EN TOLKNING AV MÅLEN MED DEN SVENSKA GYMNASIEMATEMATIKEN OCH TOLKNINGENS KONSEKVENSER FÖR UPPGIFTSKONSTRUKTION

Torulf Palm
Ewa Bergqvist
Ingela Eriksson
Timo Hellström
Carl-Magnus Häggström

Pm nr 199, 2004

UMEÅ UNIVERSITET

ISSN 1100-696X
ISRN UM-PED-PM--199--SE

Innehåll

1 Inledning

Denna rapport är resultatet av en analys av läroplan, programmål, kursplan och betygskriterier gällande för den svenska gymnasiematematiken. Analysen är gjord av Arbetsgruppen för nationella prov vid Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar (BVM), Umeå universitet, och rapporten beskriver den tolkning som arbetsgruppen utifrån analysen har gjort av de nämnda styrdokumenten. Tolkningen ligger till grund för konstruktionen av de nationella kursproven i matematik för kurs B-D, och kursprovet i matematik för kurs E i den Nationella provbanken. Det som sägs här ska ses som en av eventuellt flera möjliga tolkningar av styrdokumenten.

År 1994 genomfördes en skolreform i Sverige. Nya styrdokument i form av läroplaner, programmål, kursplaner och betygskriterier infördes. För gymnasieskolan kom sedan reviderade kursplaner år 2000 (Skolverket, 2000). Det nya betygssystem som var en del av reformen beskrivs som ett mål- och kunskapsrelaterat system där elevernas prestationer ska relateras till de mål som anges i styrdokumenten (Skolverket, 1995; Skolverket, 2000; Utbildningsdepartementet, 1994). Detta utgör en skillnad jämfört med det tidigare betygssystemet som var ett normrelaterat system där elevernas prestationer skulle rangordnas i förhållande till varandra. Det nya systemet har en starkare prägel av decentralisering än det tidigare. Varje skolenhet ska nu göra lokala tolkningar av de generellt skrivna styrdokumenten. Tolkningarna ska vara tillräckligt specifika för att undervisningen ska kunna läggas upp på ett sådant sätt att eleverna får bra möjligheter att uppnå de mer konkreta mål som de lokala tolkningarna av styrdokumenten ska utgöra.

Reformen innebar också införandet av ett nationellt provsystem med huvudsyftet att ”implementera måldokumenten och bidra till att öka likvärdigheten i betygssättningen över landet” (Skolverket, 2002, s. 9). Även de som arbetar med konstruktionen av dessa prov behöver göra en tolkning av styrdokumenten. Detta är en förutsättning för konstruktion av högkvalitativa prov som speglar en rimlig tolkning av styrdokumenten, och som är sådana att elevernas provresultat kan användas som goda indikatorer på måluppfyllelse i förhållande till måldokumenten.

Traditionellt har innehållet som en utbildning ska behandla formulerats som en lista över ämnesmoment och begrepp som eleverna ska lära sig något om, samt metoder och tekniker som de ska kunna använda. Utöver detta har det ofta funnits en inledande beskrivning av ämnets övergripande mål och karaktär, ofta i ganska generella termer (Niss, 1999). Så kan även de svenska ämnesspecifika styrdokumenten av idag beskrivas. I kursplanen finns för varje kurs ”Mål som eleverna skall ha uppnått efter avslutad kurs”. Dessa beskriver i mångt och mycket delområden av matematiken som respektive kurs ska behandla, samt något om de metoder som eleverna ska kunna använda. Till exempel är ett mål eleverna ska ha uppnått efter avslutad B-kurs att ”kunna arbeta med räta linjens ekvation i olika former samt lösa linjära olikheter och ekvationssystem med grafiska och algebraiska metoder” (Skolverket, 2000, s. 83). I tillägg finns inledande delar i kursplanen med rubrikerna ”Ämnets syfte”, ”Mål att sträva mot” och ”Ämnets karaktär och uppbyggnad”. Dessa delar är relativt generellt skrivna och beskriver ämnets övergripande karaktär och de övergripande målen med utbildningen i ämnet. I linje med det mål- och kunskapsrelaterade betygssystemet så finns också betygskriterier för varje betygsnivå som ska tolkas utifrån beskrivningarna av ämnet och dess olika mål.

En av nackdelarna med denna uppbyggnad är att vad det innebär att kunna ämnet ofta blir identifierat med den lista över ämnesmoment och metoder som formuleras. Denna lista utgörs i vårt svenska exempel av de mål de skrivs att eleverna ska ha uppnått efter respektive kurs. En sådan identifikation innebär ofta en kraftig reduktion av den bild av ämneskunskapen som i styrdokumenten framförs genom den samlade beskrivningen av ämnet och målen med ämnesutbildningen (Niss, 1999).

Målet med den tolkning som presenteras i denna rapport är att den ska konkretisera de generella delarna av styrdokumenten så att denna tolkning tillsammans med en tolkning av de mål där det anges vad eleverna ska ha uppnått efter respektive kurs ska kunna användas som en konkret bas för prov- och uppgiftskonstruktion, men även för andra undervisningsaktiviteter. Tanken är att denna konkreta beskrivning av vad det innebär att kunna ämnet matematik ska ge en samlad bild av det centrala ämneskunnande som framförs i styrdokumenten. Ett undantag är dock gjort, och det gäller kunskap om matematikens idéhistoria. Det är ett område som nämns i olika delar av kursplanen och som bör behandlas i undervisningen. Kompetens inom detta område är däremot inte beskriven i denna rapport eftersom ett huvudsyfte med rapporten är att den ska användas som bas för konstruktion av nationella prov och vi har gjort bedömningen att detta område för närvarande inte lämpar sig för att inkluderas i dessa prov. Varje skolenhet kan (och ska) göra en egen tolkning av styrdokumenten. Eftersom möjligheterna att välja olika innehåll inom detta område är stort och den svenska lärarkåren saknar gemensamma erfarenheter av området skulle en tolkning av nationella provgruppen på just detta område för närvarande innebära en alltför stor reduktion av de enskilda skolornas tolkningsutrymme.

Resultatet av analysen består av ett antal *matematiska kompetenser* som betonas i styrdokumenten och som har tolkats som centralt matematiskt kunnande i alla gymnasiekurser. Dessa kompetenser behöver uppnås för att de övergripande syftena med den svenska gymnasieutbildningen i matematik ska uppnås och de används sedan inom de olika matematiska ämnesområdena (algebra, differentialkalkyl etc.) som ingår i respektive kurs. De nationella kursproven behöver därför konstrueras så att de speglar dessa kompetenser.

Kapitel 2 innehåller en argumentation för den gjorda tolkningen och en kort beskrivning av de uttolkade kompetenserna. I kapitel 3 finns argumenterat för och beskrivet en uppgiftstyp som inte primärt syftar till att spegla någon specifik kompetens, men som anknyter till något i läroplanen betonat perspektiv. Denna uppgiftstyp anses därför ändå vara viktig att inkludera i proven då den kan bidra till uppnåendet av målen i läroplanen om skolans värdegrund. I kapitel 4 återfinns en kort internationell utblick. I kapitel 5 beskrivs sedan kompetenserna mer utförligt. I detta kapitel finns också beskrivningar av olika uppgiftstyper som för sin lösning kan förväntas kräva dessa olika kompetenser, beskrivningar av uppgifter som anknyter till något av de betonade perspektiven i läroplanen samt ett antal kommenterade konkreta exempel på uppgifter.

2 Argumentation för uttolkade kompetenser

I kursplanen förs tre huvudsyften med matematikutbildningen i gymnasieskolan fram (Skolverket, 2000, s. 73). Ett syfte är att utbildningen ska ge tillräckliga kunskaper i matematik för att stödja studier i andra ämnen och för vidare studier inom ämnet matematik. Ett andra syfte med utbildningen är att eleverna ska tillägna sig nödvändiga kunskaper för ett liv utanför skolan. Det tredje syftet är att eleverna skall få känna glädjen i att utveckla sig matematiskt som ett värde i sig själv. Relevansen av dessa syften blir tydlig när bilden av ämnets karaktär och uppbyggnad målas upp (Skolverket, 2000, s. 74-76). Matematiken beskrivs som utvecklad ur såväl praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska och utvidga matematiken som sådan. Den beskrivs också som en förutsättning för stora delar av samhällets utveckling och som genomsyrande hela samhället. Dessa tre syften ligger också helt i linje med de övergripande syften med skolan som beskrivs i läroplanen (Utbildningsdepartementet, 1994) och som gäller generellt för alla ämnen.

För att avgöra vilka matematiska kunskaper eleverna behöver tillägna sig för att de ovan beskrivna syftena med matematikutbildningen ska uppnås behövs en noggrann analys av läroplan och programmål, men framför allt av kursplanen och betygskriterierna som specifikt behandlar ämnet matematik. Den följande argumentationen beaktar de två förstnämnda dokumenten men bygger till största delen på de ämnesspecifika dokumenten.

2.1 Problemlösningskompetens

Enligt kursplanens beskrivning av matematikämnets karaktär och uppbyggnad är matematiken en livaktig vetenskap som ständigt utvecklas och har så gjort ur såväl praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska och utvidga matematiken som sådan. Matematiken ses som en mänsklig tankekonstruktion och matematisk problemlösning som en skapande aktivitet. Ämnet ska inte uppfattas som ett opersonligt färdigt ämne som är uppbyggt av fasta regler som endast skall läras utantill (Skolverket, 2000, s. 74-75).

Detta får följder för vad det kan innebära att utvecklas matematiskt och för vilka kunskaper som kan vara viktiga att behärska såväl för vidare studier som för livet utanför skolan. Att kunna lösa ”problem” lyfts fram på många ställen i kursplanen och betygskriterierna. Det framgår dock inte klart vad som menas med begreppen ”problem” och ”problemlösning”. Termen ”problem” har använts i litteraturen i många olika betydelser, från att betyda alla olika uppgiftstyper till uppgiftstyper som bara möts av forskningsmatematiker i forskningsfronten (Lithner, 2003), och användningen av termerna i styrdokumenten ger olika signaler om dess betydelse. För att ”problemlösning” ska vara en skapande aktivitet som kräver mer än endast en användning av utantill inlärda regler behöver dock ett ”problem” kunna betyda en uppgift till vilken problemlösaren inte har en färdig lösningsmetod tillgänglig. För att kunna lösa sådana ”problem” behövs vad vi i detta dokument kallar *problemlösningskompetens*.

2.2 Algoritmkompetens

Att ämnet inte ska uppfattas som ”uppbyggt av fasta regler som endast skall läras utantill” (Skolverket, 2000, s. 75) kan dock knappast tolkas som att vissa ’regler’ inte ska behärskas rutinmässigt. För att ha goda möjligheter i sina fortsatta matematikstudier och effektivt kunna tillämpa matematiken i andra ämnen och i livet utanför skolan är det nödvändigt att behärska ett antal standardprocedurer för uppgiftslösning. En säkerhet i standardprocedurer underlättar lärandet avsevärt eftersom de ingår i metoder som används för att visa på giltigheten hos nya metoder och satser samt innebörden av nya begrepp. En viktig förutsättning för effektiv matematisk problemlösning, både inommatematisk och som tillämpning i andra ämnen och utanför skolan, är också att grundläggande standardprocedurer behärskas rutinmässigt. Utan tillgång till en kunskapsbas bestående av begrepp, satser och standardprocedurer som lätt kan tas fram ur minnet begränsas möjligheten att mobilisera och fokusera tänkandet i problemlösningssituationer på ett mindre antal kreativa och nyskapande moment. Ett behärskande av algoritmer är därför nödvändigt för en effektiv användning av matematiken då eleven ställs inför både rutinmässiga och icke rutinmässiga situationer. Med algoritmer menas här en inlärd procedur i ett eller flera steg där alla stegen och den övergripande ordningsföljden för de ingående stegen är väl kända för uppgiftslösaren. Att uppnå en algoritmkompetens innebär att vissa algebraiska färdigheter, ekvationslösningsmetoder och tillvägagångssätt vid lösning av andra kända uppgiftstyper behärskas. Det innebär också att relevanta hjälpmedel som till exempel miniräknare behärskas.

2.3 Begreppskompetens

Oavsett om syftet med lärande i matematik är framgång i vidare studier i matematik eller i studier i andra ämnen, livet utanför utbildningen eller för det egna matematiska välbefinnandet är förståelsen av de i kursen centrala matematiska begreppen av största vikt. Till exempel är god kunskap om nya begrepp ofta beroende av god kunskap om begrepp som tidigare introducerats, och framgång i vidare matematikstudier underlättas därför av god förståelse av begrepp ingående i tidigare kurser. Att lösa uppgifter som inte kan lösas genom att använda standardprocedurer som kan förknippas med problemet, vilket ofta är fallet i t ex livet utanför skolan, torde också vara en omöjlighet utan en god kännedom om innebörden av relevanta matematiska begrepp. En god förståelse av använda begrepp torde dessutom vara grundläggande för möjligheten till att själv erfara matematikens skönhet och logik. Ett mål bör därför vara att eleverna uppnår en *begreppskompetens* som vi här definierar som att eleverna har förtrogenhet med innebörden av relevanta begrepps definitioner. I överrensstämmelse med detta resonemang beskrivs också förståelse i kursplanen, under rubriken ämnets karaktär och uppbyggnad (Skolverket, 2000), som grundläggande i gymnasiematematiken.

2.4 Modelleringskompetens

För att uppnå syftet att kunna använda matematiken i situationer utanför matematikutbildningen behöver eleverna en *modelleringskompetens*. Det innebär att de utifrån en utommatematisk situation kan skapa en matematisk modell som beskriver denna situation, inommatematiskt arbeta med den matematiska modellen och också utvärdera modellen och de resultat den ger i förhållande till den verkliga situationen. Kompetensen ska kunna användas i utommatematiska situationer där användningen av modelleringskompetensen är av rutinmässig karaktär och där den inte är det. För att uppnå denna kompetens behöver eleverna alltså både behärska modelleringsprocessen som en algoritmisk aktivitet och som en problemlösningsaktivitet.

Innehållet i modelleringskompetensen finns tydligt nämnt i kursplanen då både de kursoberoende delarna ”Mål att sträva mot” och ”Ämnets karaktär och uppbyggnad”, och den kursspecifika delen ”Mål som eleverna skall ha uppnått efter avslutad kurs” nämner ingående delar i kompetensen. Betygskriterierna är dock inte lika tydliga. Med matematikutbildningens syfte att kunna använda matematiken i utommatematiska situationer, och kursplanens skrivningar om matematiska modeller, som grund för tolkningen av betygskriterierna blir dock en rimlig slutsats att även de behandlar modelleringskompetensen. Skrivningar som t ex ”lösa olika typer av problem” och ”Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser” (Skolverket, 2000, s. 84) bör tolkas som att ”problem” och ”händelser” inkluderar utommatematiska sådana.

Det kan vara svårt att på nationella prov ge eleverna möjligheter att visa att de har uppnått en förmåga att använda sina matematikkunskaper i situationer utanför skolan eftersom själva provsituationen (och det faktum att det är en skolsituation) i sig förhindrar en simulering av viktiga aspekter av en normal tillämpningssituation utanför skolan. Uppgifterna kan dock vara mer eller mindre verklighetsnära. För att eleverna ska kunna uppnå, och visa att de verkligen har uppnått, en kompetens att lösa uppgifter och problem utanför skolan där matematiken kan vara till hjälp behöver en del av de uppgifter de möter simulera verkliga situationer och ha sådana egenskaper som livet utanför skolan verkligen har, d v s vara *verklighetsnära*. Uppgifter som utgör verklighetstrogna simuleringar av situationer utanför skolan där matematiken kan vara till nytta kan också bidra till att matematiken upplevs som meningsfull och användbar i livet utanför skolan. Detta betyder att även då uppgifter huvudsakligen fokuserar på någon av de andra kompetenserna kan det vara av värde att de är verklighetsnära. Anledningen till att argumentera för denna uppgiftstyp på just detta ställe i rapporten är att den har sin kanske allra starkaste anknytning till modelleringskompetensen.

Eftersom problem och uppgifter i livet utanför skolan ofta har karaktären av att vara *öppna*, d v s att det finns flera möjliga lösningsmetoder och svar eller olika tolkningsmöjligheter av själva uppdraget, så ingår det i modelleringskompetensen att även kunna behärska denna typ av uppgifter. Öppenhet i problemställningar svarar då mot behovet av att kunna analysera en viktig typ av verkliga problem och att förstå att olika lösningar ofta kan vara möjliga i verkliga situationer. Det finns också ur lärandesynpunkt antaganden som kan utgöra stöd för att inkludera dessa uppgifter i undervisningen, inklusive prov. Sådana antaganden är att delaktighet i tolkningen av en öppen uppgift kan öka elevers motivation för lärande i ämnet och inverka positivt på deras kreativitet. Detta betyder att öppna uppgifter med fördel kan användas oavsett vilken av de uttolkade kompetenserna som ses som uppgiftens huvudfokus. Då de ofta kräver icke-rutinmässiga val för sin lösning så fungerar de många gånger speciellt bra som möjlighet för eleverna att visa sin begreppskompetens. Men eftersom öppna uppgifter kanske allra naturligast kommer in under modelleringskompetensen så valdes att argumentera för uppgifstypen här.

En annan egenskap hos verkliga situationer utanför skolan är att den tillgängliga informationen aldrig är exakt den som behövs för att lösa uppgiften. Det finns alltid för mycket, ofta irrelevant, information men också ibland för lite information. Detta betyder att man behöver sovra och välja ut relevant information, och ibland också ta reda på eller skapa information som behövs men som inte är direkt tillgänglig. *Uppgifter med för mycket eller för lite information* är därför också en uppgiftstyp som är viktig att inkludera i prov och undervisning för att eleverna ska få goda möjligheter att visa och uppnå modelleringskompetens.

2.5 Resonemangskompetens

För att uppnå syftet med att eleverna ska upptäcka glädjen av att utveckla sig matematiskt för sakens egen skull, eller som det uttrycks under ämnets syfte i kursplanen ”uppleva glädjen i att utveckla sin matematiska kreativitet och förmåga att lösa problem samt att få erfara något av matematikens skönhet och logik” (Skolverket, 2000, s. 73), blir det viktigt vad som är det fundamentala i matematik. I beskrivningen av ämnets karaktär och uppbyggnad skrivs att ”i matematik arbetar man med väldefinierade begrepp och bygger upp teorier genom att logiskt och strikt bevisa att formulerade hypoteser är giltiga” (Skolverket, 2000, s. 74). Detta betyder att en kompetens om, och användning av, bevisföring bör vara central i gymnasiematematiken.

Denna kompetens bör däremot tolkas lite vidare än att enbart handla om strikt matematisk bevisföring. Termen ”matematiska resonemang” förekommer i både kursplanen och betygskriterierna men den exakta definitionen av termen i styrdokumenten är inte helt uppenbar. Innebörden att föra en argumentation på matematiska grunder verkar dock rimlig. En sådan bör kunna innehålla både mer och mindre strikta argumentationer som bygger på allmänna logiska och speciella ämnesteoretiska grunder. Den bör också innehålla den undersökande verksamheten av att hitta mönster och att formulera, förbättra och allmänt undersöka hypoteser. Även värdering av bevis och andra former av matematiska argument ingår. Denna tolkning passar väl ihop med andra skrivningar i kursplanen och läroplanen. Exempelvis är kritisk granskning en aktivitet som tas upp i kursplanen både under ”Ämnets syfte” och under ”Mål att sträva mot”. Det är också en betonad aktivitet i läroplanen där den nämns på flera ställen. Till exempel skrivs under skolans huvuduppgifter att ”eleverna ska träna sig att tänka kritiskt, att granska fakta och förhållanden och att inse konsekvenserna av olika alternativ” (Utbildningsdepartementet, 1994, s. 25), och under ”Mål att uppnå” att det är skolans ansvar att varje elev som har slutfört ett nationellt program ”har förmåga att kritiskt granska och bedöma det eleven ser, hör och läser för att kunna diskutera och ta ställning i olika livsfrågor och värderingsfrågor” (Utbildningsdepartementet, 1994, s. 30). Vi kallar denna samlade kompetens för *resonemangskompetens*. Kompetensen bör kunna användas som en algoritmisk aktivitet, t ex genom att producera ett bevis som eleven är familjär med, och som problemlösningsaktivitet, t ex genom att producera ett bevis eller annan argumentation där det inte räcker med att komma ihåg ett tidigare sett resonemang.

Resonemangskompetensen beskrivs i betygskriterierna, förutom med termen matematiska resonemang, även med termen bevis. För betyget Mycket väl godkänd ska eleverna kunna genomföra matematiska bevis, och ett kriterium för betyget Godkänd är att eleven ska kunna skilja på gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis. Att även elever med betyget Godkänd ska kunna genomföra bevis indikeras av de kursspecifika målen för ett par av kurserna. Det senare kan ses som att kursplanerna inte alltid verkar helt förenliga med betygskriterierna men indikerar dock vikten av denna resonemangskompetens.

2.6 Kommunikationskompetens

Kompetensen att kommunicera matematik är också starkt betonad i kursplanen. Redan under rubriken ”Ämnets syfte” skrivs att utbildningen ska leda till förmåga att kommunicera med matematikens språk och symboler (Skolverket, 2000, s. 73). Att en anledning till detta har att göra med matematikens användning utanför skolan framskymtar under beskrivningen av ämnets karaktär och uppbyggnad där det förs fram att allt fler behöver kunna förstå innebörden av, och kommunicera om, frågor med matematiskt innehåll. Att det gäller både skriftligt och muntligt framkommer tydligt både under ”Mål att sträva mot” och i betygskriterierna. Där framkommer också att kommunikationskompetensen ska ses som flervägskommunikation som inkluderar både att kunna tolka information med matematiskt innehåll och att kunna producera och framföra information med matematikens språk.

3 Argumentation för uppgifter som anknyter till ett etiskt, miljö-, internationellt eller historiskt perspektiv

En av skolans huvuduppgifter som beskrivs i läroplanen är ”att till eleverna överföra värden, förmedla kunskaper och förbereda dem för att arbeta och verka i samhället” (Utbildningsdepartementet, 1994, s. 25). Några av dessa värden och kunskaper kan inte utifrån kursplanen och betygskriterierna för matematik ses som matematiska kunskaper som ska bedömas i matematik. Exempel på detta är de fyra perspektiven etiskt, miljö-, internationellt och historiskt perspektiv som enligt läroplanen ska behandlas i undervisningen. De nationella proven kan dock ses som en del av den svenska skolan och de bör därför bidra till att målen för skolväsendet uppnås även i detta avseende. Eftersom syftet med de nationella proven är att vara en hjälp för att bedöma elevernas kunskaper i exempelvis matematik kan knappast proven pröva t ex deras etiska värderingar. Däremot kan de i provuppgifterna beskrivna situationerna och frågeställningarna anknyta till dessa perspektiv, som bland annat visar på det svenska samhällets värdegrund, och på så sätt bidra till att perspektiven uppmärksammas.

4 Internationell utblick

I en jämförelse mellan de matematiska kompetenser som beskrivs i detta dokument och de kompetenser som beskrivs i måldokument från flera andra enskilda länder och i internationella samarbeten kan konstateras att Sverige inte är ensam om sin inriktning. Det mål som sätts upp för eleverna är ofta likartade även om beskrivningarna av målen delvis struktureras olika och kan ha olika fokus. I OECD's undersökning, PISA, som jämför elevers matematikkunskaper i OECD-länderna beskrivs t ex åtta kompetenser där innehållet till största delen överensstämmer med kompetenserna i detta dokument (Organisation for Economic Co-operation and Development, 1999). I den internationella jämförande studien TIMSS 2003, som genomförs av the International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) med nästan 60 medlemsländer, beskrivs 4 stycken så kallade *kognitiva domäner* som tillsammans med kommunikation utgör viktig matematisk kunskap (Mullis et al., 2001). De sammanlagda beskrivningarna av de kognitiva domänerna och denna kommunikationsaspekt liknar också de sex kompetenserna som är beskrivna i detta dokument.

Ett exempel på dokument från enskilda länder med liknande mål är *Principles and standards for school mathematics* (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), utgiven av den amerikanska matematiklärarorganisationen National council of teachers of mathematics (NCTM). NCTM, som består av både lärare och forskare, beskriver i 'The standards' bland annat fem stycken *processmål* vars sammanlagda beskrivningar till stora delar överensstämmer med de kompetenser vi tolkat som de viktigaste i de svenska styrdokumenten, även om beskrivningarnas fokus skiljer sig lite åt. Ett annat exempel är *Kompetencer og matematiklæring* (Undervisningsministeriet, 2002) utarbetad av en arbetsgrupp tillsatt av danska Uddannelsesstyrelsen i samarbete med Naturvidenskabeligt uddannelsesråd. Den innehåller bland annat en kompetensbaserad systematik för förståelse och utveckling av skolmatematiken med syftet att ge idéer till en utveckling av matematikundervisningen i Danmark. I rapporten beskrivs åtta kompetenser av första ordningen vars sammanlagda beskrivningar också liknar de ur de svenska styrdokumenten uttolkade kompetenserna. I tillägg till kompetenserna av första ordningen beskrivs också tre kompetenser av andra ordningen som handlar om att ha insikt och förståelse för matematikens användning utanför matematiken, matematikens historiska utveckling och matematikens särskilda karaktär som ämne. Dessa kompetenser kan också uttolkas ur de svenska styrdokumenten. Den första kompetensen är inkluderad i vår definition av modelleringskompetensen och den tredje kompetensen av andra ordningen kan inkluderas i resonemangskompetensen. Den historiska utvecklingskompetensen finns också explicit nämnd i de svenska styrdokumenten och bör behandlas i undervisningen men verkar för närvarande vara svår att inkludera i de nationella proven.

5 Beskrivning av uttolkade kompetenser och uppgiftstyper

5.1 Problemlösningskompetens

5.1.1 Beskrivning

Med *problemlösningskompetens* menas att kunna lösa det vi här kallar *problem*, d v s uppgifter där uppgiftslösaren inte har någon färdig lösningsmetod tillgänglig. Eleven behöver producera någon form av (icke rutinmässig) kunskap, d v s tillämpa sina kunskaper på en för honom eller henne ny situation. Huruvida en uppgift kräver problemlösningskompetens för sin lösning beror då inte bara på egenskaper hos uppgiften utan är beroende på kombinationen uppgift och uppgiftslösare.

5.1.2 Uppgiftstyper

För att uppgifter för sin lösning ska kräva problemlösning behöver de vara av en annorlunda uppgiftstyp än eleverna är vana vid. De kan också vara av en sådan komplex karaktär att eleverna inte kan använda sig av en färdig lösningsprocedur som de kan koppla ihop med uppgiftstypen. Följande är exempel på uppgiftstyper som ofta leder till att eleverna behöver använda sig av problemlösningskompetens för att lösa uppgiften.

1) *Ovanliga uppgifter*
   Ett exempel på denna typ av uppgifter är när frågeställningen är omvänd i jämförelse med de flesta uppgifter som eleven stöter på. Många gånger medför detta att det blir svårt att tillämpa en algoritm som de kan förknippa med uppgiftstypen. Om dessutom de beräkningar som krävs för att lösa uppgiften är enkla blir det i än större utsträckning problemlösningskompetensen som är avgörande för om eleven klarar uppgiften än om beräkningssvårigheter sätter hinder i vägen för att denna kompetens ska fokuseras. Uppgift 1 är ett exempel på denna uppgiftstyp.

2) *Uppgifter där informationen som ges i uppgiften är annorlunda än i de uppgifter eleverna är vana att arbeta med*
   Uppgift 2 är ett exempel på denna uppgiftstyp

3) *Komplexa uppgifter*
   Uppgift 3 är ett exempel på denna uppgiftstyp.

5.1.3 Exempel och kommentarer

Uppgift 1 (NKP MaA ht -95, uppgift 7)

Du ska bygga ett akvarium av glas på ca 160 liter. Föreslå lämpliga mått. Beskriv hur du kom fram till dessa mått och rita en skiss av akvariet med måtten angivna.

Kommentar: I denna uppgift är frågeställningen omvänd jämfört med en mer ordinär och rättfram fråga där sidorna är givna och volymen är eftersökt. Uppgifter av detta slag blir också öppna och i detta fall finns olika rätta svar då form och mått måste väljas och svaret blir beroende av de val som görs. Sammanlagt gör detta att det blir svårare att direkt tillämpa en algoritm för att lösa uppgiften. (Denna uppgift återfinns även under avsnittet om begreppskompetens som Uppgift 11).

Uppgift 2 (NKP MaB ht -98, uppgift 10)

Vid ishockeymatcher i Globen i Stockholm kan de som vill köpa ett matchprogram för 25 kr. I slutet av matchen lottas det ut vinster där matchprogrammet fungerar som en lott.

Vid en match mellan Djurgården och Brynäs lottas det ut tre Helsingforskryssningar.

Beräkna sannolikheten att du vinner en av dessa kryssningar om du köper ett matchprogram.

Du får själv hitta på den information du behöver för att kunna utföra dina beräkningar.

Kommentar: I denna uppgift har inte eleverna den information de normalt har i liknande uppgifter. De måste göra antaganden om förutsättningarna genom att anta hur många matchprogram som sålts (alternativt antal existerande matchprogram, beroende på vad eleven antar gäller för utlottningen). Det gör t ex att eleverna inte direkt kan ta information i uppgiften och sätta in den i den 'formel' för beräkning av sannolikheter vid likformig sannolikhetsfördelning som ingår i kursen. De behöver nu först lista ut vilken typ av information de behöver. Uppgiften är också öppen då svaret kommer att vara beroende på vilket val av information som görs. Dessutom har uppgiften verklighetsnära inslag då liknande utlottningar verkligen görs och den information som nu inte var given i uppgiften inte hade varit direkt känd i den verkliga situationen heller. (Denna uppgift återfinns även under avsnittet om modelleringskompetens som Uppgift 19).

Uppgift 3 (NKP MaD vt-99, uppgift 14)

Funktionerna f och g är deriverbara.

Man bildar en ny funktion $h(x) = \left(f(x)\right)^2 + \left(g(x)\right)^2$

För funktionerna f och g gäller

- $f(0) = 2$ och $g(0) = 1$
- $f'(x) = g(x)$ och $g'(x) = -f(x)$

Bestäm $h'(x)$ och använd resultatet till att visa att $h(x) = 5$ för alla x

Kommentar: En lösning till denna uppgift innehåller normalt sett flera olika delsteg där inte alla är av rutinkaraktär

5.2 Algoritmkompetens

5.2.1 Beskrivning

Med *algoritmkompetens* menas att känna till och kunna använda för kursen relevanta algoritmer. Med detta menas att känna till och vid uppgiftslösning rutinmässigt kunna använda procedurer i ett eller flera steg där alla stegen och den övergripande ordningsföljden för de ingående stegen är väl kända för uppgiftslösaren. Varje steg i proceduren kan i sin tur ofta beskrivas som en sekvens av mera elementära steg.

5.2.2 Uppgiftstyper

Följande är exempel på uppgiftstyper som eleven förväntas lösa enbart med hjälp av algoritmkunskaper:

1) *Ekvationer*
   Uppgift 4 är ett exempel på denna uppgiftstyp.

2) *Rutinuppgifter som eleven kan lösa genom att använda kända satser som eleven kan förknippa med uppgiftstypen*
   Uppgift 5 och Uppgift 6 är exempel på denna uppgiftstyp.

3) *Rutinuppgifter som eleven kan lösa med hjälp av en algoritmisk hantering av hjälpmedel som t ex en grafisk miniräknare*
   Uppgift 7 är ett exempel på denna uppgiftstyp.

5.2.3 Exempel och kommentarer

Uppgift 4 (NKP MaE vt-02, uppgift 10)

Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $3y'' + 6y' - 24y = 0$

Kommentar: För lösning av uppgiften kan eleven använda sig av en känd algoritm som kan kopplas till denna uppgiftstyp.

Uppgift 5 (NKP MaC vt-00, uppgift 6)

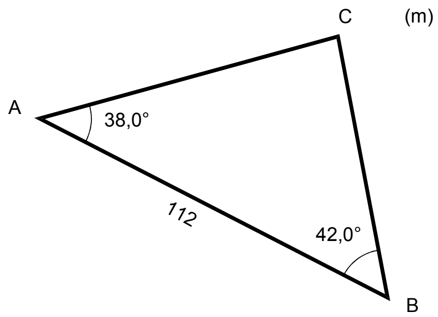
Bestäm med hjälp av derivata eventuella maximi-, minimi- eller terrasspunkter till kurvan $y = 2x^3 - 3x^2$.

Kommentar: I denna uppgift ska eleven utföra en procedur som kan förväntas vara väl inövad. Eleven har också möjlighet att visa sin räknetekniska färdighet.

Uppgift 6 (NKP MaD vt-00, uppgift 5)

Triangeln ABC är given enligt figur. Beräkna arean av triangeln.

(OBS! Figur är ej skalenlig)



Kommentar: I uppgiften ska eleven använda sig av kända satser som kan förknippas med denna och liknandeuppgifter. Eleven kan förväntas vara bekant med både den övergripande proceduren och varje delsteg i lösningen. Så även om han/hon inte vet från början vilka av de trigonometriska satserna som behöver användas i varje delsteg så blir detta ett val av rutinkaraktär om både den övergripande proceduren och varje delsteg i lösningen är bekant.

Uppgift 7 (NKP MaD vt-99, uppgift 9b)

Låt $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

Bestäm med hjälp av din räknare ett närmevärde till $g(3)$.

Endast svar fordras

Kommentar: Detta är en uppgift eleven kan lösa med hjälp av algoritmisk hantering av en grafisk miniräknare.

5.3 Begreppskompetens

5.3.1 Beskrivning

Med *begreppskompetens* menar vi en förtrogenhet med innebörden av ett begrepps definition. Detta inkluderar förmågan att definiera och använda innebörden av ett begrepp. För att få en tydlig bild av en elevs begreppskompetens när det gäller ett visst begrepp så är det nödvändigt att använda ett flertal uppgifter med olika infallsvinklar. En elevs lösningar till enstaka uppgifter kan dock indikera, mer eller mindre väl, elevens begreppskompetens.

5.3.2 Uppgiftstyper

Nedan följer ett antal uppgiftstyper som kan ge eleverna möjlighet att visa sin begreppskompetens. Förutom med hjälp av dessa uppgiftstyper kan man även få viss information om elevens begreppskompetens ur hans/hennes lösningar till uppgifter som mer direkt ber eleven definiera eller använda begreppet. Sådana uppgifter kan dock ofta lösas genom att eleven memorerat en definition utan att nödvändigtvis ha förstått dess innebörd. De indikerar därför inte begreppskompetens i samma utsträckning som följande uppgiftstyper.

1) *Uppgifter i vilka eleven ombeds att förklara eller tolka ett centralt begrepp eller samband, eller en del av ett sådant*
   Exempel på uppgiftsformuleringar är ”*Förklara* med ett exempel…”, ”Förklara för en kamrat…”, ”Vad *menas* med…?” och ”Vad *innebär* det att…?”. Andra verb som kan inleda denna typ av uppgift är *förtydliga* och *tolka*. (Uppgifter av den här typen ger också ofta utrymme för eleverna att visa på resonemangskompetens och kommunikationskompetens). Exempel på denna uppgiftstyp är Uppgift 8 och Uppgift 9.

2) *Uppgifter som ger eleven viss information som sedan ska användas till att dra slutsatser*
   De ingående beräkningar som krävs för att lösa uppgiften bör vara enkla för att inte bedömningen av elevernas begreppskompetens ska försvåras av svårigheter med själva beräkningarna. Exempel på en sådan uppgift är Uppgift 10.

3) *Ovanliga uppgifter*
   Ett exempel på denna typ av uppgifter är när frågeställningen är omvänd i jämförelse med de flesta uppgifter som eleven stöter på. Många gånger medför detta att det blir svårt att tillämpa en algoritm som de kan förknippa med uppgiftstypen, vilket ofta medför ett högre krav på begreppskompetens än vad rutinuppgifter gör. Om dessutom de beräkningar som krävs för att lösa uppgiften är enkla blir det i än större utsträckning troligt att begreppskompetensen blir avgörande för om eleven klarar uppgiften än om beräkningssvårigheter sätter hinder i vägen för att denna kompetens ska fokuseras (denna uppgiftstyp finns även beskriven under avsnittet om problemlösningskompetens). De sista uppgifterna, från och med Uppgift 11 till och med Uppgift 16 är exempel på sådana uppgifter.

4) *Uppgifter som är öppna*
   Med detta menas uppgifter som är öppna för tolkningar och antaganden om vad som är givet i uppgiften, kan lösas på flera olika rimliga sätt och/eller kan ges olika korrekta svar. En uppgift kan då ha olika grad av öppenhet allt från en sluten uppgift som endast inbjuder till små variationer av metod och presentation av det entydigt ”rätta” svaret, till en helt öppen uppgift där metod och svar kan vara olika beroende på den

valda tolkningen av uppgiften. Ett mellanläge är där tolkningen av uppgiften är entydig men där det finns mer än ett rätt svar. Öppna uppgifter är ofta annorlunda uppgifter så denna kategori sammanfaller i mycket hög grad med den föregående uppgiftstypen och samma uppgifter, från och med Uppgift 11 till och med Uppgift 16, kan sägas vara exempel på sådana. (Denna uppgiftstyp finns även beskriven under avsnittet om modelleringskompetens.)

5) *Uppgifter som kräver förståelse för kopplingen mellan olika representationer av samma matematiska begrepp*
   Uppgift 26, under avsnittet om resonemangskompetens är ett exempel på en sådan uppgift.

5.3.3 Exempel och kommentarer

Uppgift 8 (NKP MaC vt -98, uppgift 5)

Förklara, med ett exempel, begreppet bortfall i en statistisk undersökning.

Kommentar: En korrekt lösning av denna uppgift indikerar att eleven har förtrogenhet med innebörden av begreppet bortfall.

Uppgift 9 (NKP MaE vt -98, uppgift 8a)

Med lösningar till ekvationen menas vanligen tal som uppfyller vissa villkor. Till exempel är talet tre en lösning till tredjegradsekvationen $x^3 - 27 = 0$. Vad menas med lösningar till differentialekvationer?

Kommentar: En korrekt lösning av denna uppgift indikerar att eleven har förtrogenhet med innebörden av begreppet differentialekvation.

Uppgift 10 (NKP MaC vt -96, uppgift 13)

Om funktionen f vet man följande:

- $f(7) = 3$ och
- för $7 \leq x \leq 9$ gäller att $0{,}8 \leq f'(x) \leq 1{,}2$.

Bestäm största möjliga värde för $f(9)$.

Kommentar: En korrekt lösning av denna uppgift indikerar att eleven har god förtrogenhet med innebörden av begreppet derivata.

Uppgift 11 (NKP MaA ht -95, uppgift 7)

Du ska bygga ett akvarium av glas på ca 160 liter. Föreslå lämpliga mått. Beskriv hur du kom fram till dessa mått och rita en skiss av akvariet med måtten angivna.

Kommentar: I denna uppgift är frågeställningen omvänd jämfört med en mer ordinär och rättfram fråga där sidorna är givna och volymen är eftersökt. Uppgifter av detta slag blir också öppna och i detta fall finns olika rätta svar då form och mått måste väljas och svaret blir beroende av de val som görs. Elevens lösning indikerar bland annat nivån på elevens begreppsförståelse när det gäller begreppet volym. (Denna uppgift återfinns även under avsnittet om problemlösning som Uppgift 1).

Uppgift 12 (NKP MaA ht -95, uppgift 8)

Ange ett komplext, icke-reellt, tal som har absolutbelopp 10.

Kommentar: Denna uppgift är i sin formulering omvänd mot de uppgifter som eleverna oftast möter (”Vilket absolutbelopp har det komplexa talet…?”) och en korrekt lösning indikerar förståelse för begreppet ”absolutbelopp”.

Uppgift 13 (NKP MaA ht -95, uppgift 8)

a) Ange ett tal som ligger någonstans mellan $5 \cdot 10^{-3}$ och $5 \cdot 10^{-2}$.

b) Ange ett tal i bråkform som är större än $\frac{3}{4}$ men mindre än 1.

Kommentar: Dessa två deluppgifter är något ovanliga i sin formulering och en korrekt lösning av eleven indikerar troligen begreppskompetens när det gäller talbegreppet.

Uppgift 14 (NKP MaB ht -98, uppgift 6)

Punkten (2, 3) ligger på en rät linje med riktningskoefficienten $k = 4$. Bestäm koordinaterna för en annan punkt på linjen.

Kommentar: I denna uppgift finns mer än ett möjligt rätt svar. Det finns även öppenhet vad gäller metodval då både metoden att stega sig fram från den givna punkten i ett koordinatsystem till en ny punkt och metoden att beräkna en ny punkt med hjälp av en formel för räta linjen är fullt möjliga och tänkbara metoder.

Uppgift 15 (NKP MaE vt -98, uppgift 6)

Ange en andragradsekvation som:

a) saknar reella rötter *Endast svar fordras*

b) har två reella rötter *Endast svar fordras*

Kommentar: Denna uppgift är av samma typ som uppgift 13 men ingick i ett prov på en högre kurs. Flera rätta svar finns och både en helt algebraisk metod och en metod som innebär att rita och pröva i inledningsskedet av uppgiftslösningen är rimliga.

Uppgift 16 (NKP MaC vt -96, uppgift 8)

I ekvationen $160\,000 \cdot 0{,}95^x = 50\,000$ betecknar x tiden i år.

a) Formulera ett problem som kan lösas med hjälp av denna ekvation.

b) Lös ekvationen och ge ett svar på det problem du formulerat.

Kommentar: Denna uppgift får representera en annan öppen uppgiftstyp. När eleverna ska formulera egna problem finns naturligtvis många olika rätta lösningar, och en korrekt lösning kan indikera att eleven har god begreppskompetens.

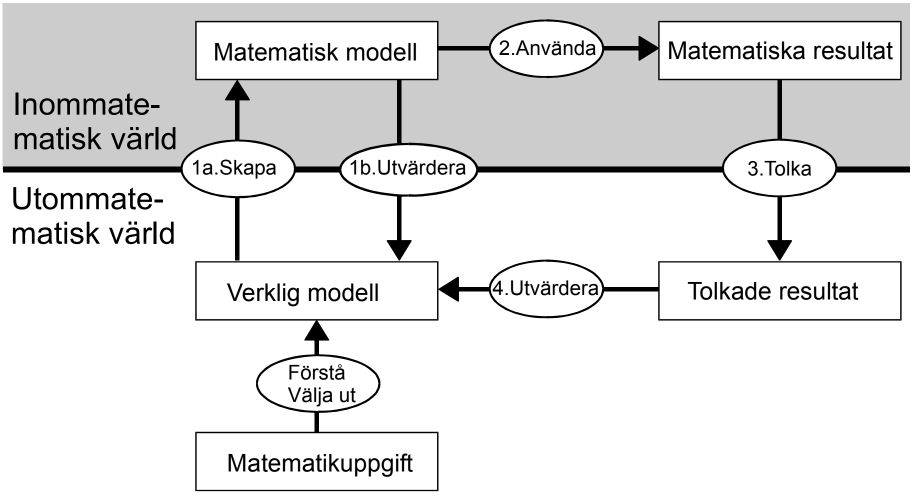
5.4 Modelleringskompetens

5.4.1 Beskrivning

Modelleringskompetens innefattar att utifrån utommatematiska situationer *skapa* och *använda* en matematisk modell, *tolka* de resultat som den matematiska modellen ger när den används samt *utvärdera* den matematiska modellen genom att klargöra dess begränsningar och förutsättningar.

Ovanstående beskrivning tydliggörs av den *matematiska modelleringprocessen* som schematiskt och något förenklat[1] visas i figuren nedan. Denna process innehåller de steg som kan behöva användas då matematik tillämpas på utommatematiska situationer.

[1] Förenklingen består bland annat i att modelleringsprocessen inte behöver gås igenom strikt i den beskrivna ordningen utan eleven kan återkomma till alla eller vissa steg och kan hoppa fram och tillbaka mellan stegen. Steg 2, 3 och 4 kan dessutom tänkas gå i båda riktningarna. Den riktning som inte är framställd i figuren motsvarar de implicita eller explicita ”kontroller” som eleven gör av sitt arbete under modelleringsprocessens gång.



Figur 1. En schematisk bild av den matematiska modelleringsprocessen

Processen startar med att eleven läser matematikuppgiften och bildar sig en förståelse av den. Eleven skapar sedan en verklig modell av uppgiften, där uppgiftens komplexitet reduceras genom att eleven gör en förenklad bild av den. Eleven väljer medvetet eller omedvetet ut väsentliga fakta.

Eleven *skapar* (steg 1a) sedan en matematisk modell, i form av en funktion, ekvation, differentialekvation, integral eller dylikt, som avbildar det viktigaste i den verkliga modellen. Eleven kan *utvärdera* modellen (steg 1b), genom att kritiskt granska modellen och klargöra dess begränsningar och förutsättningar. Eleven *använder* modellen (steg 2) och får, via t ex beräkningar, matematiska resultat. De matematiska resultaten *tolkas* (steg 3), i förhållande till uppgiften och den verkliga modellen för att besvara frågeställningen i uppgiften, och ett tolkat resultat erhålles. Steg 3 kan exemplifieras med uppgiften som handlar om Sälar, Uppgift 17 nedan. Resultatet av en korrekt ekvationslösning på a-uppgiften är 0,89 och en tolkning av detta ”matematiska resultat” i relation till frågeställningen i den utommatematiska världen är ”en minskning med 11 %”. Det sista steget är utvärderingsfasen (steg 4), där eleven *utvärderar* om resultatet är rimligt. Detta steg kräver kompetens i form av t ex allmänbildning och fackkunskap.

Det modelleringsarbete som en elev behöver kunna utföra är av olika slag. Vissa utommatematiska situationer har eleven mött tidigare, vilket innebär att elevens modelleringsarbete med uppgiften blir rutinartat. Så kan det t ex vara när eleven uppmanas att beräkna arean på ett rektangelformat bord. Andra situationer är helt nya för eleven och kräver ett *genuint* modelleringsarbete.

5.4.2 Uppgiftstyper

Viktiga exempel på uppgiftstyper i samband med modelleringskompetensen är följande:

1) *Uppgifter som prövar hela modelleringsprocessen*
   Uppgift 17 och Uppgift 21 är exempel på sådana uppgifter.

2) *Uppgifter som prövar vissa (väsentliga) delar av modelleringsprocessen*
   De faser som är specifika för den matematiska modelleringsprocessen är steg 1a, 1 b och 3. Dessa faser kännetecknas av en anpassning från den utommatematiska världen till den inommatematiska världen och tvärtom. Därför måste eleverna ges möjlighet att visa de förmågor som motsvarar dessa faser om endast sekvenser av processen ska behandlas. Uppgift 18, Uppgift 19 och Uppgift 20 är exempel på sådana uppgifter.

3) *Verklighetsnära modelleringsuppgifter*
   En tredje typ av uppgifter med fokus på modellering är verklighetsnära uppgifter. Dessa uppgifter handlar om situationer ur verkligheten utanför skolan. Den beskrivna situationen, inklusive frågeställningen, har antingen hänt eller skulle mycket väl kunna hända. De förutsättningar, variabler och värden som eleven får ta del av är i så stor utsträckning sommöjligt desamma som eleven skulle ha haft tillgång till i den verkliga situationen (för en noggrannare diskussion av verklighetsnära uppgifter se (Palm, 2001). Uppgift 17, Uppgift 18, Uppgift 19, Uppgift 20 och Uppgift 21 är exempel på sådana uppgifter.

4) *Öppna modelleringsuppgifter*
   En del av uppgifterna som prövar elevernas modelleringskompetens, den fjärde typen, är öppna. De kan pröva hela eller delar av modelleringsprocessen. Med öppna uppgifter menas uppgifter som är öppna för tolkningar och antaganden om vad som är givet i uppgiften, kan lösas på flera olika rimliga sätt och/eller kan ges olika korrekta svar. En uppgift kan ha olika grad av öppenhet allt från en sluten uppgift som endast inbjuder till små variationer av metod och presentation av det entydigt ”rätta” svaret, till en helt öppen uppgift där metod och svar kan vara olika beroende på den valda tolkningen av uppgiften. Ett mellanläge är där tolkningen av uppgiften är entydig men där det finns mer än ett rätt svar. (Denna uppgiftstyp finns även beskriven under avsnittet om begreppskompetens). Uppgift 17, Uppgift 19, Uppgift 20, och Uppgift 21 är exempel på denna uppgiftstyp.

5) *Modelleringsuppgifter med för mycket eller för lite information*
   Den femte typen av uppgifter bland de som prövar modelleringskompetens är uppgifter med för mycket eller lite information i jämförelse med vad som är precis nödvändigt för att det ska finnas möjlighet att lösa uppgiften. I uppgifter med för lite information behöver eleven göra egna relevanta och rimliga antaganden. Uppgifter med för mycket information

är egentligen uppgifter som vid dess konstruktion inte avskalats på riktigt all information som normalt finns i verkliga situationer. Vi lösande av denna typ av uppgifter behöver eleven sovra i informationen och avgöra vilken information som är relevant för uppgiftens lösning. Uppgift 19 är ett exempel på en sådan uppgift.

5.4.3 Exempel och kommentarer

Uppgift 17 (NKP MaC vt -02, uppgift 13a (modifierad))

År 1960 fanns det uppskattningsvis 20 000 gråsälar i Östersjön. På grund av höga halter av miljögifter minskade sedan antalet sälar kraftigt. Minskningen var exponentiell och år 1980 fanns endast 2000 gråsälar kvar.

a) Vilken var den genomsnittliga årliga procentuella minskningen av antalet gråsälar mellan åren 1960 och 1980?

b) Exponentiellt avtagande modeller som kan beskriva antalet sälar mellan 1960 och 1980 har en begränsning i ett längre tidsperspektiv. Vilken är denna begränsning?

Kommentar: Här behöver eleven gå igenom hela modelleringsprocessen. Steg 3 finns med som en väsentlig del i a-uppgiften och eleven ombeds utvärdera sin matematiska modell (steg 1b) i b-uppgiften. a-uppgiften är av sådan art att de flesta elever mött den tidigare vilket innebär att modelleringen i denna uppgift blir tämligen rutinartad. Uppgiften bygger på autentiska uppgifter och har därmed ett verklighetsnära inslag. Den har också en öppenhet eftersom flera olika lösningsmetoder är möjliga.

Uppgift 18 (NKP MaA vt -97, uppgift 9c och e)

I en rapport finns följande figur och tabell som visar hur höjden av ett ungt träd förändras. Trädets höjd är 1,00 m till att börja med.

Tiden t i år	Trädets höjd h i m
0	1,00
1	1,20
2	1,44
3	1,73
4	2,07
5	2,49
6	2,99

c) Teckna en formel som kan användas för att beräkna trädets höjd, *h* m, efter en viss tid, *t* år.

e) Formeln i c) är en matematisk modell för hur träds höjd förändras.Vilken begränsning har modellen?

Kommentar: I c-uppgiften ska eleverna utifrån givna data skapa en matematisk modell som ska beskrivas med ett algebraiskt uttryck (steg 1 a). I e- uppgiften behöver eleverna också hitta en viktig begränsning till modellen (steg 1 b). Denna uppgift testar delar av modelleringsprocessen. Uppgiften är delvis verklighetsnära eftersom den bygger på en verklig rapport. Vårdena i tabellen är dock något manipulerade för att uppgiften ska passa som provuppgift

Uppgift 19 (NKP MaB ht -98, uppgift 10)

Vid ishockeymatcher i Globen i Stockholm kan de som vill köpa ett matchprogram för 25 kr. I slutet av matchen lottas det ut vinster där matchprogrammet fungerar som en lott. Vid en match mellan Djurgården och Brynäs lottas det ut tre Helsingforskryssningar.

Beräkna sannolikheten att du vinner en av dessa kryssningar om du köper ett matchprogram.

Du får själv hitta på den information du behöver för att kunna utföra dina beräkningar.

Kommentar: I denna uppgift prövas främst steg 1 och 2 i modelleringsprocessen. Eleven väljer en sannolikhetsmodell som ger möjlighet att beräkna den sökta sannolikheten. Uppgiften innehåller för lite information då eleverna behöver anta hur många matchprogram som sålts(alternativt antal existerande matchprogram bero-

ende på vad eleven antar gäller för utlottningen). Uppgiften innehåller även för mycket information eftersom priset på matchprogrammen inte är relevant i sammanhanget. Uppgiften är öppen eftersom eleverna måste göra antaganden om förutsättningarna. Sådana förutsättningar hade heller inte varit givna i den verkliga situation som beskrivs i uppgiften. Svaret kommer att vara beroende på vilket val som görs. Slutligen har uppgiften också ett verklighetsnära inslag. (Denna uppgift återfinns även under avsnittet om problemlösningskompetens som Uppgift 2).

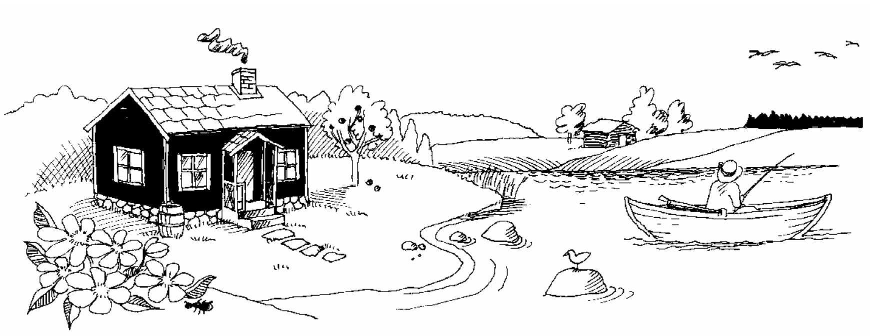
Uppgift 20 (NKP MaC ht -96, uppgift 4)

En familj köpte 1996 ett litet fritidshus intill en norrländsk älv. Tomten som huset står på var de dock tvungna att hyra. I hyreskontraktet står att årshyran sattes till 1420 kr år 1991 för att sedan följa konsumentprisindex för januari.

Hur stor är årshyran 1996?

År	1991	1992	1993	1994	1995	1996
KPI (januari)	218,9	230,2	241,0	245,1	251,3	255,6

(Informationen i tabellen är hämtad från Statistiska Centralbyrån.
KPI = konsumentprisindex)



Kommentar: Uppgiften prövar delar av modelleringsprocessen, främst steg 1 och steg 2, och är öppen i den bemärkelsen att flera olika lösningsmetoder är möjliga. Den är också relativt verklighetsnära eftersom både situationen med stuga, hyreskontrakt och värden är helt autentiska liksom frågeställningens praktiska relevans. Möjligen uttrycktes frågan i den verkliga situationen som; "Är den anmodade hyran i enlighet med kontraktet?" I den verkliga situationen behövdes också KPI-tabellen inhämtas på egen hand. Vad gäller KPI-tabellen är det ett exempel på överväganden som måste göras i kompromissen mellan å ena sidan verklighetsanknytning och å andra sidan lagom tidsåtgång och svårighetsgrad. För många gymnasieelever upplevs uppgiften eventuellt inte som närliggande deras egen vardag och det är naturligtvis *en extra fördel om uppgifterna under denna kategori är av sådan karaktär att eleverna upplever att så är fallet.*

Uppgift 21 (NKP MaC ht -96, breddningsuppgift)

Tankbilsolyckan

Vintern 1994 hände det som inte fick hända. En fullastad tankbil körde av riksväg 29 vid gränsen mellan Blekinge och Småland. 15,5 m^3 eldningsolja rann ut i Mieån, som rinner ut i Långasjön där Karlshamns kommun tar sitt dricksvatten. Efter några dagar visade miljökontorets provtagningar att det fanns olja i närheten av vattenverkets intag. I det läget beslöts att verket skulle stängas. För att Karlshamnsborna fortfarande skulle få vatten drogs ledningar för att för en kortare tid ta vatten från en annan sjö. Detta är dock dyrt och vattnet i Långasjön är bättre. Eftersom oljan av olika orsaker blandades väl med vattnet kunde ingen större sanering ske utan man fick låta naturen ha sin gång tills oljan runnit förbi verket eller avdunstat. En viktig fråga var nu hur lång tid det skulle ta innan Långasjön skulle kunna användas till dricksvatten igen.

En konsultfirma anlitades för att göra en prognos för när Långasjön skulle kunna användas till dricksvatten igen. Firman använde sig dels av några mätningar av oljekoncentrationen i sjön och dels av en matematisk modell baserad på teoretiska kunskaper och tidigare erfarenheter av liknande situationer. Den matematiska modellen var följande:

$$K(T) = 1{,}42 \cdot e^{-0{,}14T}$$

I denna modell är:

- $K(T)$ oljekoncentrationen i sjön mätt i enheten mg/l.
- T antalet dygn efter firmans första mätning som skedde en vecka efter att oljan börjat rinna ut i sjön.

Hur många dygn tar det, enligt modellen, innan Långasjön kan användas till dricksvatten igen. (Miljökontoret ansåg att man skulle vänta tills oljekoncentrationen understeg 0,000 001 mg/l)

En annan matematisk modell som utarbetats med hjälp av teoretiska kunskaper och erfarenhet av liknande situationer är följande:

$$K(t) = t^a \cdot e^{-bt}$$

I modellen är:

- $K(t)$ oljekoncentrationen i sjön mätt i enheten mg/l,
- t antalet dygn efter det att oljan börjat rinna ut i sjön,
- a och b konstanter som beror av många olika faktorer som till exempel temperatur, strömförhållande och vattendjup.

Grafen till $K(t) = t^a \cdot e^{-bt}$ ser olika ut beroende på vilka värden på *a* och *b* man använder. Detta betyder att också tidpunkterna för när oljekoncentrationen antar sitt största värde och när Långasjön kan användas till dricksvatten igen beror på vilka värden som används på *a* och *b*.

I denna sjö kan du anta att *a* normalt antar värden mellan 0,7 och 1,1 och *b* värden mellan 0,1 och 0,4.

Undersök hur olika värden på konstanterna a och b påverkar

1. Tidpunkten då oljekoncentrationen antar sitt största värde
2. Tidpunkten för när Långasjön kan användas till dricksvatten igen.

Gör en prognos för inom vilken tidsperiod Långasjön kan användas till dricksvatten igen. (Oljekoncentrationen bör då understiga 0,000 001 mg/l.)

Diskutera begränsningar för de båda matematiska modellerna när det gäller att göra prognoser för oljekoncentrationen en viss tid efter att oljan börjat rinna ut i sjön?

Kommentar: Här krävs att hela modelleringsprocessen gås igenom. Visserligen är de matematiska modellerna givna, men eftersom eleverna ska ansätta värden på konstanterna a och b så kan man anse att de är med och skapar modellerna. Uppgiften är öppen både vad gäller metodval och svar. Den beskrivna situationen är också till stora delar autentisk. Vid uppgiftskonstruktionen söktes information från flera håll. Allmän information och mätvärden kommer från berörda myndigheter i Karlshamn och den i uppgiften nämnda konsultfirman. De teoretiska modellerna är inhämtade från forskare vid Linköpings universitet med kunskaper inom detta område. Efter-

som myndigheterna och konsultfirman i huvudsak använde sig av mätningar och inte beräkningar med hjälp av algebraiska uttryck innehåller uppgiften en stor del teoretiserande vilket minskar likheten mellan den matematik som utfördes i detta speciella fall och elevens uppgift. Med modellerna från Linköping fick eleverna ändå på ett möjligt sätt arbeta med de frågor som var viktiga i den autentiskt beskrivna situationen. Denna uppgift anknyter också till ett miljöperspektiv.

5.5 Resonemangskompetens

5.5.1 Beskrivning

Med *resonemang* avses här en argumentering som sker på allmänna logiska och speciella ämnesteoretiska grunder. Det inkluderar deduktiva resonemang där logiska slutledningar görs baserade på specifika antaganden och regler, där den striktaste formen av resonemang kan sägas vara bevis. Det inkluderar också induktiva resonemang där allmänna slutsatser nås fram till genom resonemang baserade på enskilda iakttagelser av mönster och regelbundenheter. Det innebär att det i *resonemangskompetensen* ingår en undersökande verksamhet av att hitta mönster, formulera, förbättra och undersöka hypoteser. Det inkluderar också olika former av kritisk granskning, som t ex värdering av bevis och andra former av matematiska argument. Resonemang ska kunna föras dels som en algoritmisk aktivitet med redan kända argument och bevis och dels som en problemlösande aktivitet i nya situationer.

5.5.2 Uppgiftstyper

Den matematiska resonemangskategorin inkluderar ett flertal olika förmågor som kan användas i olika situationer. Nedan följer ett antal uppgiftstyper vars beskrivningar kan användas vid konstruktion av uppgifter som avser att ge elever möjligheter att visa förmågor i matematiska resonemang. De beskrivna uppgiftstyperna är till stora delar baserade på uppgiftstyper som förknippas med matematiska resonemang i *TIMSS assessment frameworks and specifications 2003* (Mullis et al., 2001).

1) *Uppgifter där eleven ska ställa upp och undersöka hypoteser, analysera och dra slutsatser*
   Detta är en uppgiftstyp där eleverna t ex förväntas behöva ställa upp lämpliga hypoteser vid undersökning av mönster eller andra datamängder, föreslå metoder för undersökning av hypoteser eller datamängder, diskutera idéer, föreslå modeller, förutse resultat (t ex tal eller mönster) av en operation eller experiment innan det är utfört, bestämma och beskriva samband mellan variabler eller objekt i matematiska situationer eller formulera välgrundade slutsatser eller ståndpunkter från given information. Uppgift 22 är ett exempel på denna uppgiftstyp.

2) *Uppgifter där eleven ska styrka/bevisa*
   Detta är en uppgiftstyp där eleverna t ex förväntas behöva skaffa belägg för giltigheten av en handling eller sanningshalten i ett påstående genom

referenser till matematiska resultat eller egenskaper, eller utveckla matematiska argument för att bevisa eller motbevisa påståenden utifrån given relevant information. Uppgift 23 är ett exempel på denna uppgiftstyp.

3) *Uppgifter där eleven ska utvärdera*
Detta är en uppgiftstyp där eleverna t ex förväntas behöva diskutera och kritiskt utvärdera en matematisk idé, hypotes, påstående, metod, bevis eller andra matematiska argument. Uppgift 24 är ett exempel på denna uppgiftstyp.

4) *Uppgifter där eleven ska generalisera*
Detta är en uppgiftstyp där eleverna t ex förväntas behöva utöka området till vilket resultatet av matematiskt tänkande är användbart genom att omformulera resultat i mer generella och mer allmängiltiga termer och argumentera för dess giltighet. Uppgift 25 är ett exempel på denna uppgiftstyp.

5) *Uppgifter där eleven ska koppla ihop*
Detta är en uppgiftstyp där eleverna t ex förväntas behöva koppla ihop ny kunskap med existerande kunskap, göra och argumentera för kopplingar mellan relaterade matematiska idéer eller objekt och mellan olika representationer av samma begrepp, finna och argumentera för samband mellan olika delar av kunskap och relaterade representationer, kombinera olika matematiska procedurer för att åstadkomma resultat och argumentera för dess giltighet, eller kombinera resultat för att åstadkomma ett annat resultat och argumentera för dess giltighet. Uppgift 26 är ett exempel på denna uppgiftstyp.

6) *Uppgifter där eleven ska förklara*
Detta är en uppgiftstyp där eleverna t ex förväntas behöva förklara lämpligheten av att använda en viss metod i en viss situation, varför ett visst begrepp har vissa specificerande egenskaper, på vilket sätt olika representationer av samma begrepp överrensstämmer, varför ett svar stämmer, varför en viss modells giltighet har en viss begränsning etc. Uppgifter av den här typen ger också ofta utrymme för eleverna att visa på begreppskompetens och kommunikationskompetens. Uppgift 27 är ett exempel på denna uppgiftstyp.3.5.3 Exempel och kommentarer

5.5.3 Exempel och kommentarer

Uppgift 22 (NKP MaA vt-97, breddningsdel)

Tallek

Välj tre tal som kommer direkt efter varandra t ex	10, 11, 12
Multiplicera det största och det minsta talet med varandra.	$10 \cdot 12$
Multiplicera det mellersta talet med sig själv	$11 \cdot 11$
Jämför de två resultaten med varandra	

- Upprepa talleken med andra val av tre tal som kommer direkt efter varandra. Undersök vad som händer.
- Beskriv resultatet av din undersökning med ord och formler.
- Undersök enligt samma metod tre andra tal som följer på varandra på något annat sätt, t ex
  10, 12, 14
  10, 13, 16
  10, 14, 18

Kommentar: I denna uppgift behöver eleven upptäcka samband och beskriva dem både med ord och med ett algebraiskt uttryck. Arbetet inkluderar undersökning av mönster, eventuellt formulering av hypoteser, och formulering av slutsatser grundade på undersökningen.

Uppgift 23 (NKP MaC vt-02, uppgift 6)

a) Förklara, med hjälp av en graf, varför derivatan till en konstant funktion är noll.

b) Förklara, med hjälp av derivatans definition, varför derivatan till en konstant funktion är noll.

Kommentar: I dessa deluppgifter ska eleverna bevisa eller argumentera för ett påstående.

Uppgift 24 (NKP MaA ht-96, uppgift 8 omarbetad version)

Du fyller en termos med kaffe som har temperaturen 85°C. För denna termos gäller att temperaturen sjunker med 12% under varje tvåtimmarsperiod. Det gäller under 8 timmar från det att termosen har fyllts med varm vätska. Pelle påstår att man kan beräkna förändringen per timme genom att dela 12% med 2.

Har han rätt eller fel? Kom ihåg att motivera ditt svar.

Kommentar: I denna uppgift ska eleven utvärdera ett påstående.

Uppgift 25 (NKP MaA vt-97, uppgift 10 (modifierad))

En kompis säger följande till dig:

Tänk på ett tal och lägg till 15. Multiplicera summan med 4 och subtrahera 8 från resultatet. Dividera differensen med 4 och dra till sist bort 12 från kvoten. Om du talar om för mig vad du har fått för tal ska vi se om jag kan berätta vilket tal du tänkte på.

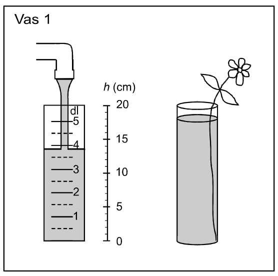
a) Om du säger att du får talet 2 kommer din kompis att veta att du tänkt på talet 1. Visa att detta påstående stämmer.

b) För vilka andra tal än 1 gäller det att det tal du får efter dessa beräkningar är ett mer än talet du tänkte på. Motivera ditt svar.

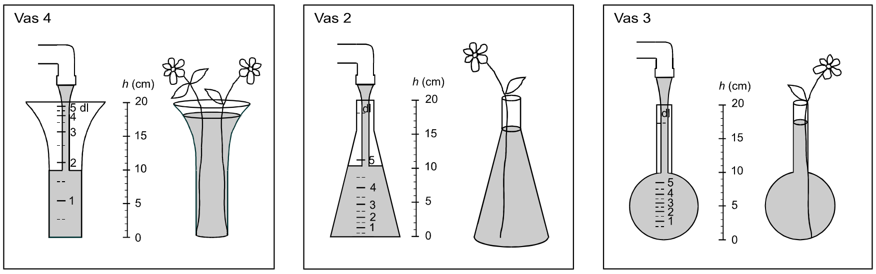
Kommentar: I b-uppgiften ska eleverna generalisera resultatet från a-uppgiften.

Uppgift 26 (NKP MaC vt-02, uppgift 15)

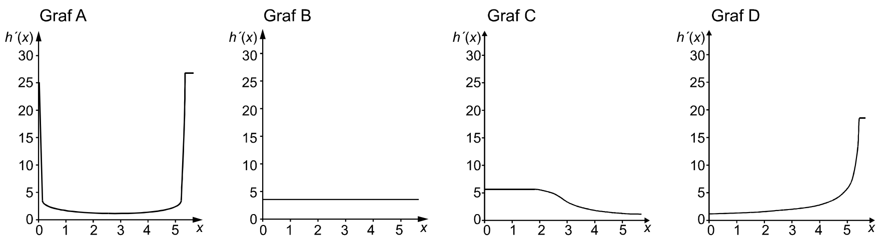
Denna uppgift handlar om fem olika glasvaser. Alla vaserna är 20 cm höga och rymmer 5,6 dl. En cylinderformad glasvas fylls med vatten enligt figuren nedan. Vattenytans höjd h cm över vasens botten är en funktion av den volym vatten x dl som runnit ner i vasen.



I figurerna nedan ser du hur man fyller på vatten i tre andra glasvaser. Vattenytans höjd h cm över vasens botten blir även nu en funktion av den volym vatten x dl som runnit ner.



Här finns fyra grafer uppritade. De visar graferna till derivatan $h'(x)$ för var och en av de fyra glasvaserna på de två föregående sidorna.



Para ihop graferna A, B, C och D med motsvarande vaser 1, 2, 3 och 4.

Motivera för varje par varför vasen hör ihop med grafen.

Kommentar: I denna uppgift ska eleverna göra kopplingar mellan derivata representerat i en graf och som en konkret utommatematisk aktivitet.

Uppgift 27 (NKP MaE ht-98, uppgift 5)

Eva och Martin löser samma uppgift. Här nedan kan du se hur de gjort.

a) Hur kan uppgiften ha varit formulerad?

b) Både Evas och Martins lösningar är korrekta. Varför får de inte samma svar?

Evas lösning:	Martins lösning:
$y' = y + x \quad y(1) = 2$	$y' = y + x \quad y(1) = 2$
$h = 0,1$	$y_h = Ce^x$
	$y_p = ax + b \ , \quad y'_p = a$
$y(1,1) = 2 + 0,1 \cdot (2 + 1) = 2,3$	$a = ax + b + x$
$y(1,2) = 2,3 + 0,1 \cdot (2,3 + 1,1) = 2,64$	$a = -1 \qquad b = -1$
$y(1,3) = 2,64 + 0,1 \cdot (2,64 + 1,2) = 3,024$	$y = Ce^x - x - 1$
Svar: $y(1,3) \approx 3,0$	$y(1) = Ce - 1 - 1 = 2$
	$Ce = 4$
	$C = 4e^{-1}$
	$y = 4e^{x-1} - x - 1$
	$y(1,3) \approx 3,099$
	Svar: $y(1,3) \approx 3,1$

Kommentar: I denna uppgift ska eleverna förklara egenskaper hos och konsekvenser av olika metoder.

5.6 Kommunikationskompetens

5.6.1 Beskrivning

Med *kommunikationskompetens* avser vi här förmågan att kunna kommunicera om matematiska idéer och tankegångar såväl i muntlig som i skriftlig form. Detta innebär att kunna ta emot och förstå information med matematiskt innehåll och också att kunna producera och förmedla sådan information. Det betyder bland annat att förstå matematisk terminologi och matematiska begrepp och att kunna använda dessa på lämpligt sätt i en flervägskommunikation.

5.6.2 Uppgiftstyper

Alla uppgifter kräver i praktiken att eleverna tolkar information med matematiskt innehåll. Vissa av dessa uppgifter ger också goda möjligheter att visa den del av kommunikationskompetensen som berör produktion och förmedling av information med matematiskt innehåll. Det gäller t ex följande uppgiftstyper:

1) *Uppgifter som handlar om att beskriva eller förklara begrepp, lagar och metoder*
   Kommunikationsaspekten är särskilt tydlig i uppgifter där det förekom-

mer en direkt uppmaning att beskriva eller förklara något, t ex en metod eller ett begrepp. Uppgifter av den här typen ger också ofta utrymme för eleverna att visa på begreppskompetens och resonemangskompetens. Uppgift 28 och Uppgift 29 är exempel på denna uppgiftstyp.

2) *Uppgifter som ställer särskilda krav på redovisning och matematiskt språk*
Detta kan gälla t ex användning av matematisk terminologi och tydlighet i resonemangen. Uppgift 30 är ett exempel på denna uppgiftstyp.

5.6.3 Exempel och kommentarer

Uppgift 28 (NKP MaC vt -97, uppgift 11)

En kompis till dig, som läser samma mattekurs som du, kommer fram till dig och säger ”Jag fattar inte ett dugg av det här med derivata”.

Hjälp din kompis genom att förklara vad derivata är. Förklara så utförligt du kan och på så många sätt du kan. *Du ska inte härleda eller beskriva deriveringsreglerna.*

Kommentar: I denna uppgift ska eleverna förklara ett begrepp och får därigenom möjlighet att visa kunskaper i att kommunicera matematik. Uppgifter av den här typen, där eleverna ska förklara ett begrepp, faller naturligt även under rubriken begreppskompetens.

Uppgift 29 (NKP MaA vt -96, uppgift 6)

På en anslagstavla i församlingsgården har någon satt upp tidningsurklippet med cirkeldiagrammet som illustration. Förklaring till diagrammet saknas.

a) Skriv en förklaring till diagrammet så att man förstår hur det hänger ihop med artiken.

b) Varför är det lämpligt med cirkeldiagram i detta fall? Motivera ditt svar.

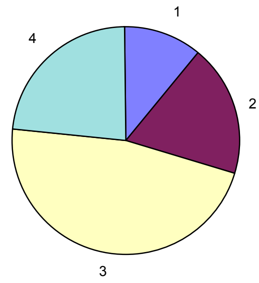
Dyrt gå i kyrkan

Ett vanligt gudstjänstbesök i Sverige kostar 92 kronor. Det är lite dyrare i Mälardalen där kyrkobesöken är färre, 101 kronor, och billigast i sydöstra Sverige, 81 kronor.

Siffrorna har räknats fram av Jörgen Straarup på Svenska kyrkans forskningssekretariat och bygger på församlingarnas utgifter och deras besöksstatistik.

Han har bland annat räknat på hur stor del av prästens arbetstid som går åt till förberedelser inför gudstjänsten.

De 92 kronorna som varje besökare "kostar" fördelar sig på följande poster: 17:50 prästens medverkan, 22 kronor kyrkomusikern, 42:30 driftskostnader samt 10:20 förbrukningsvaror.



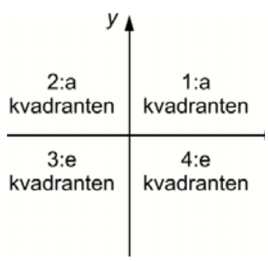
Kommentar: I denna uppgift ombeds eleverna förklara och motivera matematiken i en tillämpad situation. Förklaringen gäller dels själva begreppet cirkeldiagram och dels användandet av cirkeldiagram.

Uppgift 30 (NKP MaB vt -02, uppgift 17)

Vid bedömning av ditt arbete med uppgift nummer 17 kommer läraren att ta hänsyn till:

- Hur väl du beräknar och jämför trianglarnas areor
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du beskriver hur arean beror av k
- Hur väl du redovisar ditt arbete

Linjerna $y = kx + 13$ och $y = x + 1$ skär varandra i en punkt som ligger i 1:a kvadranten om k väljs på lämpligt sätt. Då är skärningspunktens koordinater positiva.



Låt $k = 0$ och rita upp de båda linjerna. Bestäm skärningspunkten mellan linjerna.

Linjerna $y = kx + 13$, $y = x + 1$ samt *y*-axeln bildar en triangel då $k = 0$. Linjerna $y = kx + 13$, $y = x + 1$ samt *y*-axeln bildar en annan triangel då $k = -1$. Beräkna och jämför trianglarnas areor.

Arean av den triangel som begränsas av linjerna $y = kx + 13$, $y = x + 1$ samt *y*-axeln är beroende av värdet på *k*. Undersök och beskriv hur arean beror av *k*, under förutsättningen att linjerna skär varandra i första kvadranten.

Kommentar: I denna uppgift ska eleven göra en större utredning av hur arean mellan några linjer i ett koordinatsystem påverkas av en konstant k. I instruktionerna till uppgiften betonas starkt de kommunikativa aspekterna av utredningen. Uppgiften ställer särskilda krav på kvaliteten på redovisningen och det matematiska språket som uttryckligen ska bedömas.

5.7 Uppgifter som anknyter till ett etiskt, miljö-, internationellt eller historiskt perspektiv

5.7.1 Beskrivning

Detta är uppgifter där frågeställningen och situationen som beskrivs i uppgiften anknyter till något av de fyra perspektiven i rubriken.

5.7.2 Uppgiftstyper

Det finns flera olika sätt att anknyta till de fyra perspektiven. Följande tre uppgiftstyper är exempel på sådana sätt:

1) *Uppgifter där eleven med hjälp av bland annat matematiken ska ta ställning till frågor som rör något eller några av perspektiven*
   Uppgift 31 är ett exempel på denna uppgiftstyp.

2) *Uppgifter med ett kontext som anknyter till något av perspektiven även om matematiken inte används till att besvara någon frågeställning med relevans för perspektiven*
   Uppgift 32 och Uppgift 33 är exempel på denna uppgiftstyp.

3) *Uppgifter där en faktaruta visar på ett perspektivs relevans i den matematiska tillämpningen i uppgiften*
   Uppgift 34 är ett exempel på denna uppgiftstyp.

5.7.3 Exempel och kommentarer

Uppgift 31 (NKP MaC vt –98, breddningsuppgift)

Etiskt sparande

För den som vill spara pengar långsiktigt och samtidigt hjälpa människor som har det svårt finns flera möjligheter. Du ska jämföra två olika sätt att göra detta.

1) Du sätter in lika stora belopp varje år på ett bankkonto. Ditt sparkapital växer eftersom du får ränta. Du ska också skänka pengar till någon hjälporganisation och du får själv bestämma hur mycket och när du ska skänka pengarna. Skatten på banksparande är 30 % av årsräntan och den dras från ditt kapital i slutet av varje år.

2) Du sätter in lika stora belopp varje år i en så kallad etisk aktiefond. Värdet av sparandet i en aktiefond är beroende av aktiernas utveckling. I en etisk aktiefond skänks 2 % av dina pengar i fonden i slutet av varje år till en hjälporganisation som du har valt. På denna gåva betalas ingen skatt. Skatt betalar du först då du själv tar ut pengar ur fonden. Skatten är då 30 % av värdeökningen (värdeökningen är differensen av kapitalets värde vid uttaget och hela det insatta kapitalet).

Du får för båda sparformerna anta att den procentuella värdeökningen för sparformen är lika stor varje år under hela sparperioden. För den etiska aktiefonden gäller detta ökningen innan pengarna till hjälporganisationen skänks. Du kan använda nedanstående tabell som hjälp för din bedömning av vad som kan vara rimliga värdeökningar för respektive sparform.

Tabell: Värdeökning för sparkapital på ett bankkonto och i en etisk aktiefond under 1990-talet. För den etiska aktiefonden gäller detta ökningen innan pengarna till hjälporganisationen skänks.

	Värdeökning i %					
	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Bankkonto	11	10	7	6	7	4
Etisk aktiefond	6	41	64	9	17	39

Jämför de belopp du kan spara ihop med respektive sparform och jämför även hur mycket pengar någon hjälporganisation får från dig. *I din jämförelse behöver du inte ta hänsyn till skatten.*

Gör en ny jämförelse där du även tar hänsyn till skatten.

Kommentar: Denna uppgift bedöms innehålla ett etiskt perspektiv eftersom eleverna uppmärksammas på möjligheter till solidaritet. Många uppgifter med geometrisk summa handlar om pengar men på detta sätt kan även ett etiskt perspektiv infogas i dessa uppgifter. Genom att eleverna ska bestämma sparbelopp behöver de ta ställning till en fråga som anknyter till det etiska perspektivet. De kan också beräkna konsekvenserna av sitt val i form av det sparade beloppets värde vid senare tillfällen, vilket i sin tur skulle kunna påverka valet av sparbelopp.

Uppgift 32 (NKP MaC vt -98, uppgift 13)

När ogräsmedlet Meklorprop används i naturen bryts det efter hand ned. Vid konstant jordtemperatur gäller att den kvarvarande mängden avtar exponentiellt med tiden. Den tid det tar tills hälften av ogräsmedlet är kvar (halveringstiden) beror på jordtemperaturen enligt tabellen nedan.

Jordtemperatur (°C)	Halveringstid i dygn
5	20
10	12
20	3

Källa: Miljøforskning, Nyhedsbrev nr 10, 1994

Vid ett tillfälle besprutades en åker med 8 kg Meklorprop. Marktemperaturen var 5 °C vid besprutningstillfället och antas vara konstant under de följande veckorna.

Hur många procent av den ursprungliga mängden ogräsmedel finns kvar i jorden efter 10 dygn? (3p)

Kommentar: Denna uppgift innehåller indirekt ett miljöperspektiv i och med ogräsmedels miljöpåverkan. Uppgiften antyder dock bara problemet och möjligtvis hade det varit möjligt att gå längre. Detta skulle t ex ha kunnat ske med en frågeställning rörande ett beslut där miljökonsekvenserna av olika val är tydliga men där matematiken krävs som underlag för beslut.

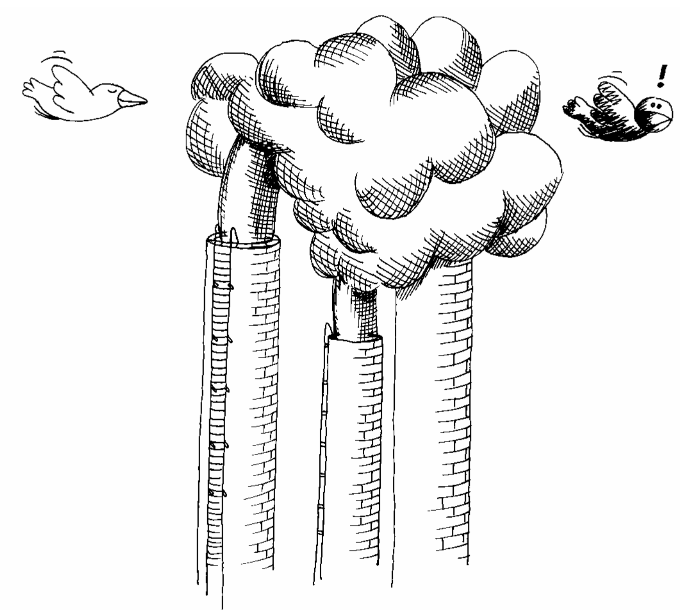
Uppgift 33 (NKP MaE ht -96, uppgift 11)

Koldioxiden i atmosfären ökar bl. a. på grund av förbränning av fossila bränslen. Före industrialismens genombrott uppgick koldioxidhalten till 280 ppm (miljondelar). År 1960 var halten 310 ppm och har sedan dess ökat med hastigheten 0,40% per år.

a) Ställ upp en differentialekvation som visar hur koldioxidhalten y ppm förändras med tiden x år räknat från 1960.

b) När det förindustriella värdet 280 ppm har fördubblats anser vissa forskare att medeltemperaturen vid jordytan kommer att höjas 2-5 grader. Kommer denna fördubbling att inträffa under nästa århundrade?

c) Slutsatsen i *b* grundar sig på användning av en matematisk modell. Hur kan en kritiker argumentera mot denna användning av modellen?



Kommentar: Uppgiften innehåller ett miljöperspektiv. Det står inte uttryckligen att koldioxid i atmosfären skulle vara ett problem men det är uppenbart för de flesta att detta är en viktig miljöfråga. Eventuellt hade det varit ännu tydligare om det i b-

uppgiften också hade framgått de möjliga konsekvenserna av en medeltemperaturhöjning på 2-5 grader.

Uppgift 34 (NKP MaE ht -98, uppgift 15)

Vismut sönderfaller till tallium med en sönderfallshastighet av 32 % per minut. Tallium sönderfaller till bly med sönderfallshastigheten 15 % per minut. Det bly som bildas är stabilt och sönderfaller alltså inte.

Vid ett laboratorieförsök utgår vi från en viss mängd ren vismut. Vi betecknar mängderna av vismut och tallium med A respektive B vid den tidpunkt då sönderfallet pågått i t minuter. Förändringshastigheten hos mängden tallium kan då beskrivas med differentialekvationen $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 0{,}32A - 0{,}15B$

a) Beteckna mängden bly med C och ställ upp differentialekvationer som beskriver förändringshastigheterna hos mängderna av vismut och bly. *Endast svar fordras.*

b) Vad kan man säga om förändringshastigheterna för mängderna av vismut, tallium och bly vid den tidpunkt då mängden tallium är maximal?

Bakgrund: Radonproblemet

Vid det radioaktiva sönderfallet av gasformig radon bildas ämnen vilka i sin tur sönderfaller, så kallade radondöttrar. Bland dessa ämnen återfinns vismut, tallium och bly. De kan komma ned i lungorna och p.g.a. sin strålning öka risken för lungcancer. Vissa forskare anser att minst en tiondel av alla dödsfall i lungcancer i Sverige beror på inandning av radon.

Radon från marken är den vanligaste orsaken till radonproblem i bostäder. Det finns inte radon i alla marker men t.ex. i rullstensåsar i Bergslagen, i granit på sina håll i Norrland och i alunskiffer. Vissa byggnadsmaterial, t.ex. blå gasbetong som inte tillverkas längre, har visat sig avge radon och har därmed blivit ett miljöproblem i hus av dessa material. Problemen med radon från mark eller från byggnadsmaterial kan åtgärdas genom förbättrad ventilation i huset.

Statens strålskyddsinstitut beräknade 1994 att 200 000 svenska bostäder har högre radonhalter än de tillåtna gränsvärdena, 320 000 bostäder hade då fått sin radonhalt uppmätt, och 20 000 hade radonsanerats. Vid sådan sanering kan staten ge ett bidrag.

(Källa: Bra Böckers Lexikon 2000, 1998)

Kommentar: I denna uppgift kunde inte den intressanta tillämpningen på ett bra sätt vävas in i själva uppgiften. Istället används en faktaruta efter själva frågeställningen för att visa på matematikens tillämpningsmöjligheter och samtidigt ge ett miljöperspektiv. Nackdelen med detta förfaringssätt är att den textmängd som uppkommer eventuellt kan störa en del elever. Uppgiften kan också försvåras av att texten inte behövs för uppgiftslösningen

Referenser

Lithner, J. (2003). *A framework for analysing qualities of mathematical reasoning: Version 2* (Research reports, No 3, in Mathematics education). Umeå: Umeå universitet, Matematiska institutionen.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Smith, T. A., Garden, R. A., Gregory, K. D., Gonzalez, E. J., Chrostowski, S.J., & O´Conner, K.M. (2001). *TIMSS assessment frameworks and specifications 2003.* Chestnut Hill, MA: International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (1999). Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse. *Uddannelse, 9*, 21-29.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (1999). *Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment*. Paris: OECD.

Palm, T. (2001). *Word problems as simulations of real world task situations: A proposed framework* (Research reports, No 3, in Mathematics Education). Umeå universitet, Matematiska institutionen.

Skolverket. (1995). *Naturvetenskapsprogrammet - Programmål, kursplaner, betygskriterier och kommentarer.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2000). *Naturvetenskapsprogrammet - Programmål, kursplaner, betygskriterier och kommentarer.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2002). *Gymnasieskolans kursprov läsåret 2001/2002, en resultatredovisning.* Stockholm: Skolverket.

Undervisningsministeriet. (2002). *Kompetencer og matematiklæring* (Uddannelsessyrelsens temahæfteserie nr. 18). Köpenhamn: Undervisningsministeriet

Utbildningsdepartementet. (1994). *Läroplaner för det obligatoriska skolväsendet och de frivilliga skolformerna.* Stockholm: Utbildningsdepartementet.

RAPPORTER FRÅN ENHETEN FÖR PEDAGOGISKA MÄTNINGAR

Tidigare i denna serie utgivna rapporter

PM Nr 15.	HÖGSKOLEPROVET - Konstruktion, resultat och erfarenheter, Christina Stage (red)
PM Nr 16.	RESULTAT FRÅN PRÖVNING MED HÖGSKOLEPROVET 1985, Anders Lexelius, Ingemar Wedman
PM Nr 17.	RESULTAT FRÅN PRÖVNING MED HÖGSKOLEPROVET 1986, Anders Lexelius, Ingemar Wedman
PM Nr 18.	RESULTAT FRÅN PRÖVNING MED HÖGSKOLEPROVET 1987, Christina Stage

1988

PM Nr 19.	ALFRED BINET OCH INTELLIGENSTESTS UTVECKLING, Sara Henrysson
PM Nr 20.	NÅGRA KRITISKA REFLEXIONER KRING HÖGSKOLEPROVET FRÅN EN VERKSAMHETSTEORETISK UTSIKTSPUNKT, Lars-Åke Lindberg
PM Nr 21.	MÄTTEKNISK BESKRIVNING AV HÖGSKOLEPROVET 1985-88, Anders Lexelius, Ingemar Wedman
PM Nr 22.	CENTRALA PROVET I FYSIK 1988, Kjell Gisselberg, Hans Mattsson, Kristian Ramstedt

1989

PM Nr 23.	VAD TYCKER PROVDELTAGARNA OM HÖGSKOLEPROVET 1988-05-07? Anita Wester-Wedman
PM Nr 24.	AO-PROVET 1980-1987: PROVUPPGIFTERNAS TEXTMÄNGD OCH INFORMATIONSVÄRDE, Kerstin Salomonsson, Ingemar Wedman
PM Nr 25.	CENTRALA PROVET I FYSIK 1989, Kjell Gisselberg, Hans Mattsson, Kristian Ramstedt
PM Nr 26.	HÖGSKOLEPROVET - Delprov 4: DTK - Beskrivning av provets sammansättning och utfall 1980-1987, Internt arbetsmaterial, Widar Henriksson, Ingegerd Jonsson
PM Nr 27.	SÖKSTRATEGI OCH PROBLEMLÖSNING I STUF-PROVET - En jämförande analys av uppgifter med höga respektive låga p-värden på vissa komponenter i STUF-provet, Internt arbetsmaterial, Maj-Britt Lindberg, Anita Wester-Wedman
PM Nr 28.	STUDIETEKNISKA FÄRDIGHETER OCH LÖSNINGSFREKVENS - Ett försök med STUF, Internt arbetsmaterial, Maj-Britt Lindberg

PM Nr 29. DIAGNOSTISKA PROV FÖR DE 2-ÅRIGA YRKESLINJERNA I GYMNASIESKOLAN, Mona Ladfors, Ingemar Wedman

PM Nr 30. KVANTITATIV BESKRIVNING AV KUNSKAPS- OCH FÄRDIGHETSUTVECKLINGEN PÅ NÅGRA 2-ÅRIGA LINJER I GYMNASIESKOLAN, Mona Ladfors, Ingemar Wedman

PM Nr 31. CENTRALA PROVEN I FYSIK FÖR KOMVUX 1989, Kristian Ramstedt, Kjell Gisselberg

1990

PM Nr 32. STUDIEFÄRDIGHETSPROVETS (STUF) BETYDELSE I HÖGSKOLEPROVET - En studie av simulerat utfall med och utan STUF-provet, Anita Wester-Wedman

PM Nr 33. CENTRALA PROVET I KEMI 1989, Olof Hofslagare, Hans Mattsson

PM Nr 34. CENTRALA PROVET I FYSIK 1990, Kjell Gisselberg, Hans Mattsson, Kristian Ramstedt

PM Nr 35. CENTRALA PROVEN I FYSIK FÖR KOMVUX 1990, Kristian Ramstedt, Kjell Gisselberg

PM Nr 36. VAD TYCKER PROVDELTAGARNA OM HÖGSKOLEPROVET 1990-05-05? Anita Wester-Wedman

PM Nr 37. CENTRALA PROVET I KEMI 1990, Olof Hofslagare, Hans Mattsson

PM Nr 38. NYTT TEORIPROV 1990 - STATISTISK BESKRIVNING AV KÖRKORTSPROVET, VÅREN 1990, Hans Mattsson

1991

PM Nr 39. GRUPPDIFFERENSER OCH BIAS, Christina Stage

PM Nr 40. EFFEKTER AV UPPREPAT PROVDELTAGANDE, Widar Henriksson

PM Nr 41. TEXTMÄNGDENS BETYDELSE FÖR PRESTATIONEN PÅ LÄSPROVET, Widar Henriksson, Stig Eriksson, Ingegerd Jonsson, Christina Stage, Ingemar Wedman, Anita Wester-Wedman

PM Nr 42. KÖNSSKILLNADER I RESULTAT PÅ HÖGSKOLEPROVET VÅREN 1990, Christina Stage

PM Nr 43. RESULTAT FRÅN PRÖVNING MED HÖGSKOLEPROVET 1989, Christina Stage

PM Nr 44. RESULTAT FRÅN PRÖVNING MED HÖGSKOLEPROVET 1990, Christina Stage

PM Nr 45. CENTRALA PROVET I FYSIK 1991. Resultat och kommentarer, Kjell Gisselberg, Hans Mattsson, Kristian Ramstedt

PM Nr 46. CENTRALA PROVET I KEMI 1991. Resultat och kommentarer, Olof Hofslagare, Hans Mattsson

PM Nr 47. CENTRALA PROVEN I FYSIK FÖR KOMVUX 1991. Resultat och kommentarer, Kristian Ramstedt, Kjell Gisselberg

PM Nr 48. HÖGSKOLEPROVET VÅREN 1991. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage

PM Nr 49. LUCK-PROVET. Ett försök med ett nytt verbalt prov, Christina Stage, Widar Henriksson, Ingemar Wedman, Anita Wester-Wedman

1992

PM Nr 50. LÄS 91 - ETT NYTT FÖRSÖK. En studie av textmängdens betydelse Widar Henriksson, Stig Eriksson

PM Nr 51. HUR TÄNKER PROVTAGARNA - EGENTLIGEN? En studie av lösningsprocessen vid genomförandet av DTK-prov, Anita Wester-Wedman

PM Nr 52. ETS INVITATIONAL CONFERENCE 1991. Sex Equity in Educational Opportunity, Achievement, and Testing. New York 1991-10-26, Christina Stage

PM Nr 53. BETYG OCH HÖGSKOLEPROV, Christina Stage

PM Nr 54. FÖRLÄNGD PROVTID PÅ DTK-PROVET. En studie av effekten av förlängd provtid på könsskillnaden i prestation på DTK-provet, Anita Wester-Wedman

PM Nr 55. LÖSNINGSSTRATEGI I DTK-PROVET. En studie av relationen lösningsstrategi och uppgiftsbias avseende kön hos uppgifter i DTK-provet, Anita Wester-Wedman

PM Nr 56. ETT FÖRSÖK MED ÖPPNA FRÅGOR I DTK-PROVET. En jämförelse mellan öppna frågor och flervalsfrågor avseende könsskillnaden i prestation på DTK-provet, Anita Wester-Wedman

PM Nr 57. CENTRALA PROVET I FYSIK 1992. Resultat och kommentarer Kjell Gisselberg, Hans Mattsson, Kristian Ramstedt

PM Nr 58. LÄS 92. LÄS-prov med sex texter. Widar Henriksson, Stig Eriksson

PM Nr 59. HÖGSKOLEPROVET HÖSTEN 1991. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage

PM Nr 60. CENTRALA PROVET I KEMI 1992. Resultat och kommentarer, Olof Hofslagare, Hans Mattsson

PM Nr 61. CENTRALA PROVEN I FYSIK FÖR KOMVUX 1992. Resultat och kommentarer, Kristian Ramstedt, Kjell Gisselberg

PM Nr 62. SKILLNADER MELLAN BETYG OCH HÖGSKOLEPROVS-RESULTAT 1991, Christina Stage

PM Nr 63. HÖGSKOLEPROVET VÅREN 1992. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage

PM Nr 64. MODELL FÖR PROGNOS AV PROVUTFALL UTIFRÅN DEL-PROVSSPECIFIKA ANKARUPPGIFTER, Widar Henriksson

PM Nr 65. NÅGOT OM UPPGIFTSBANKER, Kristian Ramstedt

PM Nr 66. TÅNAGELAREANS BETYDELSE FÖR KROPPSMEDELVÄRDET. Några metaforiska aspekter på betyg som urvalsinstrument, Kristian Ramstedt

PM Nr 67. STUDENTERS SYN PÅ STUDIEFRAMGÅNG. En pilotstudie inför studier av studieframgångskriteriet inom ramen för prognosprojektet vid Högskoleprovet, Ewa Andersson, Tomas Grysell

PM Nr 68. CENTRALA PROV I FYSIK FÖR KOMVUX. Några kvalitativa synpunkter på ett kvantitativt utvecklingsprojekt, Kristian Ramstedt

PM Nr 69. META-ANALYSEN SOM METOD FÖR ATT INTEGRERA RESULTAT FRÅN STUDIER AVSEENDE ÖVNING OCH INSTRUKTION, Widar Henriksson

PM Nr 70. EFFEKTEN AV UPPREPAT PROVTAGANDE. En studie av poängförändringar från första till andra provgenomförandet, Widar Henriksson, Kenny Bränberg

1993

PM Nr 71. KÖRKORTSUTBILDNINGENS TEORIPROV. Provet i ett forskningsperspektiv och olika utvecklingsmöjligheter, Hans Mattsson

PM Nr 72. HÖGSKOLEPROVET HÖSTEN 1992. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage

PM Nr 73. CENTRALA PROVEN I FYSIK FÖR KOMVUX 1993. Resultat och kommentarer, Kristian Ramstedt

PM Nr 74. CENTRALA PROVET I KEMI 1993. Resultat och kommentarer, Olof Hofslagare, Kristian Ramstedt

PM Nr 75. CENTRALA PROVET I FYSIK 1993. Resultat och kommentarer, Jan-Olof Lindström, Kristian Ramstedt

PM Nr 76. HÖGSKOLEPROVET VÅREN 1993. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage

PM Nr 77. VAD TYCKER PROVDELTAGARNA OM HÖGSKOLEPROVET 1993-04-17?, Hans Kolmodin

PM Nr 78. TRAFIKANTUTBILDNING I GYMNASIESKOLAN. Studie kring försök med frivillig trafikantutbildning vid Dragonskolan i Umeå, Tor Söderström, Hans Mattsson

PM Nr 79. HÖGSKOLEPROVET HÖSTEN 1993. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Peter Ingerskog, Christina Stage

PM Nr 80. TIMSS' PILOTSTUDIE VÅREN -93. Elevernas attityder till matematik och naturvetenskap, Anita Wester

1994

PM Nr 81. FÖRSÖK MED UTÖKAD PROVTID PÅ LÄS-PROVET, Widar Henriksson, Stig Eriksson

PM Nr 82. PROVTID OCH KÖN. En studie av LÄS-provet, Kristian Ramstedt, Widar Henriksson

PM Nr 83. CENTRALA PROVET I FYSIK 1994. Resultat och kommentarer, Jan-Olof Lindström, Kristian Ramstedt, Monika Kriström

PM Nr 84. PROVBANKER I NATURVETENSKAPLIGA ÄMNEN, Jan-Olof Lindström

PM Nr 85. TIMSS PILOTSTUDIE VÅREN -93. Hur arbetar svenska elever med flervalsuppgifter? En tänka-högt studie av hur elever löser flervalsuppgifter i matematik, Lena Adolfsson

PM Nr 86. ÖVERSÄTTNINGSPROBLEM VID INTERNATIONELLA STUDIER AV SKOLPRESTATION. En studie av uppgifter i TIMSS pilotstudie våren -93, Anita Wester

PM Nr 87. CENTRALA PROVET I KEMI 1994. Resultat och kommentarer, Olof Hofslagare, Monika Kriström, Kristian Ramstedt

PM Nr 88. TIMSS FIELD TRIAL VÅREN -94. Utprövning av uppgifter i matematik och no-ämnen, Lena Adolfsson

PM Nr 89. HÖGSKOLEPROVET VÅREN 1994. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage, Annika Johansson

PM Nr 90. KRITERIER FÖR YRKESFRAMGÅNG VID POLISEN. En intervjustudie av de krav som ställs vid rekrytering av poliser i Norrland, Simon Wolming, Thomas Åkerman

PM Nr 91. HÖGSKOLEPROVETS HISTORIA. Några bidrag, Sten Henrysson

PM Nr 92. UTKAST TILL EN METOD FÖR BEDÖMNING AV NATIONELLA PROV I MATEMATIK, Kristian Ramstedt

PM Nr 93. NATIONELLA KURSPROV I MATEMATIK - en introduktion, Jan-Olof Lindström

PM Nr 94. UPPGIFTSFORMATETS BETYDELSE FÖR KÖNSSKILLNADER I PROVPRESTATION. Ett andra försök med öppna frågor i DTK-provet, Anita Wester, Gunilla Ögren

PM Nr 95. HÖGSKOLEPROVET HÖSTEN 1994. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage

1995

PM Nr 96. LUCKPROV MED FLERVALSUPPGIFTER. Ett alternativt ORD-prov? Christina Stage, Ingegerd Jonsson

PM Nr 97. GRUPPSKILLNADER PÅ CENTRALA PROV I FYSIK, Kristian Ramstedt

PM Nr 98. CENTRALA PROVET I FYSIK 1995. Resultat och kommentarer, Monika Kriström, Jan-Olof Lindström, Gunnar Wästle

PM Nr 99. CENTRALA PROVET I KEMI 1995. Resultat och kommentarer, Olof Hofslagare, Monika Kriström, Gunnar Wästle

PM Nr 100. AMBITIONER OCH ATTITYDER TILL STUDIER OCH STUDIERESULTAT Intervjuer med studerande vid ekonomlinjen i Umeå, Anita Wester

PM Nr 101. PREDIKTION AV STUDIEFRAMGÅNG. Reflektioner utifrån en litteraturgranskning, Simon Wolming

PM Nr 102. HÖGSKOLEPROVET VÅREN 1995. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage, Charlotta Jarl

PM Nr 103. MODELL FÖR KÖRKORTSPROVETS TEORIPROV. Modellprövning och reflektioner, Widar Henriksson, Petter Wikström, Anna Zolland

PM Nr 104. EN BESKRIVNING AV FEM UTBILDNINGAR VID UMEÅ UNIVERSITET. En genomgång av ekonomlinjen, sociala linjen, teknisk fysik, läkarlinjen samt ämneslärarlinjen med avseende på organisation och utformning, Ewa Andersson, Tomas Grysell

PM Nr 105. INTRYCK OCH BETYDELSE FÖR PREPARANDUTBILDNINGEN I SVENSKA FÖR UTLÄNDSKA STUDERANDE VID UMEÅ UNIVERSITET. En intervjustudie, Petter Wikström, Anna Zolland

PM Nr 106. UTPRÖVNING AV PROVUPPGIFTER. Förändring av högskoleprovets utprövningsrutiner, Christina Stage

PM Nr 107. FÖRSÖK INFÖR FÖRÄNDRING AV HÖGSKOLEPROVETS UTPRÖVNINGSRUTINER, Gunilla Ögren, Christina Stage, Kerstin Åström, Anders Lexelius

PM Nr 108. HANDBOK INFÖR HÖGSKOLEPROVET, Birgitta Wallin

PM Nr 109. ETT TEORETISKT PROV FÖR ARBETSMARKNADSVERKETS (AMV) REGIONALA BASUTBILDNING. En beskrivning av arbetet med att utveckla ett teoretiskt basprov på uppdrag av Arbetsmarknadsstyrelsen (AMS), Ewa Andersson, Tomas Grysell, Christina Stage

PM Nr 110. HÖGSKOLEPROVET HÖSTEN 1995. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage, Charlotta Jarl

1996

PM Nr 111. HUR KLARAR SIG STUDENTER SOM ANTAGITS VIA HÖGSKOLEPROV? Simon Wolming

PM Nr 112. NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK. KURS A, HT -95. Resultat och kommentarer, Jan-Olof Lindström, Peter Nyström

PM Nr 113. SAMMA POÄNG - SAMMA PRESTATION? En jämförelse på delprovs- och uppgifts- nivå mellan män och kvinnor med samma totalresultat på högskoleprovet, Christina Stage

PM Nr 114. CENTRALA PROVET I FYSIK 1996. Resultat och kommentarer, Jan-Olof Lindström, Gunnar Wästle

PM Nr 115. HÖGSKOLEPROVET VÅREN 1996. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage, Charlotta Jarl

PM Nr 116. EN STATISTISK MODELL FÖR BESKRIVNING AV DATA. En studie av TIMSS-data med LISREL-metodik, Anna Hofslagare

PM Nr 117. PROVBANKER I MATEMATIK. Rapport till Skolverket, Jan-Olof Lindström, Eva Borgegård

PM Nr 118. NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK. KURS A, C OCH E, VT -96. Resultat och kommentarer, Jan-Olof Lindström, Peter Nyström, Torulf Palm

PM Nr 119. ETT FÖRSÖK MED OLIKA ANTAL UPPGIFTER PER FIGURUPPSÄTTNING I DTK-PROVET, Gunilla Ögren

PM Nr 120. ETT FÖRSÖK MED FYRA SVARSFÖRSLAG PER UPPGIFT ISTÄLLET FÖR FEM I DTK-PROVET, Gunilla Ögren

PM Nr 121. HÖGSKOLEPROVET HÖSTEN 1996. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage, Gunilla Ögren, Charlotta Jarl

1997

PM Nr 122. VAD TYCKER SVENSKA 13- OCH 14-ÅRINGAR OM MATEMATIK OCH NATURVETENSKAP? En studie inom TIMSS-projektet med fokus på kön, Anita Wester

PM Nr 123. KVANTITATIVA UPPGIFTER I ANTAGNINGSPROV. Några nationella och internationella exempel på uppgiftstyper som mäter kvantitativ förmåga, Gunilla Ögren, Anders Lexelius

PM Nr 124. SVENSKA ELEVERS KUNSKAPER I MATEMATIK I ETT INTERNATIONELLT PERSPEKTIV. Några metodologiska reflektioner, Lena Adolfsson

PM Nr 125. HÖGSKOLEPROVET VÅREN 1997. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage, Gunilla Ögren, Charlotta Jarl

PM Nr 126. NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK. Kurs A, C och E, HT -96. Resultat och kommentarer, Maria Ericsson, Jan-Olof Lindström, Peter Nyström, Gunilla Näsström, Torulf Palm, Björn Sigurdsson

PM Nr 127. NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK. Kurs A, D och E, VT -97. Resultat och kommentarer, Maria Ericsson, Jan-Olof Lindström, Gunilla Näsström, Björn Sigurdsson

PM Nr 128. NÅGRA JÄMFÖRELSER MELLAN HÖGSKOLEPROVEN HÖSTEN 1995 OCH HÖSTEN 1996. Kristian Ramstedt, Christina Stage

PM Nr 129. VALIDITET. Ett traditionellt begrepp i modern tillämpning, Simon Wolming

PM Nr 130. MATEMATIKLÄRARES ATTITYDER OCH ARBETSSÄTT. Resultat av lärarenkäten i TIMSS, Susanne Olofsson

PM Nr 131. HÖGSKOLEPROVET HÖSTEN 1997. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage, Gunilla Ögren, Charlotta Jarl

PM Nr 146. KVINNOR OCH MÄN PÅ EKONOM- OCH LÄKARLINJEN. - En studie av antagna och deras studieprestationer på några utbildningsorter, Ewa Andersson, Anders Lexelius, Kristian Ramstedt

PM Nr 147. HÖGSKOLEPROVET HÖSTEN 1998. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage, Gunilla Ögren, Lena Konradsson

1999

PM Nr 148. RÄTT ELLER FEL? Ett försök med ett nytt verbalt prov för högskoleprovet, Kerstin Andersson

PM Nr 149. FLICKOR, POJKAR OCH FYSIK. En undersökning av den svenska specialistgruppen i TIMSS population 3, Kristian Ramstedt

PM Nr 150. MÅLRELATERADE OCH NORMRELATERADE PROV. – En teoretisk granskning av vilka statistiska tekniker som kan användas för att beskriva uppgifternas kvalitet och provens reliabilitet, Marie Wiberg

PM Nr 151. 100 PROVDELTAGARE MED 2,0 – VAD BLEV DET AV DEM? En intervjustudie av 100 personer som våren 1992 fick 2,0 på högskoleprovet, Kerstin Andersson

PM Nr 152. FLICKOR, POJKAR OCH MATEMATIK. En DIF-studie av TIMSS-resultaten bland svenska 13-åringar, Anita Wester, Christina Jonsson

PM Nr 153. HÖGSKOLEPROVET. Konstruktion, resultat och erfarenheter, Kerstin Andersson (red)

PM Nr 154. HÖGSKOLEPROVET VÅREN 1999. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage, Gunilla Ögren, Lena Konradsson

PM Nr 155. FLICKOR, POJKAR OCH FYSIK I ETT INTERNATIONELLT PERSPEKTIV. Kristian Ramstedt

PM Nr 156. UPPGIFTSKONSTRUKTION I NODGRUPPER FÖR PROVBANKEN I MATEMATIK OCH FYSIK. Jan-Olof Lindström

PM Nr 157. ANALYS AV KÖRKORTSPROVETS KURSPLANSSTRUKTUR. Anna Zolland

PM Nr 158. DATORISERINGEN AV TEORIPROVET. En beskrivning av effekter utifrån ett antal statistiska indikatorer, Marie Wiberg

PM Nr 159. HÖGSKOLEPROVET HÖSTEN 1999. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage, Gunilla Ögren, Lena Konradsson

PM Nr 160. DTK-PROVET. Ett andra försök avseende antalet uppgifter och antalet svarsförslag, Gunilla Ögren

PM Nr 161. ATT MÄTA SPRÅKFÖRMÅGA. Rapport från en konferens i Umeå den 10 juni 1999, Kerstin Andersson

2000

PM Nr 162. PLACERING AV UPPGIFTER OCH RÄTT SVARSFÖRSLAG I HÖGSKOLEPROVET. Positionens betydelse för svårighetsgraden, Ewa Andersson (red)

PM Nr 163. EN ÖVERSIKT AV FORSKNINGSRAPPORTER OM HÖGSKOLEPROVET 1969–1999. Stig Eriksson

PM Nr 164. INTERNETBASERADE NATIONELLA PROVBANKER FÖR GYMNASIESKOLAN. Konsekvenser för elever, skola och samhälle, Mona Ladfors, Kristian Ramstedt

PM Nr 165. METODER FÖR KRAVGRÄNSSÄTTNING. En teoretisk granskning samt diskussion av lämplig metod för ett målrelaterat certifieringsprov av typ körkortsprovets teoriprov, Marie Wiberg, Widar Henriksson

PM Nr 166. FÖRARPRÖVNINGENS STRUKTUR OCH RESULTAT. En studie av relationen mellan kunskapsprov och körprov samt utbildningsbakgrundens betydelse, Simon Wolming

2001

PM Nr 167. EN BEDÖMNINGSSPORTS DILEMMA. En studie av bedömningarnas tillförlitlighet och relevans i rytmisk gymnastik, Annika Johansson

PM Nr 168. LÄRARENKÄT OM DE NATIONELLA PROVEN I MATEMATIK. Kurs B, C och D hösten 2000, Maria Ericsson, Björn Sigurdsson

PM Nr 169. HÖGSKOLEPROVETS UTVECKLING UNDER ÅREN 1977–2000. Provets sammansättning och provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage, Gunilla Ögren

PM Nr 170. ÖKAR RELIABILITETEN VID DIFFERENTIELL POÄNGSÄTTNING? En studie av delproven NOG och LÄS i högskoleprovet, Anders Lexelius, Stig Eriksson

PM Nr 171. LÄRARENKÄT OM DE NATIONELLA PROVEN I MATEMATIK. Kurs B, C och D våren 2001, Maria Ericsson, Björn Sigurdsson

2002

PM Nr 172. HÖGSKOLEPROVET VÅREN OCH HÖSTEN 2001. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage, Gunilla Ögren

PM Nr 173. UPPGIFTSBANK FÖR KÖRKORTSPROVETS TEORETISKA PROV. Relationen mellan utformningen, exponeringen och provtypen, Marie Wiberg

PM Nr 174. KÖRKORTSPROVET I ETT NORDISKT PERSPEKTIV. Teoriprovet–nuläge och framtid, Widar Henriksson, Anna Sundström, Marie Wiberg

PM Nr 175. LÄRARENKÄT OM DE NATIONELLA PROVEN I MATEMATIK. Kurs B, C och D hösten 2001, Maria Ericsson, Björn Sigurdsson

PM Nr 176. MatBIT. Matematisk Begreppsbildning och IT, Tomas Bergqvist

PM Nr 177. FORSKARUTBILDNING I BETEENDEVETENSKAPLIGA MÄTNINGAR, Simon Wolming

PM Nr 178. LÄRARENKÄT OM DE NATIONELLA PROVEN I MATEMATIK. Kurs B, C och D våren 2002, Maria Ericsson, Björn Sigurdsson

PM Nr 179. VILKA ÄR DE GODA LÄSARNA? En jämförelse mellan deltagare med alla rätt respektive genomsnittsresultat på högskoleprovets delprov LÄS, Birgitta Wallin, Stig Eriksson

2003

PM Nr 180. HÖGSKOLEPROVET VÅREN OCH HÖSTEN 2002. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage, Gunilla Ögren

PM Nr 181. EN JÄMFÖRELSE MELLAN DE GAMLA OCH DE NYA GYMNASIEBETYGEN, Christina Stage

PM Nr 182. ENSKILD PRÖVNING OCH KOMPLETTERING AV GYMNASIEBETYG, Kent Löfgren

PM Nr 183. DEN SVENSKA FÖRARPRÖVNINGEN. Sambandet mellan kunskapsprovet och körprovet, provens struktur samt körkortsutbildningens betydelse, Anna Sundström

PM Nr 184. VAN-PROVET. Ett utvecklingsarbete av ett verbalt logiskt analytiskt prov, Gunilla Ögren, Anders Lexelius

PM Nr 185. NORMERING, EKVIVALERING ELLER KALIBRERING AV DELAR AV HÖGSKOLEPROVET, Christina Stage

PM Nr 186. LÄRARENKÄT OM DE NATIONELLA PROVEN I MATEMATIK. Kurs B, C och D hösten 2002, Maria Ericsson, Björn Sigurdsson

PM Nr 187. NATIONELL PROVBANK I BIOLOGI. Bakgrund, nuläge, visioner, Gunnel Grelsson

PM Nr 188. MODELLER FÖR JUSTERING AV UTPRÖVNINGSDATA FÖR DELPROVEN ORD OCH NOG. Anders Lexelius, Christina Jonsson

PM Nr 189. LÄRARENKÄT OM DE NATIONELLA PROVEN I MATEMATIK. Kurs B, C och D våren 2003, Maria Ericsson, Björn Sigurdsson

2004

PM Nr 190. ÖVNINGSKÖRNING PRIVAT OCH PÅ TRAFIKSKOLA. En enkätstudie om körkortsutbildningens betydelse för provresultatet, Anna Sundström

PM Nr 191. JÄMFÖRELSER MELLAN STUDERANDE I OLIKA ANTAGNINGSGRUPPER SOM HAR REGISTRERATS PÅ SOCIONOMPROGRAMMET, Kent Löfgren, Birgitta Törnkvist

PM Nr 192. GRUPPSKILLNADER I RESULTAT PÅ HÖGSKOLEPROVET, Christina Stage

PM Nr 193. HÖGSKOLEPROVET VÅREN OCH HÖSTEN 2003. Provdeltagargruppens sammansättning och resultat, Christina Stage, Gunilla Ögren

PM Nr 194. EN FORSKARUTBILDNINGSBAROMETER FÖR UMEÅ UNIVERSITET. Ett underlag för att utveckla fakultetsövergripande instrument för mätning av doktoranders och forskarhandledares syn på forskarutbildningen, Ewa Andersson

PM Mr 195. BEDÖMARRELIABILITET. Med fokus på aspektbedömningen i det nationella B-kursprovet i matematik våren 2002, Jesper Boesen

PM Nr 196. INTRÄDESPROVSPROJEKTET. Delprov 1: Teknik i användning, Widar Henriksson, Per-Erik Lyrén, Gunnar Wästle

PM Nr 197. GRUNDUTBILDNING I BETEENDEVETENSKAPLIGA MÄTNINGAR. Några reflektioner angående C-kursen, ht 2003, Simon Wolming

PM Nr 198. JÄMFÖRELSER MELLAN STUDERANDE I OLIKA ANTAGNINGSGRUPPER SOM HAR REGISTRERATS PÅ EKONOMPROGRAM. Kent Löfgren, Birgitta Törnkvist