseenden. Till exempel har van Hiele-nivåerna sitt ursprung och primära tillämpning inom geometri, betygskriterierna är desamma för hela matematiken och SOLO kommer från studiet av elevers arbeten inom många ämnen. Betygskriterierna är ett konglomerat av olika aspekter av kunnande i matematik, utan inbördes ordning eller struktur. SOLO och van Hiele är mycket strukturerade tankebyggen vilka båda har starka kopplingar till Piagets utvecklingsnivåer.

Syftet med denna studie kan sammanfattas i tre punkter

- att försöka tränga in i dessa modeller för bedömning och beskriva och i någon mån diskutera och jämföra modellernas förtjänster och brister, både som teoretiska konstruktioner och i relation till den genomförda tillämpningen,

- att pröva möjligheten att tillämpa modellerna på elevlösningar till två större uppgifter i matematik, och jämföra utfallet av de olika bedömningarna med varandra,

- att studera hur de använda matematikuppgifterna förhåller sig till läro- och kursplaner och även redovisa kvantitativa data och analyser från genomförandet av det nationella kursprovet i Matematik A från våren 1996 där uppgifterna ingick.

Liknande jämförande studier med olika taxonomier har genomförts tidigare, se t.ex. Olive (1991).

METOD

Procedur

Ett urval elevlösningar till två uppgifter som utgjorde breddningsdelen vid det nationella kursprovet i matematik för kurs A från våren 1996 har analyserats mot bakgrund av kursplanens mål att uppnå, en tolkning av betygskriterierna samt SOLO och Van Hiele. Dessutom redovisas analyser av insamlade elevresultat och lärarsynpunkter vid genomförandet av det nationella kursprovet våren 1996.

Urval av elevlösningar

I informationsmaterialet som medföljer de nationella proven får skolorna upplysningar om att elevernas lösningar ska arkiveras. Arkiveringsreglerna tillämpas dock mycket olika i olika kommuner och de eventuellt arkiverade elevlösningarna kan vara svåra att få tag på. Från de nationella kursproven i matematik våren 1996 samlades elevresultat, men inga autentiska elevlösningar, in till provinstitutionen. Därför har denna efterhandsstudie fått lita till möjligheten att hitta gamla prov på skolorna. Detta har visat sig mycket svårt, för att inte säga omöjligt. Ett antal kontakter har tagits med lärare på olika skolor över hela Sverige.

De enda elevlösningar som kunnat anskaffats kommer från en skola i Göteborg. I urvalet ingår 45 elevlösningar till uppgift 1 och 16 elevlösningar till uppgift 2. Bland lösningarna till uppgift 1 återfinns 18 som kommer från en utprövning av en tidigare version av uppgiften.

Beskrivning av uppgifterna

De nationella kursproven i matematik består av två delar: en mer traditionell tidsbunden del, som ska genomföras under gängse provbetingelser, och en breddningsdel. Syftet med breddningsdelen är att bredda underlaget för bedömning och erbjuda möjligheter att pröva nya former för formell utvärdering av elevers kunnande i matematik.

Denna studie tar sin utgångspunkt i breddningsdelen från det nationella kursprovet i Matematik A från våren 1996. I denna provdel fanns två uppgifter, varav eleven skulle välja en att arbeta med i minst 60 minuter under normal lektionstid. Maximal arbetstid för uppgiften samt arbetsformer vid genomförandet beslutades lokalt. I provets tidsbundna del fanns nästan ingen geometri alls. Genom att genomföra breddningsdelen skulle lärarna ändå kunna få en helhetsbild av elevernas kunskaper inom olika kunskapsområden. De två uppgifter som eleverna skulle välja bland utformades med olika ”ansikten” och karaktär. Avsikten var att eleverna själva skulle kunna välja den uppgift där de kunde visa sin nivå av matematikkunskaper.

Dessa uppgifter har valts framförallt därför att de båda behandlar i stort sett samma kunskapsområde, om än på väldigt olika sätt. Dessutom handlar båda om geometri, vilket är lämpligt för att pröva möjligheterna att använda van Hieles nivåer av tänkande.

Uppgift 1: Gården (se bilaga 3 och 4)

Ursprunget till uppgiften var inskickat av en uppgiftskonstruktör som anlitats av provinstitutionen. I arbetet med uppgiftens utformning prövades sedan olika geometriska former på den gårdplan som uppgiften handlar om. Avsikten var att hitta en form som skulle inbjuda eleven att visa olika kunskaper i geometri. Både en oregelbunden fyrhörning (med två räta vinklar) och en parallelltrapets (med de ”sneda” sidorna lika långa) prövades innan den rektangulära gården valdes. De andra formerna gav visserligen rikare lösningsförslag, men uppgiften blev också svårare och framförallt alltför tidskrävande.

Avsikten var att skapa en uppgift av praktisk natur med ett sammanhang som accepteras som trovärdigt av eleverna och motiverar till intressanta lösningsförslag där eleven kan visa upp sina kunskaper i framförallt geometri. Elevlösningarna bedömdes i första hand kunna ge information om G-kunskaper, medan VG-inslaget i första hand skulle ligga på redovisningens kvalitet (se tabell 2).

Systemets och lärarnas begränsningar tillät inte uppmaningar om friare hantering av uppgiften. Lärarna kunde ha uppmanats till att stimulera eleverna att använda andra geometriska figurer än rektanglar för att därigenom kunna visa kunskaper på högre nivåer. Läraren kunde t.ex. ha visat skisser på lösningsförslag med trianglar, cirklar, upphöjda kullar osv. innan eleverna satte igång med arbetet. Eleverna kunde även ha diskuterat i grupp innan var och en satte sig för att göra sin egen lösning. Läraren har naturligtvis även möjlighet att stimulera eleverna under arbetets gång. Elevernas arbeten måste förstås bedömas i relation till lärarens olika insatser.

Tabell 2 Sammanställning över den bedömning av förväntat innehåll och betygsnivå i elevlösningar till uppgift 1: Gården. Kursplanen mål att uppnå och införda beteckningar för olika mål redovisas i bilaga 2.

Mål	Eleven skall	Uppgift 1 (Gården)	
	kunna tillämpa grundläggande geometriska satser	VG?	Kan eventuellt komma in om eleven använder sig av andra figurer än rektanglar
G1	kunna förklara de formler som används i problemlösning		
	kunna förstå de resonemang som används vid problemlösning	G-VG	Olika problemlösningssituationer kräver olika insikt i lösningsstrategier och metoder
	kunna beräkna omkrets och area för plana figurer	G	Att beräkna given area och även kunna ange mått som ger en given area, i första hand rektangulära, men även andra
G2	kunna beräkna begränsningsarea och volym för några enkla kroppar	G	Rätblock
	kunna rita tillhörande figurer	G-VG	ev.
	kunna utnyttja skala för beräkningar	G	ev. Från ritningen beräknas mått som används för t.ex. areaberäkning.
G3	kunna utnyttja skala för att tolka ritningar och kartor		
	kunna utnyttja skala för att konstruera ritningar och kartor	G-VG	Göra ritningen i skala och ange skala
G4	kunna utnyttja begreppen sinus och cosinus för att lösa enklare problem		
R2	ha ökat sin förmåga att välja lämplig enhet vid problemlösning		Val av lämplig enhet samt olika enhetsomvandlingar krävs
R3	kunna välja beräkningsmetod och lämpligt hjälpmedel vid numerisk räkning och vara van vid att kontrollera resultatets rimlighet		Uppgiften kräver en del beräkningar av olika svårighetsgrad och komplexitet. I flera fall kan rimligheten i kostnader, mått, areor m.m. kontrolleras.

Uppgift 2: Koordinatgeometri (se bilaga 5)

Ett första utkast till denna uppgift framkom vid ett referensgruppsmöte där en grupp lärare från hela landet samlats för arbetet med nationella kursprov. Den kom till som komplement till Gården och skulle till skillnad från den vara en mer teoretisk och generell geometriuppgift. Det första förslaget innehöll endast spegling, och detta kompletterades senare av medarbetare på provinstitutionen för att bli en mer omfattande och rik uppgift.

Uppgiften handlar om geometri i koordinatsystem. Den typ av operationer på geometriska objekt som eleven uppmanas utföra (speglingar och sträckningar) är ovanliga i skolan och uppgiftstypen får anses vara okänd för eleven vid uppgiftens genomförande.

Den del av uppgiften som handlar om metod II är inspirerad av en artikel i Mathematics Teacher (Battista & Clements, 1995). I artikeln diskuteras bevis och geometri. Författarna påpekar att bevis i dagligt tal är något som övertygar mig. Men i läroböcker i matematik antyds hela tiden att matematiker endast använder sig av formella bevis, dvs logiska, deduktiva resonemang som baseras på axiom. Men matematiker hittar oftast sanningar genom metoder som är intuitiva eller empiriska. Här finns alltså en skillnad mellan hur ny matematisk kunskap uppstår och hur den presenteras. Det råder ingen tvekan om att den deduktiva ansatsen krävs för att övertyga andra matematiker att det jag säger är sant, men detta är ofta det sista steget i en process som innehåller många undersökande och deduktiva moment. Battista & Clements redogör kortfattat för både Piagets och van Hieles idéer om nivåer av tänkande och summerar med att båda dessa teorier säger att eleven måste passera lägre nivåer före de kan nå de högre och att detta tar relativt lång tid. Slutsatsen blir att explicita studier av axiomatiska system knappast är produktivt för det stora flertalet av eleverna i high school. Men forskning antyder att det finns alternativ till axiomatiska utgångspunkter som kan leda eleven mot ett meningsfullt troliggörande av idéer. Detta kan innebära arbetsformer som bygger på samarbete och diskussion, men det kan även vara datorprogram. Här kommer författarna så småningom fram till att den typ av aktiviteter som ingår i vår uppgift om koordinatsystem kan vara ett utmärkt sätt för eleven att närma sig mer formell geometri. T.ex. kan begreppet likformighet baseras på sträckning och observationer av vad som händer. Detta kan ske för hand, men författarna föredrar att använda ett datorprogram där man kan göra detta. Genom visuella manipulationer och empiriska utforskningar så kan eleverna helt naturligt gå från den intuitiva idén om samma form till en definition av likformighet som baseras på egenskaper. Ironiskt nog, säger Battista & Clements, så skapas den mest effektiva vägen till ett meningsfullt användande av bevis i secondary school genom att formella bevis undviks för större delen av elevernas arbete. Genom att istället fokusera på troliggörandet av idéer då man hjälper elever att bygga de visuella och empiriska grunderna för ett geometriskt tänkande på högre nivå så kan eleverna komma till insikt om nödvändigheten av formella bevis. Först då kan de använda det på ett meningsfullt sätt för att troliggöra idéer.

Detta alternativ till axiomatiska metoder att introducera geometri i allmänhet och geometriska bevis i synnerhet ligger helt i linje med Van Hieles syn på hur undervisning i geometri bör organiseras. Den första nivån är den visuella och den behöver ägnas tillräcklig tid för att eleven ska kunna ta sig vidare till högre nivåer.

I samband med konstruktionen av uppgift 2 gjordes en bedömning av de kursmål och betygsnivåer som eleven borde kunna visa vid arbetet med uppgiften. Denna bedömning redovisas i tabell 3.

Tabell 3 Sammanställning över den bedömning av förväntat innehåll och betygsnivå i elevlösningar till uppgift 2: Koordinatgeometri. Kursplanen mål att uppnå och införda beteckningar för olika mål redovisas i bilaga 2.

Mål	Eleven skall	Uppgift 2 (Koordinatgeometri)	
	kunna tillämpa grundläggande geometriska satser	G-VG	Vid beskrivningen av trianglarna kan Pythagoras sats, vinkelsumman i triangeln och annat komma in. Visande av likformigheten i metod II kräver en del geometriska satser.
G1	kunna förklara de formler som används i problemlösning		
	kunna förstå de resonemang som används vid problemlösning	G-VG	?
	kunna beräkna omkrets och area för plana figurer	G	Egenskaper som omkrets och area är rimliga att ange och beräkna.
G2	kunna beräkna begränsningsarea och volym för några enkla kroppar		
	kunna rita tillhörande figurer	G-VG	Uppgiften kräver att flera trianglar ritas.
	kunna utnyttja skala för beräkningar	VG	Metod II innebär skalning av triangeln. Eleven kan diskutera både längd- och areaskala.
G3	kunna utnyttja skala för att tolka ritningar och kartor	VG	Jämförelsen mellan trianglarna i metod II.
	kunna utnyttja skala för att konstruera ritningar och kartor		
G4	kunna utnyttja begreppen sinus och cosinus för att lösa enklare problem	VG	Kan användas för att beskriva trianglarna.
S1	själv kunna presentera data i diagramform	G-VG	Flera koordinatsystem med linjer och figurer ska ritas.
F1	kunna rita enkla grafer (som beskriver vardagliga förlopp)	G-VG	Flera koordinatsystem med linjer och figurer ska ritas.
F3	kunna grafiskt åskådliggöra…	G-VG	Flera koordinatsystem med linjer och figurer ska ritas.

RESULTAT

Resultat vid genomförandet

Vid genomförandet av provet våren 1996 insamlades resultat från ett stort antal elever och lärarsynpunkter från alla deltagande lärare. Resultat och kommentarer avseende kursproven våren 1996 har redovisats i Lindström, Nyström & Palm (1996). Där återfinns även en diskussion om urvalets sammansättning och problemen med bortfall. Dessa frågor är viktiga om man vill generalisera resultatet till att gälla alla Sveriges gymnasie- och komvuxelever. Vi kan här nöja oss med att diskutera och jämföra utfallet bland de elever vars resultat rapporterats. Av de 22 252 elevresultat som ligger till grund för analysen så har 90 % genomfört provets tidsbundna del och 42 % har gjort breddningsdelen. I materialet finns resultat från 8893 elever där provbetyg redovisats för både tidsbunden del och breddningsdel. Korrelationen mellan de olika betygen framgår av tabell 4 nedan.

Tabell 4 Betyg på breddningsdelen för elever med olika betyg på tidsbunden del i nationella kursprovet i matematik A våren 1996.

		Betyg på breddningsdel				
		IG	G	VG	MVG	Total
Betyg på tidsbunden del	IG	1348	762	36	0	2146 (24 %)
	G	956	3138	806	11	4911 (55 %)
	VG	58	601	825	38	1522 (17 %)
	MVG	5	39	208	62	314 (4 %)
	Total	2367 (27%)	4540 (51%)	1875 (21%)	111 (1%)	8893

Bland eleverna har uppgift 1: GÅRDEN varit den klart populäraste. Mer än fyra gånger så många elever har valt denna uppgift jämfört med uppgift 2. Elever på olika program uppvisade skillnader i valet av uppgift. Bland de elever som har genomfört breddningsdelen varierar andelen som valt uppgift 1 från ca 75 % (Omvårdnads- och Estetiska programmet samt Komvux) till 90 % (Bygg- och Energiprogrammet).

Här kan dock inga mönster skönjas som skulle kunna förklara skillnaderna. Som framgår av tabell 5 och 6 nedan så uppvisade de inskickade elevresultaten skillnader när det gäller val av breddningsuppgift för kvinnor och män och för olika betyg på tidsbunden del. Bland manliga provtagare ökade andelen elever som valt uppgift 2 med matematisk förmåga (mätt i provbetyg på tidsbunden del). För kvinnorna i urvalet gällde motsatsen.

Tabell 5 Vald breddningsuppgift för manliga elever med olika provbetyg på tidsbunden del i det natio-nella kursprovet i matematik A våren 1996.

		Andel som valt breddnings-uppgift		Antal elever
		1	2	
Betyg på tids-bunden del	IG	86 %	14 %	1057
	G	84 %	16 %	2430
	VG	81 %	19 %	779
	MVG	71 %	29 %	179
	Totalt	83 %	17 %	4445

Tabell 6 Vald breddningsuppgift för kvinnliga elever med olika provbetyg på tidsbunden del i det nationella kursprovet i matematik A våren 1996.

		Andel som valt breddnings-uppgift		Antal elever
		1	2	
Betyg på tids-bunden del	IG	79 %	21 %	1042
	G	79 %	21 %	2390
	VG	81 %	19 %	703
	MVG	87 %	13 %	123
	Totalt	80 %	20 %	4258

I Lindström, Nyström & Palm (1996) redovisas även lärarsynpunkter på provet. Av lärarenkäten framgår att eleverna i huvudsak arbetat enskilt med breddningsuppgifterna. Men det finns lärare som låtit eleverna först diskutera den uppgift de valt i grupp för att sedan lämna in individuella redovisningar. Cirka en fjärdedel av lärarna uppger att de använt 60 minuter för att genomföra breddningsdelen, ungefär 40 % använde 80 minuter och övriga använde längre tid, upp till 120 minuter. När det gäller i vad mån lärarna väger in resultatet på breddningsdelen när de ska sätta kursbetyg så tyder lärarsvaren på att breddningsdelen naturligtvis kommer att utgöra en del av underlaget vid betygssättning. Men lärarnas svar visar också att 40 % av de lärare som genomfört breddningsdelen (och svarat på enkäten) så kommer bedömningen som grundar sig på denna provdel inte alls eller i mycket liten utsträckning att vägas in då kursbetygen ska sättas.

Nedan ges några axplock från lärarnas kommentarer till breddningsdelen i det aktuella provet.

- *Breddningsdelen ger framförallt underlag för att höja betyget.*

- *Breddningsdelen innehåller trevliga och meningsfulla uppgifter. Det är dock svårt att använda dem för betygssättning i ett nationellt prov.*

- *Jag tycker det är bortkastad tid med breddningsuppgifter.*

- *De flesta eleverna uttryckte ett positivt omdöme av breddningsdelen.*

- *Efter analys av provresultatet är det uppenbart att breddningsdelen lockar fram ”nya förmögenheter” inte minst av planerings-, presentations- och layout-karaktär. Den holistiska bedömningen är väl ägnad att identifiera det undermåliga och det excellenta men har svårigheter att rangordna de mediokra; alltså ett gott underlag för IG och MVG.*

Analys i förhållande till läro- och kursplan

Karakterisering av uppgifterna i förhållande till läroplanen och matematikämnets syfte och karaktär.

I de häften med information till lärare som åtföljer kursproven framhävs de olika styrdokumentens roll vid utveckling och konstruktion av nationella kursprov (Skolverket, 1996). Kursproven utformas med utgångspunkt i mål och riktlinjer som de beskrivs i läroplan, programmål och kursplan samt de centralt fastställda betygskriterierna.

I förordet till den gällande läroplanen för de frivilliga skolformerna (Utbildningsdepartementet, 1994) anges att läroplanen skall styra skolan och innehåller bindande föreskrifter för dess verksamhet. I läroplanen formuleras skolans värdegrund och uppgifter samt mål och riktlinjer för verksamheten. Under Skolans huvuduppgifter anges att utbildningen skall främja elevernas utveckling till ansvarskännande människor, som aktivt deltar i och utvecklar yrkes- och samhällslivet. All verksamhet i skolan skall bidra till elevernas allsidiga utveckling. Skolan skall utveckla elevernas kommunikativa och sociala kompetens. Läroplanen lyfter också fram några viktiga perspektiv som skall behandlas i undervisningen: etiska perspektiv, miljöperspektiv, internationellt perspektiv och historiskt perspektiv. Eftersom dessa formuleringar gäller hela skolans verksamhet så måste de även omfatta nationella kursprov i matematik. Det är naturligtvis många gånger svårt att väva in sådana ambitiösa målsättningar i ämnet matematik och i prov. Men läroplanen gör inget undantag för matematik och även matematikämnet måste sträva i denna riktning. De uppgifter som analyseras i denna studie kan endast i mycket begränsad utsträckning sägas leva upp till läroplanens formuleringar. Här finns i alla fall ett inslag av kommunikativ kompetens som betonas.

I läroplanens ”Mål att sträva mot” finns formuleringar som är särskilt aktuella för matematikämnet. Där sägs att strävan skall vara att eleven skall kunna använda sina kunskaper som redskap för att formulera och pröva antaganden och lösa problem, reflektera över erfarenheter, kritiskt granska och värdera påståenden och förhållanden och lösa praktiska problem och arbetsuppgifter. Dessutom strävar skolan mot att varje elev utvecklar förmågan att arbeta såväl självständigt som tillsammans med andra. Vidare sägs att strävan skall vara att varje elev ökar sin förmåga att självständigt formulera ståndpunkter grundade på såväl empirisk kunskap och kritisk analys som förnuftsmässiga och etiska överväganden och kan använda kunskaper som redskap för att formulera och pröva hypoteser och lösa problem. Ett ”Mål att uppnå” är att varje elev som har slutfört sin gymnasiala utbildning skall kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för yrkes- och vardagsliv.

Endast ett fåtal av programmålen berör något specifikt matematiskt kunskapsmål. I olika program anges t ex att skolan har ansvar för att eleverna efter fullföljd utbildning kan utföra de beräkningar som krävs, kan tillämpa kvantitativa och kvalitativa modeller för att beskriva, analysera och påvisa företeelser och samband eller att de kan utveckla sin förmåga att utnyttja matematiska modeller och inse deras möjligheter och begränsningar.

I kursplanen anges olika syften för ämnet matematik som att ge elever tilltro till det egna tänkandet och utveckla elevernas nyfikenhet. Strävan skall vara att eleverna skall få uppleva tillfredsställelsen i att behärska matematiska begrepp och metoder, upptäcka mönster och samband, lösa problem samt lära sig använda och inse värdet av matematikens symboler och uttryckssätt. Som syften med matematikundervisningen anges också att eleven lär sig förstå och föra matematiska resonemang, skapa och använda matematiska modeller och kritiskt granska deras förutsättningar, möjligheter och begränsningar, lösa problem samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt. I kursplanen (SKOLFS 94:9) anges övergripande mål med kurs A i matematik:

Målet för kursen är att ge de matematiska kunskaper som krävs för att ta ställning i vardagliga situationer i privatliv och samhälle. Dessutom skall kursen ge en grund som svarar mot de krav yrkesliv och fortsatta studier ställer. (s. 10)

Många av dessa mål kan mötas med uppgifterna i breddningsdelen. De har ett reflekterande och värderande inslag. Uppgift 1 simulerar ett problem av praktisk natur och eleven skulle kunna möta motsvarande problem i såväl yrkes- som vardagsliv. Uppgift 2 är av undersökande karaktär och öppnar för nyfikenhet, mönster och samband. Ofta anses att dessa uppgifter måste lösas individuellt för att kunna ligga till grund för individuell bedömning. Men typen av uppgifter lämpar sig väl för arbete i grupp och skulle kunna bidra till strävan att eleverna utvecklar förmågan att arbeta såväl självständigt som tillsammans med andra. Det finns lärare som låtit eleverna först diskutera den uppgift de valt i grupp för att sedan lämna in individuella redovisningar. På detta sätt kan läroplanens intentioner uppfyllas även i bedömningssituationer i matematik.

Karakterisering av uppgifterna i förhållande till mål att uppnå.

En idé med dessa uppgifter var att de i huvudsak skulle kunna beröra samma uppnåendemål i kursplanen, men på olika sätt. I tabell 7 återfinns en kategorisering av de båda uppgifterna i förhållande till en relativt detaljerad uppdelning av kursplanens mål. Kryssen anger vilka mål som bedömdes kunna bli speglade av elevernas lösningar till de båda uppgifterna. De kryss som anges inom parentes visar på mål som möjligen, men knappast troligen, kommer att beröras i elevernas lösningar. För förklaring av de olika beteckningarna områdena i kursplanen hänvisas till bilaga 2.

Analys av elevlösningar

Elevlösningarna i urvalet har analyserats mot bakgrund av de kursplanemål som återfinns i tabell 7 nedan. Elevlösningarna har visat på kunskaper inom vissa områden, brist på kunskaper inom vissa (genom felaktiga svar och metoder) och inte givit någon information alls på andra. Dessutom har analysen visat vilka figurer, kroppar, satser osv. som uppgiften ger eleven anledning att behandla.

När det gäller uppgift 1 så finns det några delområden som i stort sett alla elever har visat kunskaper (eller brist på kunskaper) inom. Det gäller elevers kunnande om beräkning av *omkrets och area för plana figurer*, beräkning *av begränsningsarea och volym för några enkla kroppar* och utnyttjandet av *skala för att konstruera ritningar och kartor*. Dessutom måste eleverna *rita tillhörande figurer*. Elevlösningarna innehåller ganska mycket beräkningar, så elevernas aritmetiska förmågor bör kunna bedömas i ganska hög grad. Detta gäller bl.a. *elevernas förmåga att välja lämplig enhet vid problemlösning* och vanan vid att *kontrollera resultatets rimlighet*.

Tabell 7 Sammanställning över hur breddningsuppgifterna i det nationella provet för kurs A våren 1996 bedömdes förhålla sig till kursplanens mål att uppnå.

Område	Eleven skall	Uppgift 1	Uppgift 2
G1	kunna tillämpa grundläggande geometriska satser	(x)	x
	kunna förklara de formler som används i problemlösning		
	kunna förstå de resonemang som används vid problemlösning	x	(x)
G2	kunna beräkna omkrets och area för plana figurer	x	x
	kunna beräkna begränsningsarea och volym för några enkla kroppar	x	
	kunna rita tillhörande figurer	x	x
G3	kunna utnyttja skala för beräkningar	(x)	x
	kunna utnyttja skala för att tolka ritningar och kartor		x
	kunna utnyttja skala för att konstruera ritningar och kartor	x	
G4	kunna utnyttja begreppen sinus och cosinus för att lösa enklare problem		x
R2	ha ökat sin förmåga att välja lämplig enhet vid problemlösning	x	
R3	kunna välja beräkningsmetod och lämpligt hjälpmedel vid numerisk räkning och vara van vid att kontrollera resultatets rimlighet	x	
S1	själv kunna presentera data i diagramform		x
F1	kunna rita enkla grafer (som beskriver vardagliga förlopp)		x
F3	kunna grafiskt åskådliggöra…		x

De två varianter av uppgifter som ingår i urvalet visar dock stora skillnader när det gäller vilken typ av figurer eller kroppar som eleven arbetar med. När det gäller den rektangulära gården så ger den i stort sett bara upphov till arbete med rektanglar och rätblock. Den parallelltrapetsformade gården ger en större variation i elevernas arbete. Eleverna räknar på parallelltrapets och triangel förutom rektangel och raka prismor. De gör t.o.m. cirklar och räknar på cylindrar och visar prov på användning av pythagoras sats. Denna skillnad mellan de båda varianterna av uppgift 1 kan delvis förklaras utifrån den inbyggda geometrin. För att arbeta med den parallelltrapetsformade gården måste naturligtvis andra former bearbetas. Men skillnaden kan även förklaras med att denna variant genomfördes i en annan klass under ledning av en annan lärare. Klassen var en naturvetarklass där eleverna ofta har relativt goda matematikkunskaper och höga tankar om sin förmåga. Dessutom kan förekomsten av cirklar bero på uppmuntran från läraren att visa så mycket matematik eleven kunde.

De områden som återfinns i de granskade elevlösningarna överensstämmer ganska väl med det förväntade. Möjligen saknas prov på förståelse för de resonemang som används vid problemlösning. Men de geometriska kunskaper som visas handlar i mycket hög grad om de enklaste figurerna och kropparna. I kursplanemålen talas det om figurer och enkla kroppar. Men till enkla kroppar torde räknas även t.ex. cylindern, så de prov på elevernas kunskap som framkommer vid arbete med uppgift 1 blir ganska torftigt.

När det gäller uppgift 2 är bilden mer splittrad. Alla elevlösningarna ger prov på förmågan att rita koordinatsystem och pricka in punkter, samt rita tillhörande figurer. Knappt hälften av eleverna visar att de kan beräkna arean hos en triangel. Mindre än en tredjedel tillämpar grundläggande geometriska satser (pythagoras sats), visar att de förstår de resonemang som används vid problemlösning, utnyttjar skala för att tolka ritningar och kartor (areaskala) och utnyttjar begreppen sinus och cosinus för att lösa enklare problem. Det sista är inte riktigt sant eftersom tre av de fem elever som använder trigonometri för att beräkna triangelns vinklar istället använder sig av tangens.

Elevlösningarna från en knapp tredjedel av eleverna visar prov på alla de delområden som uppgift 2 bedömdes kunna spegla. De figurer som behandlas är naturligtvis bara trianglar. Hos alltför många elever har uppgiften inte inspirerat till att visa kunskap på alla möjliga delområden.

Analys i förhållande till betygskriterier

Tolkning som används i analysen

Analysen av elevlösningar i förhållande till betygskriterierna underlättas av skapandet av någon sorts struktur. I kursplanens inledande text (SKOLFS 94:9) anges under rubriken Karaktär och struktur:

Problemlösning, användning av matematiska modeller, kommunikation och matematikens idéhistoria är fyra viktiga aspekter av ämnet matematik som skall belysas i undervisningen. (s. 9)

Dessa fyra punkter skulle även kunna ligga till grund för en strukturering av betygskriterierna i olika aspekter som bör ligga till grund för bedömning. Men användning av matematiska modeller är svårdefinierat och modeller omnämns specifikt bland kriterierna för VG vilket gör modellering svårt att använda. Motsvarande gäller för matematikens idéhistoria. Med problemlösning avses här bearbetning av alla matematiska frågeställningar, även enkla beräkningar, och elevens prestation i detta avseende kan vara en aspekt att bedöma. Vissa betygskriterier kan uppenbart inordnas under kommunikation. Betygskriterierna talar dessutom om olika situationer i vilka kunskaper på de olika betygsnivåerna visar sig. Ett kriterium på Godkända kunskaper är att man kan lösa uppgifter i vilka problemformuleringen är klart definierad, av en typ som man mött tidigare och behandlar enkla och vanliga problemställningar. Skolverket har publicerat exempel på hur betygskriterierna kan tolkas i Betygsboken 2 (Skolverket, 1995). När det gäller typen av problem (dvs uppgifter) som kan hänföras till betyget Godkänt så sägs att eleven löser standardproblem där det endast krävs en enkel beräkning eller där det krävs flera var för sig lätt identifierbara steg. Eleven löser problem med ett fåtal tankeled som hon känner igen från läroboken och har svårigheter med problem som anknyter till flera stoffområden eller uppgifter av abstrakt art. För betyget Väl Godkänd sägs att eleven löser problem som kräver flera steg, där något steg kräver en åtgärd som inte direkt framgår av problemet. Eleven ska vidare inse vad som är relevant i en uppgift och löser problem med flera tankeled, både sådana som hon känner igen och inte känner igen från läroboken. Eleven löser även problem med anknytning till flera stoffområden.

Dessa texter ger vissa indikationer om hur kriterierna kan tolkas, även om inte Skolverket kan anses ha tolkningsföreträde.

Problemlösning kan dessutom delas upp i generella kompetenser, som beräkningar och användning av tekniska hjälpmedel, och kompetenser som hör specifikt till ett visst kunskapsområde.

Mot bakgrund av ovanstående resonemang har betygskriteriernas innehåll strukturerats utifrån fyra aspekter enligt tabell 8. Denna strukturering har använts för att bedöma elevlösningarna i förhållande till betygskriterierna. Följaktligen ger denna modell upphov till fyra olika betyg. Dessa kan ses som en betygsprofil, men de kan även sammanföras till ett provbetyg. Den använda tolkningen av betygskriterierna är endast en av många möjliga, och sammanvägningen av de olika aspekterna kan göras på ett antal olika sätt. För ett visst sammanfattande provbetyg har jag här valt att kräva att eleven presterar över den lägsta nivån i alla fyra aspekterna.

Analys av elevlösningar

Uppgift 1 erbjuder en situation som endast kan anses motsvara beskrivningen av kriterier för betyget Godkänd. Däremot får den elev som genomför hela uppgift 2 anses ha mött situationer som är nya och annorlunda och därmed anknyter till betygskriterier för VG.

Relativt få elevlösningar har bedömts uppfylla kriterierna för Väl godkänd. Detta gäller i synnerhet uppgift 1. Uppgiftens karaktär och innehåll kommer att spela stor roll för vilka möjligheter som finns att visa olika aspekter av kunnande och olika tecken på att man nått en kunskapsnivå som motsvarar ett visst betyg. Uppgift 2 har t.ex. inte mycket inslag av generell metod, dvs sådant som nödvändiga beräkningar, tekniska hjälpmedel osv. Ingen av uppgifterna förutsätter kombination av olika matematiska modeller och metoder.

Sammanställning av resultatet av bedömningen redovisas i bilaga 1. I vissa fall är det omöjligt att av elevens redovisade arbete bedöma en eller flera av de fyra aspekterna. Detta redovisas med frågetecken i tabellen. Vid sammanvägningen måste då en värdering av elevens lösning göras ur ett helhetsperspektiv.

Tabell 8 Strukturering av betygskriteriernas innehåll som använts för beömning av elevlösningarna.

	Resultat/prestation	**Situation**	**Metod (generellt)**	**Kommunikation**
G	Eleven har insikter i begrepp (t.ex. likformighet), lagar (t.ex. geometriska satser) och metoder (t.ex. beräkning av area och användning av skala) som ingår i kursen Eleven löser uppgifter Eleven känner till och använder några olika bearbetningsstrategier.	Eleven löser uppgifter i vilka problemformuleringen är klart definierad, av en typ som hon mött tidigare, och behandlar enkla och vanliga problemställningar.	Eleven utför nödvändiga beräkningar, använder i relevanta sammanhang tekniska hjälpmedel och har viss förmåga att värdera resultatet.	Eleven kan göra en skriftlig redovisning av sin problembearbetning där tankegången kan följas. Eleven kan rita tydliga figurer, diagram eller koordinatsystem
VG	Eleven har goda insikter i begrepp, lagar och metoder som ingår i kursen. Eleven har insikt i matematikens idéhistoria. Eleven kan föreslå, diskutera och värdera olika bearbetningsstrategier.	Eleven kan behandla problemställningar av olika svårighetsgrad och art, och situationerna är såväl kända som nya.	Eleven använder och kombinerar olika matematiska modeller och metoder.	Eleven kan göra en skriftlig redovisning av sin problembearbetning där tankegången är klar. Eleven kan rita tydliga och korrekta figurer, diagram eller koordinatsystem

Sammanfattning och reflektion

I Betygsboken betonas vikten av att betygskriterierna läses tillsammans med kursplanen. Här har kursplanens inledande text om matematikämnets karaktär och struktur legat till grund för en tolkning och strukturering av betygskriterierna. En aspekt som bedömts är den skriftliga kommunikationen. En annan är problemlösningssituationen. Förmågan att arbeta i en obekant situation är ett kriterium för Väl godkänd. Vidare bedöms dels allmän kompetens som behövs vid problemlösning, och dels kunskaper som kan knytas till ett visst kunskapsområde, i detta fall geometri. Allt detta ger tillsammans en inriktning hos bedömningen som ger fyra provbetyg vilka kan sammanvägas till ett enda sammanfattande provbetyg. Här tillämpas en sammanvägningsprincip som i princip innebär att den aspekt där eleven gör sin svagaste prestation kommer att bestämma provbetyget. Denna regel har dock inte tillämpats konsekvent utan helhetsbedömningar av elevens prestationer har ibland legat till grund för det sammanfattande betyget. Vid bedömningen har elevlösningar på alla betygssteg identifierats. Förhållandevis få lösningar får högre betyg än Godkänd. Många får sammanfattningsbetyget Icke godkänd beroende på bedömningar avseende kommunikation och resultat/prestation.

Användningen av betygskriterierna underlättas om en struktur skapas som gör bedömningen mer analytisk. En sådan strukturering kan naturligtvis göras på många sätt, och den form som används här är ett exempel. Trots denna strukturering var analysen i förhållande till kriterierna inte lätt att genomföra. Möjligen skulle man behöva en tolkning av kriterierna som är mer detaljerad och mer specialiserad för just de uppgifter som ska bedömas.

Analys i förhållande till SOLO

SOLO-taxonomin har ett intentionsområde som omfattar vad Biggs & Collis kallar ”slutna” undervisningssituationer. De nivåer av strukturell komplexitet som SOLO beskriver har utkristalliserat sig genom studiet av många elevers lösningar på problem i sekvenser av ”reception learning”. Biggs & Collis avser här dels att läraren har vissa klara intentioner angående mängd och kvalitet hos det lärande som ska ske, och dels att det finns något definitivt att lära ”out there”, dvs att innehåll kan definieras och analyseras i sina beståndsdelar av innehållsliga eller processinriktade färdigheter. Mot bakgrund av att SOLO egentligen bara beskriver elevers prestationer i relation till slutna inlärningssituationer, att Biggs & Collis betonar vikten av att undervisningshistorien är känd då SOLO används och att problemtypen som används är känd av eleven så kan man fråga sig om SOLO överhuvudtaget är användbar i vårt sammanhang.

Ett syfte med denna studie är att pröva om SOLO-taxonomins tillämpningsområde kan vidgas till att gälla även bedömning av elevers lösningar till uppgifter, trots att undervisningshistorien inte är känd och att undervisningssituationen trots gemensamma kursplaner och betygskriterier knappast kan betraktas som sluten.

De tre aspekter som SOLO-nivåer grundar sig på kan användas i samband med elevers lösningar till de breddningsuppgifter som analyseras. Uppgifterna är ganska komplexa och eleven får möjlighet att visa prov på minneskapacitet genom att hålla kontroll på flera saker genom lösningen. Vid arbetet med Gården måste syftet med hela uppgiften hållas i minnet så att eleven avslutar med att besvara den grundläggande frågan. I båda uppgifterna finns många skäl att utnyttja samband och sambandsoperationer. En mängd fakta och mer eller mindre uppenbara operationer gör det ganska lätt att vara konsekvent, men flera elevlösningar visar prov på svårigheter att utnyttja all information. I dessa kommer eleverna alltför snabbt till ett avslut, utan att ha prövat alla alternativ. En styrka med SOLO är möjligheten att sammanfatta denna komplexa bild i ganska överskådliga diagram. Sådana diagram har ritats för flertalet av elevlösningarna i urvalet.

Gården

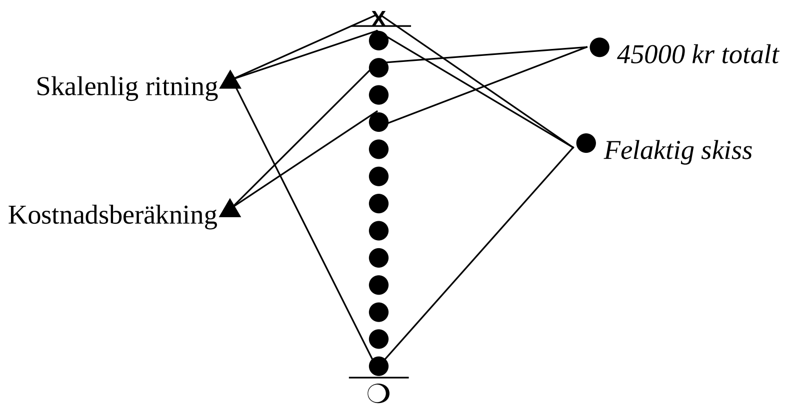
De diagram som ritats för elevernas arbeten med uppgiften blir ofta mycket komplexa. Detta gäller i lika hög grad för de båda varianterna av uppgiften som studerats. Uppgiften är ju öppen i den meningen att eleven själv skapar delar av förutsättningarna för lösningen genom att rita ett förslag. Det betyder att de processkomponenter som behövs (t.ex. i form av formler för areor hos olika former) är olika från elev till elev. De mer faktainriktade komponenterna är i huvudak desamma (mått, priser m.m.), även om elevens egna förslag ger upphov till egna mått att använda. Analys av de ritade diagrammen visar att de allra flesta lösningarna till uppgiften är relationella. Endast några få visar på multistrukturella eller unistrukturella drag. I själva verket kan uppgiftens lösning sägas kräva arbete på relationell nivå. Elever som inte når upp till denna nivå kan knappast komma fram till ett godtagbart svar. Chick, Watson & Collis (1988) använde SOLO-taxonomin för att studera elevers felsvar på mer typiska skoluppgifter och klassificera uppgifter utifrån den nivå som krävs för en framgångsrik lösning. Deras utgångspunkt var att om eleven är oförmögen att prestera på den nivå som uppgiften kräver så leder detta till svar som inte kan godtas. Bland de många relationella lösningarna till vår uppgift så finns åtskilliga som är väldigt ”rika”, dvs de innehåller en stor mängd av olika sambandsrelationer. Detta skulle kunna tyda på att flera elever så att säga slagit i taket. Uppgiften gav inga möjligheter att visa kunnande på en högre nivå (med större strukturell komplexitet) och elever som på en annan uppgift hade kunnat redovisa en lösning på utökad abstrakt nivå begränsas av uppgiften.

I tabellen på nästa sida redovisas några kännetecken på elevlösningar på olika nivåer. De tretton svarta punkterna representerar olika komponenter som kan anses nödvändiga och tillräckliga för en godtagbar lösning av uppgiften. Om punkterna numreras uppifrån och ned kan tabellen nedan användas för att tolka diagrammen.

Punkt nr	Komponent	Punkt nr	Komponent	Punkt nr	Komponent
1	Rektangel 20 m × 35 m	6	Buskar 80 kr/st	11	Rektangelns area $A = b \cdot h$
2	30 lägenheter	7	Asfalt 180 kr/m^2	12	Rätblockets volym $V = b \cdot d \cdot h$
3	Lekplats 40 - 50 m^2	8	Matjord 115 kr/m^3	13	Skala
4	Kostnadstak 1500 kr/hushåll	9	Gräsfrö 2 kr/m^2		
5	Träd 300 kr/st	10	Sand 175 kr/m^3		

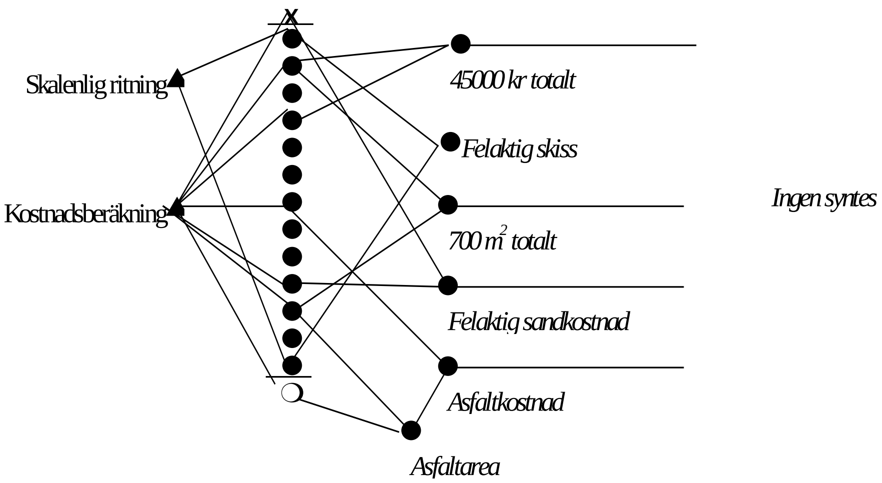
Unistrukturella lösningar

Bland lösningarna till Gården finns en som möjligen kan klassas som unistrukturell. I lösningen presenteras en skiss över gården, men den är inte skalenlig, utan har helt enkelt utformats så stor att den täcker större delen av rutnätet på svarsbladet. Det är en intuitiv, ostrukturerad respons på uppmaningen att göra en skalenlig skiss. Förutom skissen bara en beräkning av hur mycket pengar som kan spenderas på gården. Ett snabbt avslut och inget mer.



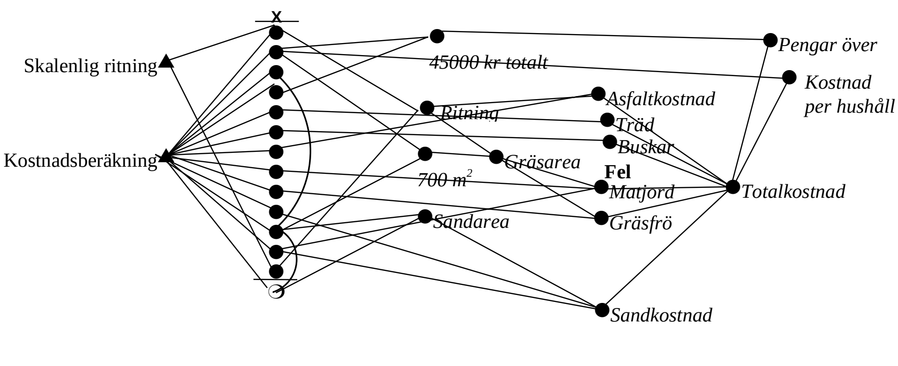
Multistrukturella lösningar

Fyra elevlösningar hänförs till den multistrukturella nivån. I en av dessa (se figur nedan) gör eleven samma typ av snabba avslut på uppmaningen att göra en skalenlig ritning som beskrivits ovan. Eleven beräknar totala arean samt area och kostnad för asfaltgångarna korrekt, men de olika kostnaderna summeras aldrig och lösningen avbryts mitt i ett försök att bestämma arean för en rektangulär gräsmatta. Eleven använder en felaktig komponent för beräkning av sandkostnaden. Få av de nödvändiga komponenterna används, men det är i alla fall fler än en.



Relationella lösningar

Övriga elevlösningar till uppgiften har mer eller mindre tydliga relationella inslag. Här används i relativt hög utsträckning beräknade delresultat som kombineras för vidare beräkningar. Alla komponenter används och ett slutresultat beräknas utan inkonsekvenser. Bilden blir ofta ganska rörig på grund av alla de relationer som förekommer (se figur nedan).



Koordinatgeometri

Om Gården i princip innehöll två frågor, en relativt begränsad som handlar om skalenlig avbildning och en komplex beräkningsuppgift, så innehåller Koordinatgeometri-uppgiften nio olika frågor. För att kunna tillämpa SOLO-taxonomin, och rita tolkningsbara diagram som grundval för analysen, så är det nödvändigt att studera en fråga i taget. Jag har alltså studerat elevernas bearbetning av de olika frågorna var för sig. Om texten i uppgiften omformuleras något så kan de nio frågorna ställas var för sig.

Fråga 1 Rita ett koordinatsystem på ditt svarspapper. Använd samma skala som i figurerna ovan. Rita in en triangel med hörnen i (1, 4), (5, 1) och (8, 5).

Fråga 2 Rita en ny triangel genom att spegla triangeln i x - axeln (enligt metod I).

Fråga 3 Beskriv hur du gjorde då du konstruerade spegelbilden.

Fråga 4 Ange koordinaterna för triangelns hörn.

Fråga 5 Beskriv allt annat du vet och kan ta reda på om de båda trianglarna som du ritat. Redovisa dina beräkningar och resonemang.

Fråga 6 Rita en ny triangel genom att tillämpa metod II på triangeln du ritat inledningsvis.

Fråga 7 Jämför den nya triangeln med den ursprungliga. Beskriv skillnader och likheter.

Fråga 8 I beskrivningen av metod II får du de nya punkternas avstånd till origo genom att multiplicera de gamla punkternas avstånd till origo med faktorn 2 (dubblering). Undersök vad som händer om du använder en annan faktor.

Fråga 9 I beskrivningen av metod II var origo utgångspunkt för linjerna L_1 och L_2 som användes vid konstruktionen av den nya figuren. Undersök vad som händer om du använder en annan punkt.

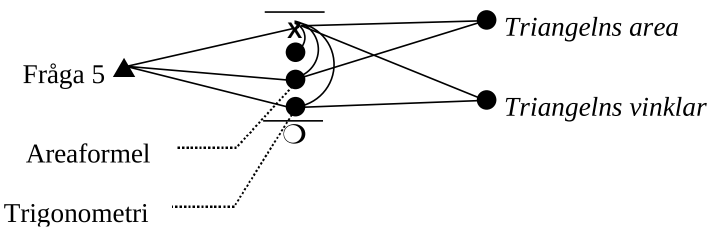
Ur Biggs & Collis perspektiv är denna uppgift mindre lämplig för SOLO-bedömning eftersom uppgiftstypen och sammanhanget är obekant för eleven. Eleverna har gjort relativt lite på fråga 8 och 9. Detta kan bero på att eleverna hamnat i tidsnöd, vilket hindrar dem från att visa arbete på högre SOLO-nivåer. Det kan bero på att eleverna helt enkelt inte kunde mer än de visat. Men det kan även bero på en svaghet i formuleringen av frågorna. Uppmaningen *undersök* ger inte tillräckligt starka signaler till eleverna vilket innebär att de läser *en annan punkt* i slutet av meningen som **en enda** punkt. Därför kommer de inte att göra den utvidgning av problemet som uppgiften avsåg att bjuda in till. Biggs & Collis (1982) använde sig av uppföljningsintervjuer, där eleverna fick tänka högt i samband med sin lösning, för att verkligen undersöka elevernas förmåga att prestera på högre SOLO-nivåer.

Unistrukturella/multistrukturella lösningar

Bland de studerade elevlösningarna återfinns inga som kan sägas vara renodlat unistrukturella. Där finns tio lösningar som inte visar några prov på relationell nivå. De som ligger närmast den unistrukturella nivån kännetecknas av att endast ett fåtal av frågeställningarna behandlats och i åtminstone något fall utifrån en enda relevant komponent. T.ex. har en elev mätt basen och höjden i de trianglar hon ritat och sedan beräknat arean. Inga andra egenskaper hos trianglarna uppmärksammas. Här åstadkoms genom användning av olämpliga data ett snabbt avslut. Här finns också elevlösningar som visar att eleven inte alls förstått uppgiften. Dessa elever har invandrarbakgrund så missförstånden kan bero på språksvårigheter. Vissa lösningar ligger på en mer utpräglad multistrukturell nivå. Här behandlas alla frågorna i uppgiften, och i flera fall utifrån flera komponenter.

Relationella lösningar

De tre lösningar som klassats som relationella har alla på någon fråga i uppgiften en lösning som bygger på samband mellan komponenter. I figuren nedan visas i diagramform hur en elev behandlat fråga 5 i uppgiften. Mätningar och observationer betraktas här som olämpliga data, men eleven relaterar dessa till formler för triangelarea och trigonometri för att komma fram till sitt avslut.



Utökat abstrakta lösningar

I denna kategori faller också tre elevlösningar. En av dessa utgår från ett deduktivt resonemang vilket direkt motiverar klassificeringen. En annan lösning visar prov på att slutsatser hålls öppna för logiskt möjliga alternativ.

Sammanfattning och reflektion

Komponentanalysen, där de innehållsliga eller processinriktade komponenterna som ingår i uppgiftens lösning, är central för användningen av SOLO. Erfarenheten från arbetet med SOLO i denna studie är också att det svåra arbetet ligger i upprättandet av komponentlistan. Att sedan studera elevlösningarna och beskriva dem med hjälp av de scheman som är typiska för SOLO innebär inga större svårigheter. Möjligen kan dessa scheman bli lite röriga. Det gäller i synnerhet komplexa uppgifter som uppgift 1: Gården. Här ska relationerna mellan ett femtontal olika komponenter beskrivas, och för den som gjort en någorlunda fullständig lösning så blir schemat ganska komplicerat. När schemat är ritat kan SOLO-nivån i de flesta fall bestämmas ganska enkelt. Hierarkin i nivåerna är dock inte helt självklar. Vissa relationella lösningar har endast använt några få komponenter och är alltså i vissa avseende sämre än de multistrukturella lösningar som använt många komponenter, men utan att kombinera dem.

Bedömningen av uppgift 1: Gården gav nästan uteslutande relationella lösningar. Detta kan bero på att eleverna i gymnasiets årskurs 1 i huvudsak befinner sig på en kognitiv nivå som gör att de presterar relationella SOLO-lösningar. Det kan också bero på att uppgiften förutsätter prestationer på denna nivå för sin lösning. Bedömningen visar även prov på åtskilliga rika relationella lösningar. Detta kan tyda på takeffekter, dvs att eleven kunde ha visat högre nivåer om uppgiften hade erbjudit möjligheter till det. Biggs & Collis (1982) påpekar vikten av att eleven har kännedom om och erfarenhet av problemtypen för att kunna visa sin optimala prestation i SOLO-termer. Uppgift 1 innehåller inga okända sammanhang, men hela uppgiftstypen är eleverna knappast vana vid. Men min bedömning är ändå att uppgiften inte bör medföra några större svårigheter i detta avseende.

Uppgift 2: Koordinatgeometri består egentligen av nio frågor, och komponentlistor och SOLO-scheman måste upprättas för varje fråga. Med så många frågor blir bedömningen i ett avseende komplex. Å andra sidan blir komponentlistorna för varje fråga mycket korta, och varje schema blir relativt överskådligt. Här återfinns lösningar på alla nivåer, och uppgiften tycks ur denna utgångspunkt vara mer lämpad för SOLO-analyser. Samtidigt måste denna uppgift anses vara av en typ som är obekant för eleven, och ur den aspekten mindre lämplig.

En slutsats av analysen är att SOLO mycket väl kan användas för att ge en meningsfull bild av kvaliteten i elevlösningar till uppgifter av lämpligt slag.

SOLO-nivåer hos samtliga elevlösningar finns redovisade i bilaga 1.

Analys i förhållande till Van Hiele

Van Hiele beskriver flera nivåer av tänkande och bland elevlösningarna i urvalet kan man hitta prov på de tre grundläggande nivåerna: den visuella, den deskriptiva och den teoretiska. Analysen var endast meningsfull för uppgift 2: Koordinatgeometri.

Koordinatgeometri

Nivå 1

Två elevlösningar kan kopplas till denna nivå. Det mest kännetecknande är avsaknaden av språk. Eleverna visar inga prov på analys. Den ena eleven kan visserligen känna igen rätvinkliga trianglar, men det är oklart om det sker genom identifiering av den räta vinkeln. Lösningarna ger mycket svaga tecken (om några) på struktur i elevens tänkande, utan elevens bearbetning av problemen tycks intuitiv.

Exempel 1 (elev nr 11)

> I denna elevlösning finns inget språkligt inslag. Eleven har ritat en spegling korrekt, men klär inte några observationer i ord. Eleven upptäcker inte att trianglarna är rätvinkliga. Att trianglars area beräknas som basen gånger höjden är dock klart, men måtten fås (antagligen) genom mätning i figuren och den längsta sidan (som också ligger längst ned) används som bas. Inget explicit konstaterande av likhet mellan trianglarna.

Mellannivå

De tre elevlösningarna i denna kategori är alla gjorda av elever med invandrarbakgrund. De intar en mellanställning främst p.g.a. det bristfälliga språket som möjligen kan förklaras med elevernas allmänspråkliga utveckling.

Exempel 2 (elev nr 24)

> Eleven konstaterar utan att markera den räta vinkeln i figuren att triangeln är rätvinklig, och skriver att hon därigenom kan ta reda på sidor och vinklar. Sedan mäter hon sidorna i figuren (inga beräkningar är redovisade) och beräknar arean med hjälp av de båda kateterna i triangeln. Hon använder sedan tangens och beräknar övriga vinklar. Eleven har ett dåligt språk för att uttrycka likheter och skillnader mellan trianglarna: *Figurerna står mot varandra. A står mot A, B mot B C mot C. Figuren byter ställning*. Eleven har invandrarbakgrund. Hon har inte alls försökt sig på metod II.

Nivå 2

De fem elevlösningar som tyder på tänkande på den analytiska nivån innehåller alla ett moment av att klä fakta från observationer i ord. Det är fråga om en strukturering av visuella strukturer. Eleverna diskuterar och förklarar sitt resonemang. Allt som sägs kan förklaras med visuella strukturer och grundar sig på observationer av gjorda skisser. Eleverna konstaterar inte bara att triangeln är rätvinklig (på grundval av helhetsintrycket) utan markerar den räta vinkeln vilket tyder på analytisk förmåga. Symbolspråket är vidareutvecklat: skala, likformighet. Orsakssammanhang: En elev skriver angående skalningen att en större faktor skulle ge en större triangel och en mindre faktor en mindre triangel. Detta görs utan stöd av figur, även om det skulle kunna visas med figur. Eleven visar då även att hon i viss mån kan frigöra sig från det visuella och resonera sig fram. Hon yttrar sig alltså om visuella strukturer och deras relationer.

Exempel 3 (elev nr 16)

> Lösningen är på flera sätt typisk för nivå 2. Visuella observationer beskrivs och elevens arbete handlar om en strukturering av visuella strukturer. Eleven markerar den rätvinkliga triangeln, konstaterar att båda trianglarna är rätvinkliga, och skriver *Alltså en vinkel i varje triangel är 90° de andra 4 vinklarna är 45°*. Vid skalning med faktorn 2 konstaterar eleven att den nya triangeln är dubbelt så stor som den gamla men att bägge trianglarna har lika stora vinklar. Språket är bristfälligt eftersom eleven skriver att trianglarna är parallella med varandra. Motsvarande slutsatser dras för genomförd skalning med faktorn 3. Eleven gör även en skalning utifrån en annan punkt än origo och konstaterar att vinklarna återigen är lika stora i de två trianglarna. Här skrivs dock ingenting om att den nya triangeln skulle vara dubbelt så stor som den gamla.

Nivå 3

Det som framförallt kännetecknar de fyra elevlösningar som återspeglar tänkande på nivå 3 är att slutsatser inte grundas på det visuella intrycket i första hand. En elev markerar alla vinklarna i triangeln med en vanlig vinkelbåge och visar sedan att en av dessa vinklar är 90°. Andra beskriver resultatet av spegling i både x- och y-axeln trots att de bara har genomfört den ena. En elev utför skalningen med faktorn 2 och beskriver sedan med ett väl utvecklat symbolspråk vad som generellt händer med triangeln vid skalning med utgångspunkt i origo. Slutsatser baseras alltså på samband som antas existera mellan länkar i nätverket av relationer på den andra nivån. En elev visar prov på en (enkel men dock) formellt deduktiv ansats när det gäller att bevisa att triangeln är rätvinklig. Språket är i allmänhet mer utvecklat och har en mer abstrakt karaktär. Symboler används mer naturligt och flitigt.

Exempel 4 (elev nr 22)

Eleven skriver:

påst. $\Lambda B = 90°$

bevis *Δ CBD är likbent och har en vinkelrät sida*
Δ AEB är likbent och har en vinkelrät sida
Detta leder till att Λ G och F är 45° vardera. Detta i sin tur leder till
$180 - 45 - 45 = 90°$
$180 - G - F = 90°$

Därefter beräknas sträckor med pythagoras sats, omkrets, area (svarar med areaenheter) och vinklar med sinus. Här är notationen (symbolspråket) felaktigt då eleven skriver Sin $\Lambda A = 33{,}7$.

I bilaga 1 redovisas vilka elevlösningar som bedömts vara på olika nivåer enligt van Hiele.

Gården

När elevlösningarna analyseras med Van Hiele nivåerna som verktyg så visar det sig att alla elevlösningar måste ligga på nivå 2. Eleverna utmanas aldrig i denna uppgift när det gäller språk, symboler och metoder för slutsatser. För att eleven ska visa prov på tänkande på den teoretiska nivån måste uppgiften vara av en karaktär som förutsätter eller åtminstone möjliggör det nätverk av relationer som är karakteristiskt för denna nivå. Bland eleverna som arbetat med uppgiften finns säkert sådana som i en annan situation skulle visa prov på tänkande på högre nivå. I denna uppgift kan vi inte skilja på elevlösningar som representerar tänkande på nivå 2 och sådana som representerar en nivåreduktion där eleven reducerat nivån i sitt arbete för att svara mot karaktären på uppgiften.

Sammanfattning och reflektion

De två uppgifter som undersökts visade sig vara olika lämpade för bedömning av elevers prestationer i förhållande till van Hieles nivåer av tänkande. Uppgift 2: Koordinatgeometri gav elevlösningar på alla nivåer. Här visar eleverna prov på de olika nätverk av relationer som kännetecknar olika nivåer. Uppgiften har ett innehåll som kan bearbetas utifrån visuella strukturer men också utifrån en mer generell och teoretisk utgångspunkt. Den beskriver också en situation som är tillräckligt ny för eleven för att uppfylla van Hieles krav för möjligheten att bedöma förekomsten av insikt. Uppgift 1: Gården ger däremot endast upphov till lösningar på nivå 2. Det kan vara så att uppgiften förutsätter tänkande på nivå 2, men inbjuder inte till tänkande på högre nivåer. Bland eleverna som arbetat med uppgift 1 finns med alla sannolikhet sådana som skulle kunna visa tänkande på nivå 3, men möjligen innebär uppgiftens innehåll att dessa gör en nivå-reduktion eftersom arbete på en lägre nivå är mer lämpligt för just denna uppgift. Dessutom är det tveksamt om uppgiften i sin helhet är tillräckligt ny för eleverna för att kunna visa verklig insikt.

I bedömningen av elevlösningarna till uppgift 2 kommer språkets betydelse fram, och skillnaden mellan lösningar på olika nivåer handlar mycket om språket. Nivå 1 kännetecknas av avsaknaden av språk. Elever på denna nivå beskriver inte sina observationer eller eventuella slutsatser i ord. Med tanke på språkets betydelse så kan man fråga sig hur det blir med invandrarelevernas van Hiele nivåer? Kan en elev med nyvunna och relativt begränsade språkkunskaper visa sin nivå av tänkande enligt van Hiele? Bland de bedömda elevarbetena finns några som är svåra att bestämma eventuellt p.g.a. språksvårigheter. I elevlösningarna på nivå 2 så kläs fakta från observationer i ord. Det handlar om en strukturering av visuella strukturer, dvs att eleven resoner om sådant som kan visualiseras, och förhållanden som eleven undersökt konkret. I de bedömda elevlösningar som bedömts ligga på nivå 3 har det visuella intrycket hamnat i skymundan. Eleverna resonerar inte bara om de förhållanden de undersökt utan för resonemang om samband som antas gälla. I något fall görs även en deduktiv ansats.

Jämförelse av utfallen

I tabellerna 9-12 redovisas sambanden mellan bedömningarna. Av de sexton lösningarna till uppgift 2 har två stycken uteslutits i redovisningen eftersom de inte kunde bedömas i förhållande till van Hiele. Båda dessa var multistrukturella/unistrukturella och har fått provbetyget IG. Av tabellerna nedan framgår att de olika bedömningarna naturligtvis har ett högt samband, och en hög nivå i ett avseende motsvaras oftast av en hög nivå enligt någon annan måttstock. Men de olika modellerna ger i viss fall olika värderingar av elevernas arbete. Bland de elevarbeten som bedömts tillhöra den relationella SOLO-nivån (R) finns alla betygsstegen representerade (Se tabell 9 och 10). De flesta har visserligen betyget G, men nästan lika många har IG respektive VG. Unistrukturella elevlösningar (US) har i huvudsak provbetyget IG. För uppgift 1 har IG-lösningarna i huvudsak bedömts vara relationella, medan alla fyra IG-lösningarna på uppgift 2 klassificerats som multistrukturella/unistrukturella (MS/US). Elevlösningar med provbetyget G är uteslutande relationell när det gäller uppgift 1, men i huvudsak multistrukturella (MS) eller lägre för uppgift 2. Utifrån SOLO-perspektiv är de flesta elevprestationerna relationella.

Tabell 9 Antalet elevlösningar till uppgift 1 på olika SOLO-nivåer för varje provbetyg.

	SOLO				
BETYG	*MS/US*	*MS*	*R*	*UA*	*Σ*
IG	6	4	12	0	22
G	2	4	18	0	24
VG	0	0	12	3	15
	8	8	42	3	61

Tabell 10 Antalet elevlösningar till uppgift 2 på olika SOLO-nivåer för varje provbetyg.

	SOLO				
BETYG	*MS/US*	*MS*	*R*	*UA*	*Σ*
IG	2	0	0	0	4
G	2	4	1	0	7
VG	0	0	2	3	5
	4	4	3	3	14

Tabell 11 Antalet elevlösningar till uppgift 2 på olika SOLO-nivåer för varje van Hiele nivå.

	SOLO				
VAN HIELE	*MS/US*	*MS*	*R*	*UA*	*Σ*
1	2				2
1-2	1	1	1		3
2	1	3	1		5
3			1	3	4
	4	4	3	3	14

Tabell 12 Antalet elevlösningar på olika van Hiele nivåer för varje provbetyg. (Gäller endast uppgift 2.)

	VAN HIELE				
BETYG	*1*	*1-2*	*3*	*4*	*Σ*
IG	1	1			2
G	1	2	4		7
VG			1	4	5
	2	3	5	4	14

I bilagor återfinns tre autentiska elevarbeten där bedömningarna enligt de olika modellerna pekar i olika riktningar. Nedan kommenteras de bedömningar som gjorts.

Exempel 1 (elev nr 52)
Elevens arbete med uppgiften har ur SOLO-perspektiv bedömts ligga på en relationell nivå. Eleven kopplar ihop fakta, utgångspunkter och metoder i viss mån, även om inte alla relevanta data används. Men

utifrån den tillämpade tolkningen av betygskriterierna så når elevens arbete inte upp till kraven för Godkänd. Det enda prov på insikt i begrepp, lagar och metoder som eleven visar är areaberäkning. Eleven har alltså inte beräknat volymer, vilket är nödvändigt för att kunna lösa uppgiften. Resultatet/prestationen kan därför inte anses vara godkänd. Det är tveksamt om eleven behärskar situationen eftersom hon inte försökt göra någon skalenlig figur. När det gäller kommunikation så kan tankegången följas, men figuren är inte tydlig.

Eleven kan alltså inte riktigt matcha sin strukturella nivå med prestationer i förhållande till betygskriterierna. Detta kan bero på uppgiftens utformning där den inte i tillräcklig grad inbjudit eleven att visa kunskaper på den nivå som skulle kunna vara möjlig. Elevens invandrarbakgrund kan också ha påverkat hennes möjligheter att göra sig själv rättvisa.

Exempel 2 (elev nr 56)

Eleven har i SOLO-termer gjort en lösning som kan beskrivas som relationell. Den är visserligen svårtolkad, men det eleven skrivit om t.ex. den cirkulära sandlådan visar på relationell nivå. Eftersom eleven inte beskriver hur han arbetat för att komma fram till en totalkostnad så är det svårt att bedöma om eleven har insikt i begrepp, lagar och metoder. Det enda som eleven visar att han kan är att rita skalenliga figurer. Hur väl eleven behärskar generella metoder som beräkningar och tekniska hjälpmedel går inte alls att bedöma. Trots att figuren är både tydlig och korrekt så når elevens kommunikativa prestation inte upp till Godkänd eftersom tankegången inte alls beskrivs och därför inte kan följas.

Elevens låga betyg beror på den bristfälliga redovisningen av metoder och resonemang. Trots detta kan en bedömning i förhållande till SOLO alltså göras och peka på en strukturell nivå som inte tycks överensstämma med betyget.

Exempel 3 (elev nr 16)

Eleven arbetar igenom större delen av uppgiften och får därföra anses ha uppnått VG när det gäller situationens karaktär. Att kunna lösa uppgifter med problemställningar av olika svårighetsgrad och art, i såväl kända som nya situationer, är ett kriterium på VG. Eleven visar inte mycket prov på insikt i begrepp, lagar och metoder och generella metoder ger inte just den här uppgiften så många möjligheter att visa. När det gäller kommunikativ förmåga så visar eleven en tankegång som kan följas, skriver en utförlig text och ritar tydliga och korrekta figurer. Det matematiska språket är något tveksamt eftersom eleven skriver om ”parallella trianglar” när han menar likformiga trianglar. Det samlade intrycket är att eleven har ett klart Godkänt betyg, men att han inte riktigt når upp till vad som borde krävas för VG.

Utifrån van Hiele så tycks elevens tänkande ha uppnått nivå 2. Trianglarna känns igen på deras egenskaper. Eleven drar slutsatser om vad som händer för de exempel som han arbetar med. För att anses ha uppnått nivå 3 bör eleven kunna jämföra modellerna mer generellt.

SOLO-bedömningen tyder på att elevens arbete kan hänföras till en multistrukturell nivå. Den strukturella komplexiteten i det tänkande som eleven redovisar når alltså inte särskilt högt. Eleven använder flera relevanta data, men relaterar inte olika utgångsfakta och metoder till varandra.

DISKUSSION

Tre modeller

Jag har valt att studera och försöka tillämpa tre modeller för bedömning av elevers kunnande i matematik. Inte så sällan förekommer begreppet ”kognitiv” i samband med de kategoriseringar av uppgifter och elevlösningar som försöker beskriva kvaliteter i förståelse och kunnande. Användning av ordet ”kognitiv” tycks ställa till problem i vissa sammanhang. Det ger kanske intryck av en generell, teoretisk och psykologisk bas för kategorisering av elevlösningar eller uppgifter. Men om vi istället tänker oss att det handlar om kvaliteter i kunnande eller och hur dessa kvaliteter visar sig, så kan vi undvika att fastna i en diskussion av hur begreppet kognition ska definieras och förstås. Samtidigt riskerar vi att fastna i en diskussion om vad kunnande eller kunskap är. Begreppen används här utan att definieras, och de kan naturligtvis betyda olika saker. I själva verket utgår de använda modellerna från olika synsätt på vad kunskap är och hur den uppstår, åtminstone har de olika ambitioner när det gäller att beskriva olika aspekter av vad kunnande är.

En närgången analys av de betygskriterier som formulerats i matematik för gymnasieskolan väcker frågan om hur dessa kriterier tagits fram och vilka utgångspunkter eller teoretiska modeller som förelåg vid skrivandet av betygskriterierna. En reflektion är att om det finns någon struktur i dessa kriterier så är den åtminstone inte omedelbart synlig. Det har dock gjorts försök att i efterhand inordna betygskriterierna i en definierad struktur. Lindström (1994) visar på möjligheterna att inordna betygskriterierna i den tidigare nämnda holländska modellen med Reproduktion – Produktion samt i en struktur av Begrepp - Metod - Kognitiv nivå – Kommunikation. Den strukturering som används i föreliggande arbete är ett annat, närbesläktat exempel. Det visar sig fullt möjligt att inordna betygskriterierna under en struktur som gör dem mer begripliga och hanterliga.

Betygssystemet innehåller kvalitetsbeskrivningar i form av uppnåendemål och betygskriterier. Kriterier är enligt den gängse definitionen tecken på måluppfyllelse. De utgör alltså tecken som man kan söka efter för att konstatera om eleverna uppnått olika mål eller inte. Då kan det alltså finnas andra tecken som på motsvarande sätt visar på måluppfyllelse, dvs de nedtecknade kriterierna är avsedda som exempel på tecken på måluppfyllelse. Ofta glider betydelsen av kriterier över till att vara de enda tecknen på måluppfyllelse, dvs de blir ganska snart mål i sig själva (Wiliam, 1995). Då kommer kriterierna att beskriva beteenden eller färdigheter som man försöker lära sig och lära ut. Enligt den gällande läroplanen uttrycker betygen

… i vad mån den enskilde eleven har uppnått de kunskapsmål som uttrycks i kursplanen för respektive kurs och som definieras i betygskriterier. (Utbildningsdepartementet, 1994, s. 35).

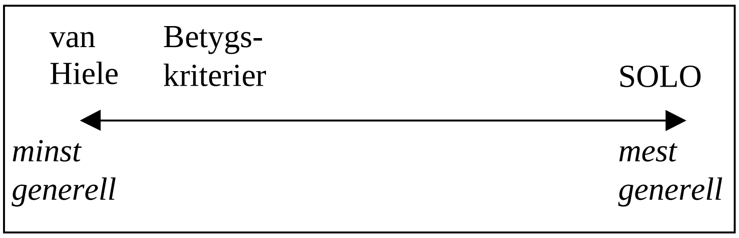
Här utgör betygskriterierna en definition av graden av uppfyllande av kursplanens kunskapsmål, och kriterierna är alltså inte exempel på tecken på måluppfyllelse.

Betygskriteriernas utformning och innehåll anknyter enligt Betygsboken (Skolverket, 1994) till ämnets och kursens karaktär. Mot bakgrund av detta ter det sig lite märkligt att alla gymnasieskolans matematikkurser har i huvudsak samma betygskriterier, men likheten motiveras i Betygsboken med att de generella begrepp och metoder som eleven skall tillämpa är ganska lika oavsett kurs. I matematik hävdas att betygskriterierna definierar förmågan att lösa matematiska problem oavsett problemtyp. Men de olika matematikkurserna har väldigt olika övergripande mål. Kurs A ska ge matematiska kunskaper för vardagsliv, yrkesliv och fortsatta studier medan Kurs E ska förbereda för studier på matematikintensiva utbildningar. Frågan är om inte t.ex. de krav på formell matematik som rimligen tillhör Godkänd-nivån på E-kursen även borde återspeglas i betygskriterierna. Med andra ord innebär betygskriteriernas ambitioner att gälla för alla matematikkurserna, att en del intressanta bedömningsaspekter går förlorade.

I Betygsboken (Skolverket, 1994) ges även en sorts förklaring till vissa ord och uttryck som används i betygskriterierna. Det gäller t.ex. insikt som tycks betyda bredd i kunskaperna i ämnet. Van Hiele (1986) skriver också om insikt, men begreppet har där en specifik betydelse. En person har insikt när hon agerar på ett adekvat sätt och med avsikt i en ny situation, och förekomsten av insikt kan endast prövas om personen ställs inför en tillräckligt ny situation. Detta illustrerar hur samma ord kan betyda olika saker i olika sammanhang. Ett annat exempel är kursplanens ”problem” som där tycks stå för matematikuppgift i allmänhet. Hos van Hiele står problem för en situation som inte är utforskande utan verkligen medvetet hos eleven behandlas som en okänd problemställning. Med van Hieles ord har alltså samma symboler olika betydelser i olika kontexter.

I inledningen till sin bok skriver van Hiele (1986) att fler och fler i USA (alltsedan introduktionen vid en matematiklärarkonferens i USA 1974) har visat intresse för hans s.k. van Hiele - nivåer, det han själv vill kalla en undervisningslära. Efter att ha läst hur han själv beskriver sin undervisningslära så tror jag inte att ett sådant ökande intresse kunde vara möjligt utan några pedagogiska uttolkare av teorin. Van Hiele skriver om struktur, men hans grundantagande om hur kunskap uppstår förbjuder honom att vara explicit och språkligt strukturerad. Han menar att definitioner endast är meningsfulla om man redan känner till det som ska definieras. Därför gör han långa diskuterande framställningar för att läsaren så småningom ska kunna återskapa de begrepp som han vill komma åt. Det är inte lätt att skapa sig en bild av hans idéer. Detta kan jämföras med betygskriterierna som utgör korta meningar som inte alls förklaras. De är avsedda för lokal uttolkning och lämnar medvetet ett stort utrymme för läsaren. I Betygsboken (Skolverket, 1994) sägs att kursplanen anger den kravnivå som alla elever ska uppnå efter kursens slut och att betygskriterierna förtydligar denna nivå. Det är först när betygskriterierna läses tillsammans med kursplanen som kriterierna blir ett verktyg som förtydligar kunskapsnivåer och därmed utgör ett stöd i betygsättningen. Såsom betygskriterierna formulerats kan påståendet att betygskriterierna förtydligar någonting starkt ifrågasättas. Det kan till och med ifrågasättas om denna typ av kriterier över huvud taget kan ligga till grund för en likvärdig bedömning med en acceptabel bedömaröverensstämmelse. Detta motsäger i så fall Betygsberedningens betänkande (SOU 1992:86) som grundar sig på Läraruppdragets slutsatser. I jämförelse är SOLO-taxonomin strukturerad, analytisk och relativt väldefinierad. Den bygger på en bedömning av tre aspekter vilka sammanfattas väl i en tabell (se tabell 1 på sidorna 12-13). Dessa bedömningar kan göras i diagramform, och vilka steg som behövs finns väl beskrivet. Å andra sidan är SOLO-bedömningen enligt upphovsmännen begränsad till slutna undervisningssituationer. Det innebär att den inte är avsedd att användas i rådande kunskapsparadigm.

I det arbete som ledde fram till SOLO var Biggs & Collis (1982) ursprungliga ambition att samla exempel på elevarbeten inom olika ämnen för att visa lärarna vad de normalt borde kunna förvänta sig från elever som befinner sig på olika utvecklingsnivåer *inom respektive* *undervisningsområde* (kursivering i original). De analyserade hundratals elevarbeten från grundskola och gymnasium inom flera olika ämnesområden, och fann då några aspekter på kvalitet i kunnande som de tycker är generella. SOLO taxonomin har alltså uppkommit från analyser av elevarbeten inom vitt skilda ämnesområden och ambitionen är att säga något generellt om strukturell komplexitet i tänkande. Van Hieles teorier (van Hiele, 1986) utgår mycket från hans egna erfarenheter av att undervisa i geometri. Det är problemen med att hjälpa elever till en förståelse av geometriska samband som väcker tanken om nivåer. Även om van Hiele hela tiden lyfter fram exempel från geometrin, och tycker att detta område kanske är tydligast när det gäller tillämpningen av hans idéer, så menar han att teorin borde vara generell. Han ger exempel från andra kunskapsområden i matematik och vill åtminstone utvidga teorins giltighet till naturvetenskapliga ämnen. Tillsammans med betygskriterierna så ger SOLO och van Hiele således en variation i graden av generalitet. SOLO är generell för alla ämnen, betygskriterierna gäller för matematik och van Hiele kan sägas vara specifik för geometri, även om dessa nivåer kan överföras på andra områden. I figuren nedan har de tre använda modellerna placerats på en skala av generalitet när det gäller ämnesområden. Van Hieles nivåer är mest specifika eftersom de i första hand utvecklats för geometri. Betygskriterierna för matematikämnet är något mer generella, men avståndet till SOLO är ändå stort i detta avseende.



I arbetet med SOLO-taxonomin skriver Biggs & Collis (1982) att de i huvudsak ägnat sig åt formativ utvärdering eftersom SOLO har mest att bidra med inom detta område. De menar att SOLO visserligen kan användas även för summativa ändamål, men att den strukturella komplexiteten i tänkande som SOLO vill spegla bara kan vara en komponent vid t.ex. betygssättning. Därför skulle det vara olämpligt att direkt associera SOLO-nivåerna med betygssteg. Ytterst vill Biggs &

Collis påpeka att summativ utvärdering innehåller en värdering (value judgment). Detta är något som inte kan föreskrivas av någon som inte är bekant med funktionen hos inlärningstillfället, de ursprungliga intentionerna och omständigheterna vid undervisningssituationen. Biggs & Collis menar att det är viktigt att eleverna har kännedom om och erfarenhet av problemtyper som används vid ett prov. En elevs optimala prestation i SOLO-termer kan bara utvärderas när hon har viss erfarenhet av uppgiftstypen i provet. Van Hiele menar att förekomsten av insikt endast kan prövas om man är säker på att den situation som eleven ställs inför är tillräckligt ny. Därför blir det även här problem med storskaliga bedömningssituationer (t.ex. nationella kursprov). Det är bara läraren som undervisat i klassen och som känner eleverna som egentligen kan utforma prov och andra bedömningssituationer som kan pröva insikt. Van Hiele menar i motsats till Biggs & Collis att det är ett misstag att låta eleverna förbereda sig för ett prov genom att studera tidigare givna prov. Utan en sådan förberedelse så bevarar proven sin karaktär av insiktsprövningar. Men han menar samtidigt att en sådan förberedelse också kan stärka elevernas uppfattning av strukturer. En lärare som under flera år ägnat sig mycket åt elevernas möjligheter att skapa strukturer kan mycket väl ägna några månader åt förberedelser för en examination. Van Hiele drar alltså här inga klara och entydiga slutsatser utifrån sin teori.

Eftersom båda teorierna utgår från undervisningssituationen så gör de inte anspråk på att ge något stöd för bedömning och utformning av storskaliga, summativa bedömningssituationer som exempelvis nationella kursprov. Om man får tro upphovsmännen så är ingen av modellerna avsedd för denna användning. I båda fallen förutsätts nästan att undervisningshistorien är känd när elevens kunskaper ska utvärderas. Van Hiele tycker att utvärderingssituationen måste vara ny i någon mening, medan Biggs & Collis betonar vikten av att problemtypen är känd. Det kan betyda att ett visst problem kan användas för utvärdering i förhållande till den ena taxonomin men inte i förhållande till den andra. Betygskriterierna är avsedda att tolkas lokalt och därefter användas vid betygssättning. Problemen med storskaliga bedömningssituationer är uppenbara. Om det finns en variation i den lokala tolkningen av kriterierna så är det omöjligt att göra gemensamma prov som måste bygga på en gemensam tolkning. Bedömningen av elevernas prestationer måste med nödvändighet öppna för en viss variation i tolkningen av kriterierna. Därmed går något av likvärdigheten och jämförbarheten förlorad. Uppgiftstypen berörs i betygskriterierna genom att betyget Godkänd kräver att eleven kan lösa uppgifter av en typ som de tidigare mött medan betyget Väl godkänd förutsätter att eleven kan hantera såväl kända som nya situationer. Alla tre modellerna ger alltså problem vid storskalig bedömning av elevers kunskaper, t.ex. i nationella kursprov. SOLO och van Hiele förutsätter egentligen att undervisningshistorien är känd. Men om vi antar att uppläggningen av matematikundervisningen inte uppvisar någon avsevärd variation så kan en bedömning av elevernas undervisningshistoria göras. Betygskriteriernas öppna formuleringar, som gör att de för betygssättning måste tolkas lokalt, innebär problem för nationella prov men inte för denna studie. Här används en möjlig tolkning av betygskriterierna. Diskussionen har betydelse för möjligheten till bedömningar utifrån de uppgifter som eleverna arbetat med. Bedömning enligt betygskriterierna förutsätter uppgifter som innehåller både kända och nya situationer. Bedömning av insikt enligt van Hiele förutsätter en ny situation och SOLO förutsätter att situationen är känd. Detta innebär svårigheter när samma uppgifter används för bedömning enligt de olika modellerna. Nedan diskuteras betydelsen av de använda uppgifternas karaktär och utformning för den bedömning som gjorts.

Pierre M. van Hiele och Biggs & Collis har en gemensam grund genom starka influenser från Piaget. Samtidigt som båda teorierna utgår från Piaget så innehåller de även ett stort inslag av Piaget-kritik. Man kan säga att båda texterna andas någon form av hat-kärlek till sin kanske främsta inspirationskälla. Biggs & Collis började ju sitt arbete med avsikt att ge exempel på vilka nivåer av tänkande man kunde förvänta sig i olika åldrar, i enlighet med Piagets teorier. När de sedan kommer fram till att några sådana mer generella, åldersknutna nivåer inte finns, eller åtminstone inte är mätbara, så blir kritiken mot Piaget ganska tydlig. De för fram argument som de menar till och med ifrågasätter hela tänkandet om nivåer. Samtidigt kopplar de hela tiden sina nivåer till Piagets, och försöker beskriva förhållandet mellan dessa. Biggs & Collis ändrar Piagets fokus från försök att beskriva individens nivåer av tänkande (som en inneboende, generell egenskap som visar sig i olika sammanhang) till att beskriva karaktären hos en enskild prestation. På detta sätt menar de sig kunna förhålla sig till Piaget och hela idén om nivåer av tänkande på ett nytt och mer användbart sätt. I förordet till sin bok skriver van Hiele (1986):

> *I några kapitel är jag kritisk till vissa aspekter av Piagets teori. Vissa kritiker av mina tidigare artiklar har dock*

uppmärksammat att min uppfattning av Piaget är i huvudsak positiv. De har rätt. Det är meningsfullt att vara kritisk mot en teori bara om man instämmer i det mesta. Det finns till och med skäl att hävda att mina nivåer har sitt ursprung i Piagets teorier. Att de bär mitt namn kan förklaras med att jag arbetat med dem på ett helt nytt sätt.

Van Hiele säger explicit att en viktig del av rötterna till hans arbete står att finna i Piagets teorier, men han tycker också att det är viktigt att betona skillnaderna. Han nämner bland annat att Piagets psykologi handlar om utveckling och inte om lärande. Van Hiele vill, till skillnad från Piaget, veta hur man kan stimulera barn att gå från en nivå till nästa. Han kritiserar Piaget för att inte inse språkets viktiga roll när man går från en nivå till nästa. (Det gjorde inte van Hiele heller i sina ursprungliga texter om sina nivåer.) Enligt van Hiele ser Piaget inte strukturer på en högre nivå som en följd av studier av den lägre nivån. I van Hieles teori så uppnås de högre nivåerna om de regler som styr den lägre strukturen har studerats och synliggjorts och därigenom själva blivit en ny struktur. Van Hiele konstaterar att det finns många viktiga skiljaktigheter mellan honom och Piaget, men att han genom sitt aktiva ifrågasättande av Piaget också lärt sig mycket av honom.

Biggs & Collis nämner visserligen frågan om varför ett visst ämne undervisas överhuvudtaget, men tar sedan svaret för givet och utgår från att sådana beslut redan är fattade och att vissa specifierbara resultat av undervisning vill uppnås. De menar att lärande kan ske på olika sätt, men diskuterar bara det de kallar för slutna situationer. I sådana finns ett visst stoff som eleven måste ta till sig (reception learning) och att klara intentioner hos läraren angående mängden och kvaliteten hos det lärande som ska ske. Det är beskrivningen av kvalitet i kunnande i dessa slutna situationer som är SOLO-taxonomins intentionsområde. Andra undervisningssituationer, där intentioner, processer och resultat är öppna (open-ended) är visserligen värdefulla, men de behandlas inte i arbetet med SOLO. Biggs & Collis lyfter fram både innehålls- och processaspekter i läro- och kursplaner. När det gäller innehållsaspekten så talar de om assimilation och förståelse av fakta och begrepp som utgör kunskap i ämnet. Här betraktas kunskap som något färdigt som det gäller för eleven att inhämta. Synen på kunskap och hur kunskap uppstår tycks långt ifrån den konstruktivistiska kunskapssyn som är förhärskande bland pedagoger idag. Lärarens roll blir att förmedla en kunskapsmassa till mer eller mindre passiva elever. Angående processaspekter så talas det om *riktig* förståelse och tillämpning av ämnet och *lämpliga* sätt att tänka inom ett ämne. Denna fokusering på vad- och hur-frågorna samt tanken om ett korrekt vetenskapligt tänkesätt som eleverna ska nå gör att Biggs & Collis arbete verkar ha en nära släktskap med Martons tänkande vid samma tid och en fenomenografisk inriktning. Biggs & Collis hänvisar också till Marton (1976) när det gäller tidigare försök till kvalitativa måttstockar för lärande. Författarna betonar det ämnesinriktade och hela teorin är dessutom mycket normativ, de vill definitivt tala om för lärarna hur de ska göra. Van Hiele är också normativ och ämnesinriktad, men han uppehåller sig vid helt andra lärandesituationer och har en helt annan kunskapssyn. Lärare kan visserligen lära elever ganska mycket, men eleverna lär sig då bara att imitera handlingsstrukturer hos läraren. Det sker ingen egentlig utveckling av elevernas tänkande i riktning mot högre nivåer. Möjligheterna att göra undervisningen bättre blockeras enligt van Hiele av indoktrinering, dvs att läraren förväntas vara allvetande och eleven den som ska undervisas. Han menar att läraren istället måste behandla eleverna som värdiga opponenter med förmåga att introducera nya argument. Eleverna måste själva utveckla sitt tänkande, men läraren har en viktig roll att spela bl.a. när det gäller att organisera verksamheten så att eleverna får möjlighet att lära sig. Van Hiele tycks väldigt ”modern” i sitt sätt att se på hur kunskap uppstår. Han är också engagerad i vad som ska undervisas och varför. Han diskuterar till och med frågan varför matematik överhuvudtaget undervisas på gymnasienivå och han går t.ex. till starkt angrepp mot bråkräkning, vilket av många anses nog så självklart i skolan. Van Hiele tycks i vissa avseenden stå närmare en läroplansteoretisk grundsyn.

Jämförelse av utfallen

De tre modeller som använts vid bedömningen har alla anpassats för att kunna vara användbara vid tillämpningen. SOLO-taxonomin har en tydlig struktur, men den bygger på att man gör en komponentanalys av den uppgift som används. Van Hieles nivåer av tänkande kan bedömas med en helhetsbedömning och kriterierna för denna bedömning måste växa fram vid granskningen av elevlösningar till en viss uppgift. I en sådan fas visade det sig att bedömningen av uppgift 1 inte var meningsfull i förhållande till van Hiele. Betygskriteriernas avsaknad av struktur gjorde det nödvändigt att först skapa en struktur och sedan fylla den med konkreta kriterier för de aktuella uppgifterna. Utan denna struktur är bedömningen ännu svårare att göra och framförallt är den svår att bokföra och kommunicera. Modellen blev med denna struktur användbar. Sedan kan man diskutera om den uppdelning i fyra aspekter som gjordes var relevant. Den lyfter fram vissa bedömningsriktningar som naturligtvis är godtyckliga (i meningen en av många möjliga), även om de stöder sig på kursplanens formuleringar. Ytterligare godtycke införs vid sammanvägningen av de fyra bedömningarna i förhållande till betygskriterierna. Motivet till att alla krav ska vara uppfyllda för att få ett visst provbetyg kan ändå grundas på Skolverkets förekrifter om betygssättning, vilket diskuterats ovan.

Det finns naturligtvis ett relativt starkt samband mellan de olika bedömningarna av varje elevlösning. Elever med höga provbetyg visar med få undantag hög strukturell nivå i sitt tänkande (SOLO) och de högsta nivåerna av tänkande enligt van Hiele. Motsatsen gäller dock i betydligt lägre omfattning. Fjorton av de relationella lösningar till uppgift 1 har fått provbetyget IG. Bland dessa är det endast fyra som fått detta provbetyg enbart på grund av bristande kommunikativa färdigheter. Det är rimligt att den mer komplexa bedömningen enligt betygskriterierna ställer högre krav på elevernas lösningar än de andra, mer ensidigt inriktade modellerna. Därför är det rimligt att hitta åtskilliga relationella lösningar som fått provbetyget IG, men inga lösningar med provbetyget G som bedömts ligga på en lägre nivå än den relationella. Biggs & Collis (1982) påpekar att SOLO-nivåer inte kan eller bör direkt översättas till betygssteg eftersom de endast mäter en komponent i ett slutomdöme om eleven. Den tolkning av betygskriterierna som ligger till grund för vår analys innehåller flera aspekter på kunnande. Möjligen kan man tycka att det är konstigt att SOLO visar på en relativt sett lägre nivå än provbetyget. Men SOLO-taxonomins upphovsmän konstruerade sina nivåer utifrån utgångspunkten att nivåer inte är stabila, utan varierar mellan tidpunkter och mellan uppgifter för varje elev.

Utifrån SOLO-perspektiv är de flesta elevprestationerna relationella. Detta kan tolkas som att eleverna i gymnasiets inledande år har uppnått ett tänkande som motsvarar denna nivå. De få elever vars prestationer bedömts ligga på en lägre nivå kan mycket väl prestera relationella lösningar till en annan uppgift vid ett annat tillfälle, men SOLO-taxonomin bygger på att man inte presterar högre än sin utvecklingsnivå. Faktorer som motivation och den undervisning som eleven utsatts för kan medföra att man inte når upp till den nivå som man skulle kunna. Att vi inte får några lösningar till uppgift 1 som ligger på högre nivåer kan bero på att de elever som genomfört uppgiften inte har ett tänkande som motsvarar dessa nivåer, men mer sannolikt beror det på uppgiftens utformning. Flera relationella lösningar är mycket rika, vilket skulle kunna tyda på eleverna så att säga slagit i taket på denna uppgift. Uppgiften erbjuder inte möjligheter till prestationer på abstrakt nivå. Eleverna uppmuntras inte eller inbjuds inte att visa den nivå av strukturell komplexitet som de kan. Till uppgift 2 har några lösningar bedömts vara abstrakta. Den uppgiften kan alltså ge möjlighet till lösningar på högre nivåer.

Trots att den användning av van Hieles nivåer och SOLO-taxonomin som tillämpats här inte självklart ligger i linje med intentionerna hos upphovsmännen, så visar detta arbete att de mycket väl kan användas för att göra meningsfulla bedömningar av elevarbeten i en formativ utvärdering av elevers kunskaper. Användningen av van Hiele och SOLO lösryckt från undervisningssituationen gör att den bild som dessa ger är ganska begränsad. Både SOLO och van Hiele ger en bild av den nivå av strukturerat tänkande som eleven visar prov på. Betygskriterierna försöker ge en mer komplex bild av elevernas kunskaper. Men denna komplexitet tillsammans med den bristande strukturen i kriterierna gör att bedömningen i förhållande till betygskriterierna är den svåraste. Alla tre modellerna är dock användbara i detta sammanhang och tycks säga något meningsfullt om kvaliteten i elevernas arbeten.

I samband med dessa slutsatser bör vissa urvals- och metodproblem lyftas fram. Analysen grundar sig på bedömningar av relativt få elevlösningar från en enda skola, utan någon diskussion om elevernas bakgrund och studieinriktning. Den kvalitativa ansatsen i studien gör dock att det snäva urvalet kan räcka för de analyser som görs. Bland elevlösningarna finns en tillräcklig spännvidd som gör att exempel på lösningar på olika nivåer kan återfinnas. Här finns ingen ambition att kvantifiera och generalisera utfallet. Studien vill lyfta fram intressanta aspekter på elevers arbete med uppgifterna och pröva modellernas tillämpningsområde, inte primärt säga hur stor andel av Sveriges elever som gör si eller så. Mot den bakgrunden har det visat sig fördelaktigt att en utprövningsversion kommit med, eftersom denna version pekar på andra möjligheter i en motsvarande uppgift. Bedömningarna har vidare genomförts av en person vid ett enda tillfälle. Reliabiliteten i de bedömningar som gjorts skulle naturligtvis öka om även andra bedömare tillämpat modellerna på samma elevlösningar. Alternativt skulle bedömningen kunnat upprepas av samma bedömare.

Uppgifterna

De matematikuppgifter som använts i denna studie utgjorde breddningsdelen i det nationella kursprovet i Matematik A våren 1996. Eleverna skulle välja en uppgift och det visade sig att uppgift 1: Gården var populärast. Uppgifterna har olika karaktär och de ger direkt olika intryck. Vi kan bara spekulera i varför eleverna valt som de gjort, men sannolikt har det med första intrycket av uppgifterna att göra. Att Koordinatgeometri låg som nummer två och att den var på två sidor mot Gårdens enda, kan även spela in.

Som tidigare påpekats måste situationen vara ny i någon mening för en meningsfull bedömning enligt van Hiele, medan man för SOLO-bedömningar betonar vikten av att problemtypen är känd. Det kan betyda att ett visst problem är lämpligt för utvärdering i förhållande till den ena taxonomin men inte i förhållande till den andra, eller för en elev men inte för en annan. Detta medför naturligtvis problem vid bedömning av okända elevers arbete med två så här olika uppgifter. I den tolkning av betygskriterierna som tillämpats här har också situationen eller problemtypen lyfts fram. Betygskriterierna beskriver de problemlösningssituationer som elever med G respektive VG borde klara. För att kriterier på G-nivån ska anses uppfyllda bör t.ex. eleven lösa problem av en typ som eleven mött tidigare. För VG anges att situationerna kan vara såväl kända som nya. Även här spelar alltså uppgiftens karaktär och kännedom om den enskilde elevens undervisningshistoria en viss roll. De uppgifter som analyseras här är knappast i sin helhet problem av en typ som eleverna är särskilt bekanta med. Detta gäller i synnerhet uppgift 2. Det skulle innebära att de är lämpliga för analyser i förhållande till van Hiele och VG-kriterier. Eftersom den inledande delen av uppgifterna innehåller kända deluppgifter (i synnerhet uppgift 1) så kan även betygskriteriernas G-nivå analyseras. Uppgift 1 är olämplig för van Hiele eftersom dess karaktär inte erbjuder någon utmaning att utnyttja ett nätverk av relationer högre än nivå 2. Uppgifterna är från början naturligtvis utformade för att möjliggöra bedömningar i förhållande till betygskriterierna. I synnerhet dessa breddningsuppgifter är avsedda att ha en låg ingångströskel, så att alla elever ska kunna komma igång, men samtidigt erbjuda möjligheter att visa kunnande på högsta nivå.

Att eleverna själva kan få välja vilken uppgift de vill arbeta med kan ha det positiva med sig att eleven känner sig motiverad och kan välja den uppgift där hon tror sig kunna visa sina kunskaper. Men vissa uppgifter kan ha begränsningar så att eleven inte kan visa sina kunskaper, och dessa begränsningar kan vara dolda för eleven. I det aktuella fallet fanns en avsiktlig skillnad mellan de två uppgifterna, där uppgift 2 förmodades locka till sig de mer teoretiskt inriktade och relativt högpresterande eleverna. Det kan vara så att valet av uppgift diskriminerar mellan elever med bredd och djup i kunskaper och elever med mer ytliga och rutinbetonade kunskaper. Resultat från genomförandet av uppgifterna som nationellt prov tyder dock inte på det. Elever med olika provbetyg på tidsbunden del väljer i stort sett på samma sätt. Eleverna genomskådar kanske inte mönstret, utan lockas att välja en uppgift som inte ger möjlighet att visa de kunskaper de har. Sannolikt kan motsatsen även vara fallet. Elever väljer en uppgift som har för hög ingångströskel, och får aldrig chansen att visa vad de kan. Att frånta eleven möjligheten att välja är ingen lösning, såvida inte den enda uppgiften som då presenteras är av en sådan kvalitet att den kan uppfylla alla högt ställda krav. En möjlighet är förstås att låta eleverna göra flera uppgifter för att öka reliabiliteten i bedömningen, men då åtgår mera tid. I resultaten från det nationella provet så finns vissa skillnader mellan kvinnor och män när det gäller val av uppgift. För de manliga elever som gjorde breddningsdelen så ökar andelen som valt uppgift 2 med provbetyget på den tidsbundna delen. Bland de kvinnliga eleverna minskar istället tendensen att välja uppgift 2 med betyget på tidsbunden del. Signalen om att de mest högpresterande eleverna skulle välja uppgift 2 verkar alltså ha fungerat sämre för kvinnor och uppgifterna verkar alltså ha skickat olika signaler till kvinnor och till män. Eftersom uppgift 1 inte direkt inbjöd till bedömningar av de högre betygen så riskerar kvinnliga provtagare att undervärderas.

Eleverna har i någon mån visat kunskaper inom samma kunskapsområden i de två uppgifterna, men helhetsintrycket är att de båda uppgifterna kompletterar varandra. Tillsammans kan dessa två uppgifter i ganska stor utsträckning täcka de mål att uppnå som ingår i A-kursens geometri. En annan form på gården (som t.ex. den parallelltrapets som några av eleverna arbetat med) skulle kunna stimulera till arbete med en större variation av former, till användning av grundläggande geometriska satser och till resonerande vid problemlösning.

Sammanfattning

De tre modeller som studeras och tillämpas här (betygskriterier, SOLO-nivåer och van Hieles nivåer av tänkande) skiljer sig åt när det gäller den inre strukturen. SOLO-bedömningen bygger på väldefinierade aspekter och görs analytiskt utifrån dessa. Van Hiele har en struktur, men den är svårare att sätta sig in i och förstå. Bedömningen är också mer holistisk jämfört med SOLO. Betygskriterierna saknar en övergripande struktur, men kan göras analytisk genom införandet av en struktur. SOLO och van Hiele är modeller om struktur i elevers tänkande. Betygskriterierna ger en mer komplex bild av elevers kunnande i matematik.

Både SOLO och van Hiele utgör egentligen undervisningsläror, de vill ta ett helhetsgrepp om undervisningen på ett område. Båda har ursprung i undervisningserfarenheten med de grundar sig på psykologisk teori, och kan sägas vara psykologiska modeller för struktur i elevers tänkande. Betygskriterierna har sitt ursprung i en pedagogiska praktik och har utformats av praktiserande lärare i hög grad. Här finns ingen teoribas, utom möjligen implicit de idéer som legat till grund för den gällande läroplanen. Betygskriterierna kan sägas vara en pedagogisk modell, utan teoretisk bas.

van Hiele	SOLO	Betygs-kriterier
↔		
stark teoretisk grund (i psykologi)		*svag teoretisk grund (i pedagogik)*

I bilden ovan illustreras de olika modellernas teoretiska grundvalar. Van Hiele har den starkaste teoretiska grunden (i psykologi), med SOLO inte långt därifrån. Betygskriteriernas svaga teoretiska grund (i en pedagogisk praktik) placerar dem långt ifrån de andra modellerna.

Modellerna är avsedda för olika vida ämnesområden. SOLO är avsedd för alla ämnen, betygskriterierna gäller gymnasieskolans matematik och van Hieles nivåer är i första hand utvecklade för geometri. De olika modellerna ställer vidare olika krav på de uppgifter som eleverna ska bedömas i förhållande till. För olika betygskriterier behövs såväl kända som nya situationer, SOLO rekommenderar kända uppgiftstyper och van Hiele förordar nya situationer.

SOLO och van Hiele har olika utgångspunkter när det gäller synen på kunskap, lärande och lärare. Resonemanget kring SOLO-taxonomin kan i ganska stor utsträckning relateras till svensk fenomenografisk forskning, åtminstone som den såg ut under första hälften av åttiotalet. Van Hieles tänkande kan i vissa avseenden sägas ligga närmare en läroplansteoretisk inriktning. Både SOLO och van Hiele har inspirerats av Piaget, men de förhåller sig också kritiskt till mycket av Piagets tänkande.

De bedömningar av elevernas lösningar som gjorts på grundval av de olika modellerna korrelerar i hög grad. Men här finns skillnader. Tydligast framträder hur elevlösningar som bedömts relationella i SOLO-termer inte uppfyller kraven för provbetyget Godkänd.

De skillnader mellan uppgifterna som här observerats kan delvis förklaras med att de elevgrupper som arbetat med uppgifterna är olika. Men framförallt kan skillnader i uppgifternas karaktär spela in. Enligt diskussionen ovan har de två uppgifterna olika relationer till de olika bedömningsmodellerna. Uppgifterna är utformade för att passa betygskriterierna, eftersom de konstruerades för att ingå i nationella kursprov. I uppgifterna ansågs ingå både kända och nya situationer. I uppgift 1 är sättet att arbeta med en uppgift nytt, eftersom elever i allmänhet är ovana vid större och friare matematikuppgifter, men problemställningen är inte ny eller problematisk. I uppgift 2 är sammanhanget nytt för eleverna, de har inte tidigare stött på denna typ av geometri. Uppgift 1 verkar inte erbjuda möjligheter för eleverna att visa högre kvaliteter av kunnande, framförallt inte i relation till SOLO-taxonomin och van Hiele.

Alla tre modellerna är möjliga att använda och säger något meningsfullt om elevernas matematikkunskaper, trots att t.ex. uppgifterna som eleverna arbetat med inte är idealiska för ändamålet. Modellerna fyller olika funktioner, betygssättning respektive bedömning av strukturell komplexitet, och ställer olika krav på de uppgifter man utgår ifrån.

När matematikuppgifterna som ligger till grund för denna studie användes i nationella kursprov så valde en majoritet av eleverna att arbeta med uppgift 1: Gården. Uppgift 2: Koordinatgeometri hade en inommatematisk utformning och den lockade i något högre grad de högpresterande manliga provtagarna, men inte de kvinnliga. I arbetet med olika uppgifterna visar eleverna kunskaper inom innehållsligt olika områden i kursplanen.

Några avslutande reflektioner

Arbetet med denna uppsats har gett mig en möjlighet att sätta mig in i och försöka beskriva tre intressanta modeller som kan bidra till förståelse av vad kvalitet i kunnande i matematik kan vara. Jag har även försökt utveckla en del tankar kring betygskriterier och diskutera några aspekter av två uppgifter som ingick i det nationella kursprovet i matematik våren 1996. Bedömningen av ett sextiotal elevlösningar utifrån dessa modeller har konkretiserat förståelsen av de olika perspektiven och visat på möjliga tillämpningsområden.

Den uppsats som arbetet lett fram till är omfattande eftersom jag velat ge en så fullständig bild som möjligt av de använda modellerna och de uppgifter som använts i analysen, och även ge viss inblick i det arbete och de tankar som föregick användningen av uppgifterna i nationella prov. Dessutom har en avsevärd del av arbetet med denna uppsats handlat om att tränga in i och försöka beskriva tankarna bakom SOLO och van Hieles nivåer av tänkande (vilket knappast kan göras kortfattat) och överföra dessa på det aktuella problemet.

De två uppgifter som behandlats i denna studie har konstruerats för att uppfylla vissa högt ställda krav, enligt det uppdrag som Skolverket givit provinstitutionen. Dessutom har naturligtvis provkonstruktörer och andra inblandade i utformningen av uppgifterna haft höga kvalitetsambitioner. Dessa sammanfattades på olika sätt innan provets genomförande och har redovisats ovan. Det är problematiskt att förhålla sig kritisk och fritt analyserande i förhållande till sitt eget arbete. Varje problem som uppmärksammas i denna studie är ju indirekt en kritik mot den egna förmåga att uppfylla alla de högt ställda kraven. Om objektivitetsproblemet lyfts fram så kommer det att vara möjligt att behandla. Sedan är det upp till läsaren att avgöra om analysen är trovärdig eller inte. Förhoppningsvis ska det visa sig att analysen inte bygger på förutfattade meningar, utan att den kan vara utforskande och att slutsatser baseras på argument som är trovärdiga och underbyggda.

Eftersom bedömningarna och värderingarna endast har gjorts av en person vid ett enda tillfälle så kan naturligtvis reliabiliteten i olika klassificeringar ifrågasättas. För att bättre kunna värdera de olika modellernas relationer till varandra i förhållande till olika elevers arbeten, skulle bedömningen kunnat upprepas vid ett senare tillfälle eller i någon utsträckning göras av andra bedömare. För att på ett bättre sätt fastställa tillämpningsområden, möjligheter och problem med de undersökta modellerna för bedömning av elevers kunskaper i matematik så skulle även elevers lösningar till andra matematikuppgifter kunna undersökas. Uppgifterna skulle då medvetet kunna utformas så att de passar de använda modellerna optimalt.

I denna studie har tre modeller utforskats och en ytterligare belysning av möjligheterna att bedöma elevers kunnande i matematik skulle fås om andra taxonomier eller modeller undersöktes. Flera uppslag finns i kapitlet om kvaliteter i kunnande. Särskilt intressant är den revidering av Blooms taxonomi som en forskargrupp i USA arbetar med vilken kommer att publiceras i en bok hösten 1998.

Avslutningsvis återkommer vi till de grundläggande frågor som ställdes i inledningen som utgångspunkt för diskussionen, bl.a. Vad menas med kvalitet i matematikkunskaper och hur visar sig dessa kvaliteter i elevers skriftliga lösningar till olika uppgifter? De modeller för kvalitativ bedömning av elevers matematikkunskaper som tillämpats här har visat sig användbara i detta avseende. De har naturligtvis både förtjänster och brister, de lyfter fram olika aspekter av kvalitets- och kunskapsbegreppen, de har delvis olika tillämpningsområden osv. Det står dock helt klart att elever både kan och vill visa kunskaper på hög nivå om de får chansen, dvs de vill visa prov på kvalitet i sina matematikkunskaper. Det är upp till oss som lärare, forskare och provkonstruktörer att skaffa oss verktyg som ser bortom stavfel och enkla minneskunskaper och istället inriktas på strukturerat tänkande, kreativitet och problemlösning.

REFERENSER

Andersson, H. (1991). *De relativa betygens uppgång och fall.* Akademisk avhandling, Umeå universitet.

Battista, M.T.,Clements, D.H. (1995). Geometry and Proof. *Mathematics Teacher, 88,* 48-54.

Biggs, J.B., & Collis, K.F. (1982). *Evaluating the Quality of Learning. The SOLO Taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome).* New York: Academic Press.

Bloom, B.S. (Ed.) (1956). *Taxonomy of educational objectives: The cognitive domain.* New York: McKay.

Burger, W.F. & Culpepper, B. (1993). Restructuring Geometry. In: P. S. Wilson (Ed.), *Research Ideas for the Classroom. High School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Burger, W.F., & Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17,* 31-48.

Chick, H.L., Watson, J.M. & Collis, K.F. (1988). *Using the SOLO taxonomy for error analysis in mathematics.* Research in Mathematics Education in Australia June 1988 pp. 34-46.

van Hiele, P.M., (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education.* London: Academic Press.

van Hiele, P.M., (1955). De niveau's in het denken, welke van belang zijn bij het onderwijs in de meetkunde in de eereste klass van het V.H.M.O. In *Paedagogische Studiën XXXII*. Groningen: J.B. Wolters.

van Hiele, P.M., (1957). *De problematiek van het inzicht, gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkundeleerstoff*. Dissertation. Groningen: J.B. Wolters.

Jansson, S. (1975). *Undervisningsmål som utgångspunkt vid konstruktion av målrelaterade prov. Några teoretiska och empiriska problem*. Akademisk avhandling, Umeå universitet.

Lindström, J-O. (1994). *Nationella kursprov i matematik – en introduktion.* Umeå: Enheten för pedagogiska mätningar, Umeå universitet.

Lindström, J-O, Nyström, P. & Palm, T. (1996). *Nationellt kursprov i matematik. Kurs A, C och E, VT –96. Resultat och kommentarer*. Umeå: Enheten för pedagogiska mätningar, Umeå universitet.

Ljung, G. (1991). *Centrala prov i matematik på NT-linjerna 1985-1989. Analys av innehåll och resultat.* Stockholm: PRIM-gruppen, Högskolan för lärarutbildning i Stockholm.

Marklund, S. (1987). *Skolsverige 1950-1975, Del 5*. Stockholm: Utbildningsförlaget.

Marton, F. (1976). What does it take to learn? Some implications of an alternative view of learning. I Entwistle, N. (ed.) *Strategies for research and development in higher education.* Amsterdam: Swets and Zeitzlinger.

Mattsson, H. (1989). *Proven i skolan, sedda genom lärarnas ögon.* Akademisk avhandling, Umeå universitet.

Olive, J. (1991). *Logo Programming and Geometric Understanding: An In-Depth Study*. Journal for Research in Mathematics Education, 22, 90-111.

Pettersson, A. (red) (1994). *Centrala prov i matematik på SE-linjerna 1989-1993. Analys av innehåll och resultat.* Stockholm: PRIM-gruppen, Högskolan för lärarutbildning i Stockholm

Robert, A. & Schwarzenberger, R. (1991). In D. Tall (Ed): *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer.

Schroeder, H.M., Driver, M.J. & Streufert, S. (1967). *Human information processing.* New York: Holt, Rinehart & Winston.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of a metaphor. *For the Learning of Mathematics, 14*, 44-45.

Sierpinska. A. (1994). *Understanding in Mathematics.* London: The Falmer Press.

Skemp, R. (1978). Relational and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher, 26*, 9-15.

Skolverket (1994). *Betygsboken – om betygskriterier i ett nytt betygssystem för gymnasieskolan och gymnasial vuxenutbildning.* Stockholm: Liber Distribution.

Skolverket (1995). *Betygsboken 2 – om betygskriterier i ett nytt betygssystem för gymnasieskolan och gymnasial vuxenutbildning.* Stockholm: Liber Distribution.

Skolverket (1996). *Nationellt kursprov Matematik A. Information till lärare.* Stockholm: Liber Distribution.

SKOLFS 1994:9. *Förordning om kursplaner i kärnämnen för gymnasieskolan och den gymnasiala vuxenutbildningen.* Stockholm: Fritzes.

SKOLFS 1994:11. *Skolverkets föreskrifter om betygskriterier för nationella kurser i gymnasieskolan och inom gymnasial vuxenutbildning.* Stockholm: Fritzes.

SKOLFS 1996:22. *Skolverkets föreskrifter om ändring i Skolverkets föreskrifter (SKOLFS 1994:11) om betygskriterier för nationella kurser i gymnasieskolan och inom gymnasial vuxenutbildning.* Stockholm: Fritzes.

Skolöverstyrelsen. (1971). *Betygsättning i grundskola och gymnasieskola. Rapport utarbetad av skolöverstyrelsens arbetsgrupp för betygsfrågor.* Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.

SOU 1992:59. *Läraruppdraget. Prövning av principen för ett kunskapsrelaterat betygssystem, Betygsberedningen.* Stockholm: Allmänna förlaget.

SOU 1992:86. *Ett nytt betygssystem. Slutbetänkande av betygsberedningen.* Stockholm: Allmänna förlaget.

Utbildningsdepartementet (1994). *Läroplaner för det obligatoriska skolväsendet och de frivilliga skolformerna*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Wiliam, D. (1995). *Evidential and consequential bases for standard setting.* Paper presented at the Third SweSAT Conference in Umeå, May 1995.

Wilson, J.W. (1971). Evaluation of Learning in Secondary School Mathematics. In B.S. Bloom, J.T. Hastings & G.F. Madaus (Eds.), *Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning*. New York: McGraw-Hill.

Tabell 12 Sammanställning över bedömningen av elevlösningar i förhållande till betygskriterier, SOLO och van Hiele.

Elev nr	*Uppg nr*	*Betygskriterier*					*SOLO*	*Van Hiele*
		I	*II*	*III*	*IV*	*Tot*		
1	2	IG	G?	?	G?	IG	MS/US	1
3	2	G-	VG	?	G	G	MS	2
4	2	IG	G?	?	G	IG	MS/US	1-2
11	2	G-	G-	G?	G?	G-	MS/US	1
16	2	?	VG	?	G+	G+	MS	2
18	2	VG	G	G	VG	VG	UA	3
19	2	IG?	IG	?	IG	IG	MS/US	? *
20	2	G	VG	?	G+	VG	R	2
21	2	G-	VG	?	G	G	MS	2
22	2	VG	G	G+	V	VG	UA	3
23	2	VG	VG	G+	VG	VG	R	3
24	2	G	G	G	G	G	R	1-2
25	2	G-	VG	?	G	G	MS	1-2
26	2	VG	VG	VG	G+	VG	UA	3
27	2	IG?	IG	?	IG	IG	MS/US	? *
60	2	G	G	?	G	G	MS/US	2
2	1	VG	G	G	VG	VG	R	
5	1	VG	G	G	VG	VG	R	
6	1	VG	G	G	VG	VG	R	
7	1	G	G	G	G+	G	R	
8	1	VG	G	G	VG-	VG	R	
9	1	G	G	G	G+	G	R	
10	1	VG-	G	G	G+	VG-	R	
12	1	G-	G	G	IG	IG	R	
13	1	G-	G	G	G	G	R	
14	1	G	G	G	G	G	R	
15	1	G+	G	G	G+	G+	R	
17	1	G	G	G	G	G	R	
28	1	VG	G	G	G+	VG	R	
29	1	G	G	G	G-	G	R	
30	1	G+	G	G	VG	VG?	R	
31	1	G-	G	G	G	G	R	
32	1	G-	G	G	G	G	R	
33	1	IG	IG	IG	IG	IG	MS	
34	1	G-	G	G-	IG	IG	R	
35	1	G-	IG	G-	IG	IG	R?	
36	1	IG	IG	?	IG	IG	R?	
37	1	IG	G	IG	IG	IG	MS?	
38	1	G-	IG	G-	IG	IG	MS?	
39	1	G-	G	G-	G	G	R	
40	1	G	G	G	IG	IG	R	
41	1	G	G	G	G-	G	R	
42	1	G-	IG	G	?	IG	R	

Tabell 12 forts.

Elev nr	*Uppg nr*	*Betygskriterier*					*SOLO*	*Van Hiele*
		I	*II*	*III*	*IV*	*Tot*		
43	1	G-	G	G	G-	G	R	
44	1	G	G	G-	G	G	R	
45	1	VG-	G	G-	G	G	R	
46	1	G-	G	G	G-	G	R	
47	1	IG	IG	?	?	IG	MS? US?	
48	1	G	G	G	G	G	R	
49	1	?	IG	?	IG	IG	MS? US?	
50	1	G+	G	G	VG	VG	R	
51	1	G-	G-	G	IG	IG	R	
52	1	IG	G-	G	G-	IG	R	
53	1	VG	G	G	VG	VG	R	
54	1	G+	G	G	G+	G+	R	
55	1	IG	G-	G	G	IG	R	
56	1	IG	G	?	IG	IG	R?	
57	1	IG	IG	?	IG	IG	MS	
58	1	VG-	G	G	VG-	VG	R	
59	1	IG	G	IG	IG	IG	R	
61	1	IG	IG	G	IG	IG	R	

* Markerar två elevlösningar där uppgiften missuppfattats, sannolikt beroende på språksvårigheter hos elever med invandrarbakgrund.

Bilaga 2

Kurs: **Matematik A**
Poäng: **110**

Mål

Målet för kursen är att ge de matematiska kunskaper som krävs för att ta ställning i vardagliga situationer i privatliv och samhälle. Dessutom skall kursen ge en grund som svarar mot de krav yrkesliv och fortsatta studier ställer.

Efter genomgången kurs skall eleven

i aritmetik (R)

R1 ha fördjupat och vidgat sin taluppfattning till att omfatta reella tal skrivna på olika sätt

R2 ha ökat sin förmåga att räkna i huvudet,
göra överslag
och välja lämplig enhet vid problemlösning
samt ha erfarenhet av användning av datorprogram vid beräkningar

R3 kunna välja beräkningsmetod
och lämpligt hjälpmedel vid numerisk räkning,
vara van vid att kontrollera resultatets rimlighet
och inse att räkning med mätetal ger resultat med begränsad noggrannhet,

R4 förstå innebörden av och kunna använda begreppen ändringsfaktor,
promille, ppm,
index,
prefix och potenser med heltalsexponenter.

i geometri och trigonometri (G)

G1 kunna tillämpa grundläggande geometriska satser samt förklara de formler och förstå de resonemang som används vid problemlösning,

G2 kunna beräkna omkrets och area för plana figurer
och begränsningsarea och volym för några enkla kroppar
samt kunna rita tillhörande figurer,

G3 kunna utnyttja skala för beräkningar och för att tolka och konstruera ritningar och kartor,

G4 kunna använda begreppen sinus och cosinus för att lösa enklare problem.

i statistik (S)

S1 kunna tolka och kritiskt granska data från olika källor,
beräkna enkla lägesmått
samt själv presentera data i tabell- och diagramform för hand och med tekniska hjälpmedel,

S2 kunna kritiskt granska vanligt förekommande typ av statistik i samhället.

i algebra (A)

A1 kunna teckna, tolka och använda enkla algebraiska uttryck och formler
samt kunna tillämpa detta vid praktisk problemlösning,

A2 kunna lösa linjära ekvationer
och enkla potensekvationer med för problemsituationen lämplig metod - numerisk, grafisk eller algebraisk.

i funktionslära (F)

F1 kunna rita och tolka enkla grafer som beskriver vardagliga förlopp,

F2 kunna ställa upp, använda och grafiskt åskådliggöra linjära funktioner
och enkla exponentialfunktioner
som modeller för verkliga förlopp inom t.ex. privatekonomi, samhällsförhållanden och naturvetenskap,

F3 kunna utnyttja grafritande hjälpmedel.

Bilaga 3

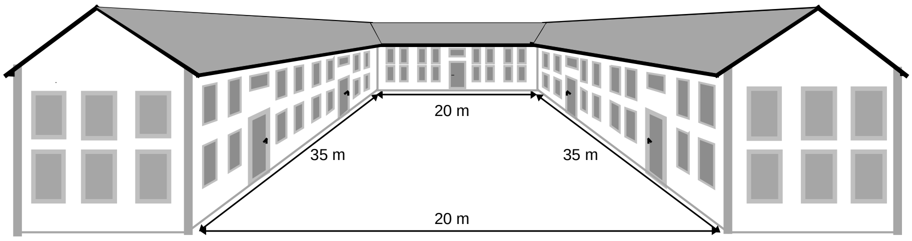
1. GÅRDEN

I bostadsrättsföreningen Renen ingår totalt 30 lägenheter. Hittills har man haft en ganska trist gårdsplan men nu vill de boende göra något fint på sin gård. De vill ha ett trevligt grönområde mellan husen och en sandtäckt lekplats med arean 40 - 50 m^2. Gungställning och annan utrustning till lekplatsen finns redan.

Föreningen behöver hjälp med en ritning i lämplig skala samt en utförlig kostnadsberäkning. På ritningen ska gräsytor, gångvägar, träd och buskar vara utsatta.
De boende vill inte betala mer än 1500 kr per lägenhet. Arbetet kan de göra själva.
Gården har formen av en rektangel med mått enligt skissen nedan.

- GÖR ETT FÖRSLAG!

- REDOVISA MED EN SKALENLIG RITNING OCH EN KOSTNADSBERÄKNING



	Pris	Förutsättningar
Träd	300 kr/st	Det bör vara minst 5 m mellan varje träd
Buskar	80 kr/st	Det bör vara 2-3 m mellan buskarna
Asfaltering	180 kr/m^2	Alla gångvägar täcks med asfalt. För 180 kr/m^2 gör en firma hela jobbet.
Matjord	115 kr/ m^3	Ett 10 - 20 cm tjockt lager krävs för att få fin gräsmatta
Gräsfrö	2 kr/ m^2	
Sand	175 kr/ m^3	Cirka 20 cm tjockt lager sand behövs för lekplatsen
Lekredskap		Gamla lekredskap kan återanvändas

Vid bedömningen av ditt arbete kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur du genomför dina beräkningar
- hur du redovisar ditt arbete och motiverar dina resultat
- hur lämpligt ditt förslag är för ändamålet
- hur du konstruerar och redovisar din ritning
- om ditt förslag följer de givna förutsättningarna
- vilka matematiska kunskaper du visar

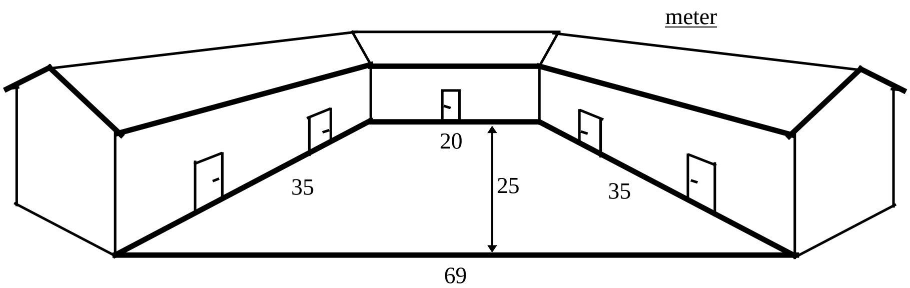
Bilaga 4

GÅRDEN

I bostadsrättsföreningen Renen ingår totalt 20 lägenheter. Hittills har man haft en ganska trist gårdsplan men nu vill de boende göra något fint på sin gård. De vill ha ett trevligt grönområde mellan husen..
Föreningen behöver hjälp med en ritning i lämplig skala samt en kostnadsberäkning. På ritningen ska gräsytor, gångvägar, träd, buskar och rabatter vara utsatta.
De boende vill inte betala mer än 1000 - 1200 kr per lägenhet. Större delen av arbetet kan de göra själva
Gårdens mått framgår av skissen nedan.

GÖR ETT FÖRSLAG!

Redovisa med en skalenlig ritning och en kostnadsberäkning.



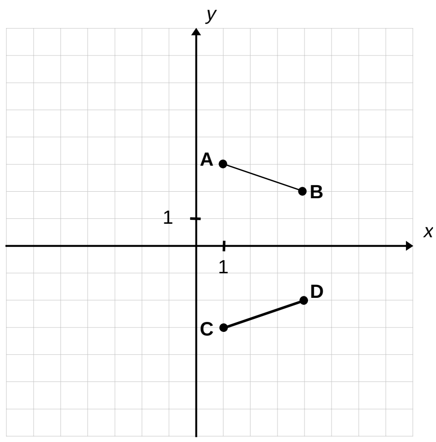
	Pris	Förutsättningar
Träd	300 kr/st	Det måste vara minst 5 m mellan varje träd
Buskar	80 kr/st	Det ska vara 2-3 m mellan buskarna
Grus	200 kr/m^3	Alla gångvägar ska vara grustäckta
Matjord	115 kr/ m^3	10 cm lager krävs för att få fin gräsmatta
Gräsfrö	2 kr/ m^2	
Blomfrö	2 kr/ m^2	
Kantsten	45 kr/st	Sätts mellan gräsmatta och grusgångar, längd 70 cm

2. KOORDINATGEOMETRI

I ritprogram är man ofta intresserad av att avbilda geometriska figurer. Detta kan ske på olika sätt. Här visas två sådana metoder.

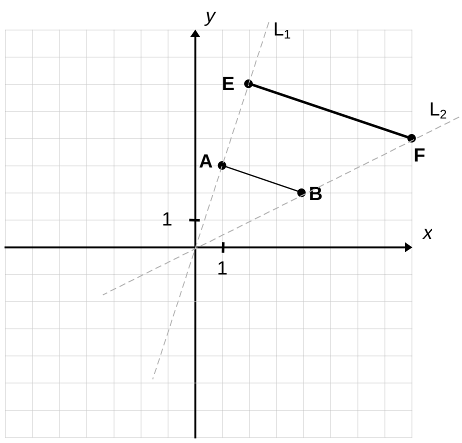
Metod I: spegling

Då sträckan AB speglas i *x*-axeln får vi sträckan CD.



Metod II: sträckning

En linje L_1 har dragits genom punkten A och origo. På denna linje placeras E så att avståndet mellan E och origo är dubbelt så stort som avståndet mellan A och origo. På motsvarande sätt placeras punkten F med hjälp av linjen L_2.



Lös uppgifterna på nästa sida!

Rita ett koordinatsystem på ditt svarspapper. Använd samma skala som i figurerna ovan. Rita in en triangel med hörnen i (1, 4), (5, 1) och (8, 5).

a) Rita en ny triangel genom att spegla triangeln i *x*-axeln (enligt metod I).

Beskriv hur du gjorde då du konstruerade spegelbilden och ange koordinaterna för triangelns hörn.

Beskriv allt annat du vet och kan ta reda på om de båda trianglarna som du ritat. Redovisa dina beräkningar och resonemang.

b) Rita en ny triangel genom att tillämpa metod II på triangeln du ritat inledningsvis.

Jämför den nya triangeln med den ursprungliga. Beskriv skillnader och likheter.

I beskrivningen av metod II får du de nya punkternas avstånd till origo genom att multiplicera de gamla punkternas avstånd till origo multipliceras med faktorn 2 (dubblering).
Undersök vad som händer om du använder en annan faktor.

I beskrivningen av metod II var origo utgångspunkt för linjerna L_1 och L_2 som användes vid konstruktionen av den nya figuren.
Undersök vad som händer om du använder en annan punkt.

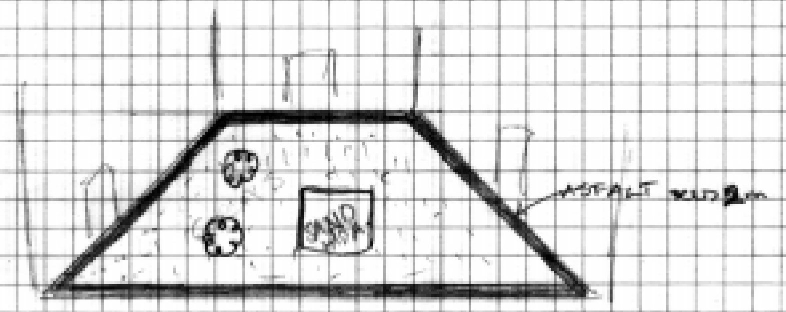
Vid bedömningen av ditt arbete kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur du tillämpar grundläggande geometriska begrepp och satser
- hur du redovisar ditt arbete och motiverar dina resultat
- hur du förstår och tillämpar de givna instruktionerna
- vilka matematiska kunskaper du visar
- hur du beskriver, jämför och diskuterar de olika trianglarna
- hur du genomför undersökningarna i uppgiften

Elev nr 52 Bilaga 6

1. GÅRDEN

30lägenhet · 1500kr = 45000

- De har 45000 kr för att slösa.
- A = 20·35 = 700 Gården är 700m²



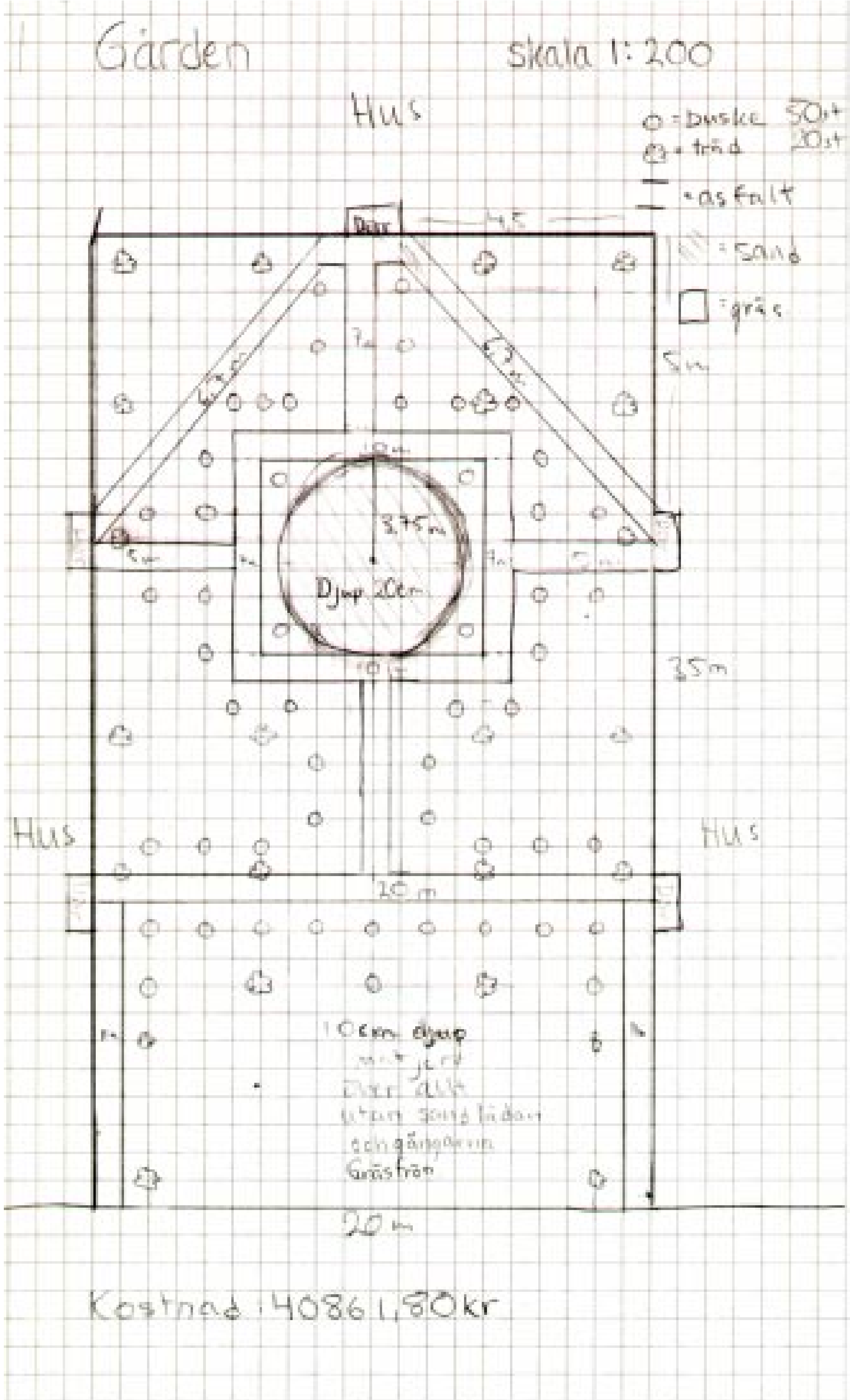
- ASFALTERING O = 20 + 35 + 20 + 35 = 110m
  A = 110 · 2 = 220 m²
  180 · 220 = 39600

Asfaltering kommer att kosta 39600 kr.
45000 − 39600 = 8100
De har kvar 8100 kr.

- SANDLÅDA 40 · 175 = 7000 kr
  De har 1100 kr kvar.
- GRÄS 700m² − 40m² − 220m² = 440 m²
  440 · 2 = 880 kr för gräs.
  1100 − 880 = 220

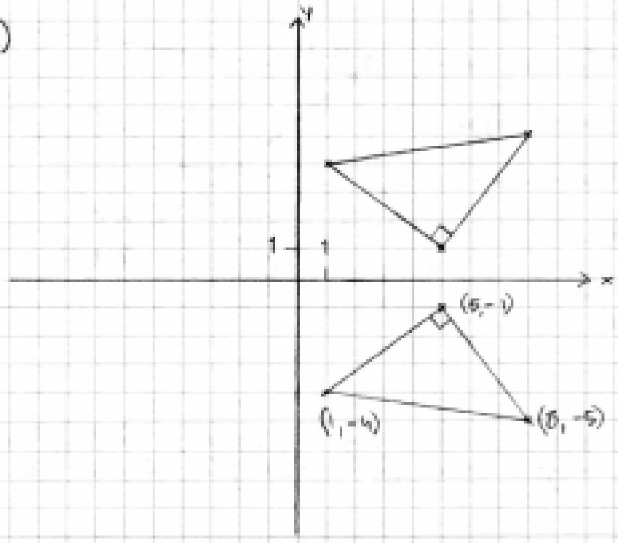
Nu har de kvar 220 kr för 2 Buskar som kostar 80 kr/st
220 − 160 = 60 De har 60 kr kvar.
köpa godis åt barnen!!

Elev nr 56 Bilaga 7



Elev nr 16 Bilaga 8

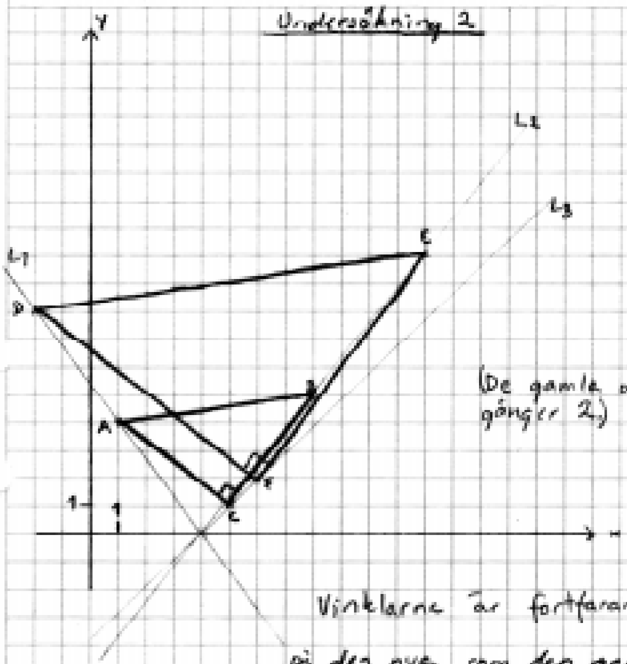
2a)



Jag gjorde alla y-värden negativa och behöll de positiva x-värdena.

Båda trianglarna är rätvinkliga. Alltså en vinkel i varje triangel är 90° de andra 4 vinklarna är 45°.

Undersökning 2



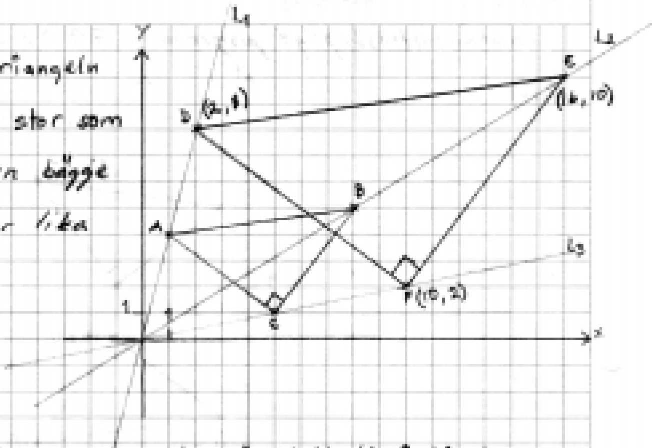
(De gamla avstånden till 4 gånger 2.)

Vinklarna är fortfarande lika stora på den nya som den gamla. Trianglarna är parralella med varandra.

Avståndet mellan D och koordinaten (4,0) är dubbelt så stort som A och koordinaten (4,0). Detta gäller även för EB och FC också.

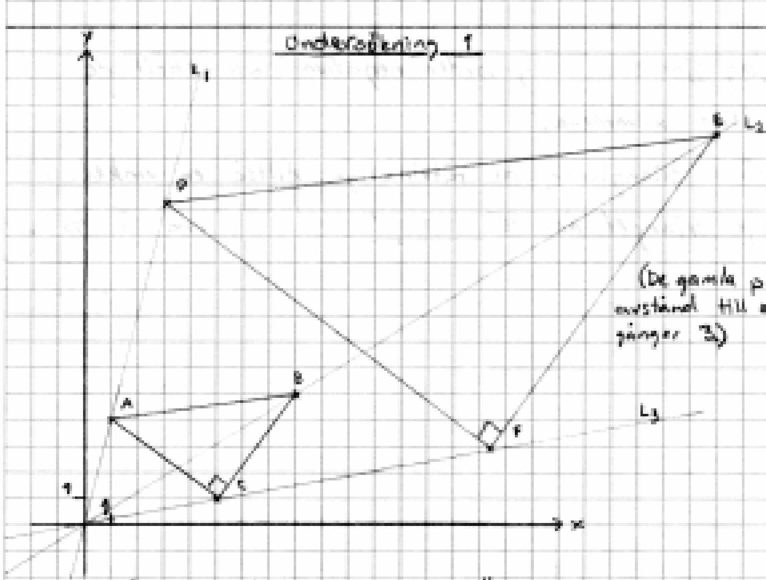
b) Den nya triangeln är dubbelt så stor som den gamla men bägge trianglarna har lika stora vinklar.

Trianglarna är parralella med varandra.



Avståndet mellan D och origo är dubbelt så långt som mellan A och origo. Detta gäller även för EB och FC också.

Undersökning 1



(De gamla punkternas avstånd till origo gånger 3)

Avståndet mellan D och origo är 3ggr så stort som mellan A och origo. Detta gäller även för EB och FC också.

Den nya triangeln är 3ggr så stor som den gamla

Vinklarna är fortfarande lika stora i bägge vinklarna.

Trianglarna är parralella med varandra