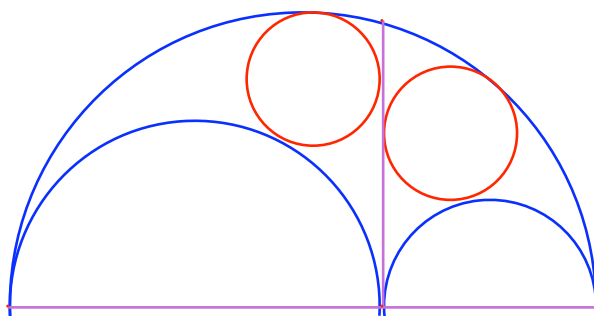


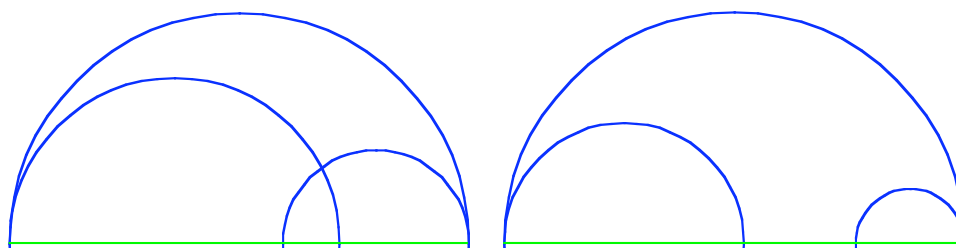
Tvillingcirklar

Christer Bergsten
Linköpings universitet

En konfiguration av cirklar som fascinerat genom tiderna är den s.k. skomakarkniven, eller *arbelos*. I denna tidskrift har den tidigare tagits upp av Bengt Ulin (2005) och Karen Sofie Ronaess (2007), där bl.a. de *arkimediska tvillingcirklarna* diskuterats. Figuren nedan visar skomakarkniven med dessa två mindre cirklar som är kongruenta oberoende av den relativa storleken mellan de två inre tangerande halvcirklarna..



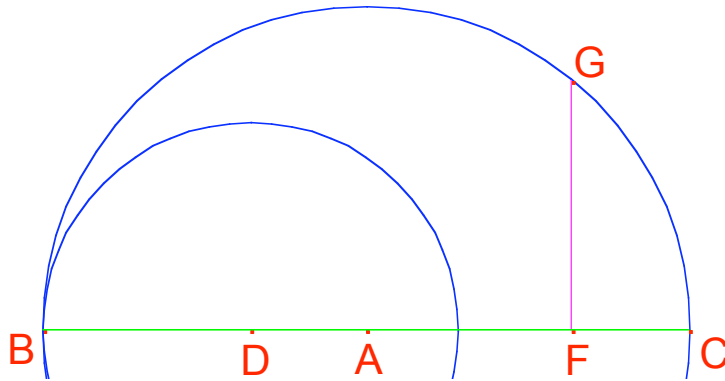
I denna artikel betraktas skomakarkniven då dess två mindre halvcirklar inte tangerar varandra, dvs. skär varandra eller saknar gemensamma punkter. Denna figur kallar jag en *öppen arbelos* (se Figur 1). Den gemensamma tangenten ersätts då med de inre halvcirklarnas potenslinje. Jag kommer i det följande att visa att en motsvarighet till de tvillingcirklar som Arkimedes introducerade då förblir tvillingcirklar, dvs. är kongruenta. Jag kommer att utgå från en geometrisk konstruktion med vilken man kan konstruera dessa cirklar och ta fram formler för dessa cirklars diameter och medelpunkter. Avslutningsvis pekar jag på ytterligare en intressant cirkel som tangerar tvillingcirklarna. Endast grundläggande klassisk geometri kommer att användas. För att förenkla notationen kommer en cirkel med medelpunkt i A och med B som en punkt på cirkelns periferi att betecknas C_{AB} .



Figur 1. Två fall av en *öppen arbelos*.

1. Ett konstruktionsproblem

I Figur 2 är cirkeln C_{AB} given med diametern BC. Cirkeln C_{DB} har sin medelpunkt D på BC. Normalen genom en punkt F på BC skär C_{AB} i G. Uppgiften är att konstruera en cirkel som tangerar C_{AB} , C_{DB} och sträckan FG (på dess vänstra sida; FG kan även skära cirkeln C_{DB}).



Figur 2. Att konstruera en cirkel som tangerar cirkeln C_{AB} , cirkeln C_{DB} och sträckan FG.

Konstruktion 1

Utgå från Figur 2. Dra sträckan BG som skär C_{DB} i H. Dra normalen från H till FG som skär FG i J. Bestäm mittpunkten K på sträckan HJ. Rita cirkeln C_{HK} . Förläng sträckan DH tills den skär cirkeln C_{HK} i L. Medelpunkten M i den sökta cirkeln fås nu som skärningen mellan cirkeln C_{DL} och normalen till BC genom K. Sträckan DM skär C_{DB} i N. Cirkeln C_{MN} är den sökta cirkeln.

Bevis för konstruktion 1

Cirkeln C_{MN} har konstruerats så att den tangerar normalen FG och cirkeln C_{DB} . För att visa att den även tangerar cirkeln C_{AB} inför jag följande längdbeteckningar: $BC = 1$, $BE = r$ och $BF = a$. Konstruktionen är inte beroende av relationen mellan r och a . För beviset hänvisas till Figur 3.

Då vinklarna BHE och BGC båda är räta (periferivinklar i halvcirklar) är HE och GC parallella och flera likformiga trianglar kan lätt identifieras. Man får då direkt att

$$FG = \sqrt{a(1-a)} \text{ och att } \frac{BH'}{BF} = \frac{BH}{BG} = \frac{HE}{GC} = \frac{BE}{BC}, \text{ som då ger } BH' = ar \text{ och därmed}$$

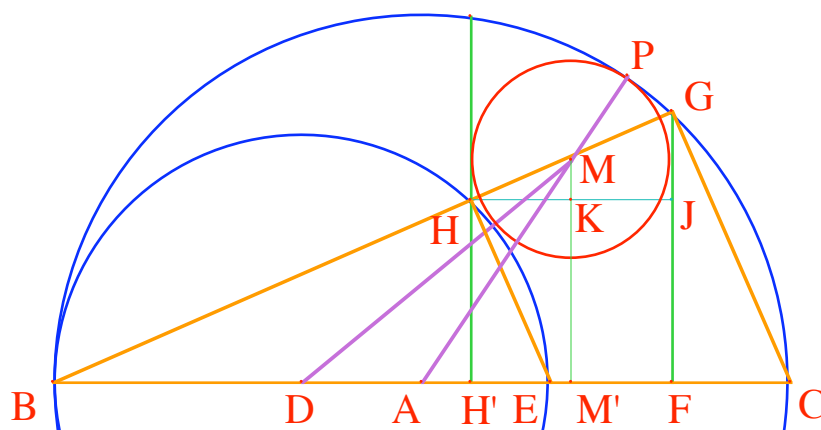
$HK = \frac{1}{2}(a - ar)$. Av detta fås $BM' = a - \frac{1}{2}(a - ar) = \frac{1}{2}(a + ar)$. Av Pythagoras sats följer sedan att

$$MM'^2 = DM'^2 - DM'^2 = \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2}(a - ar)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(a + ar) - \frac{r}{2}\right)^2 = ar(1 - a).$$

Cirkeln C_{MN} tangerar nu cirkeln C_{AB} om $AM = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(a - ar)$. Detta följer direkt av

Pythagoras sats eftersom

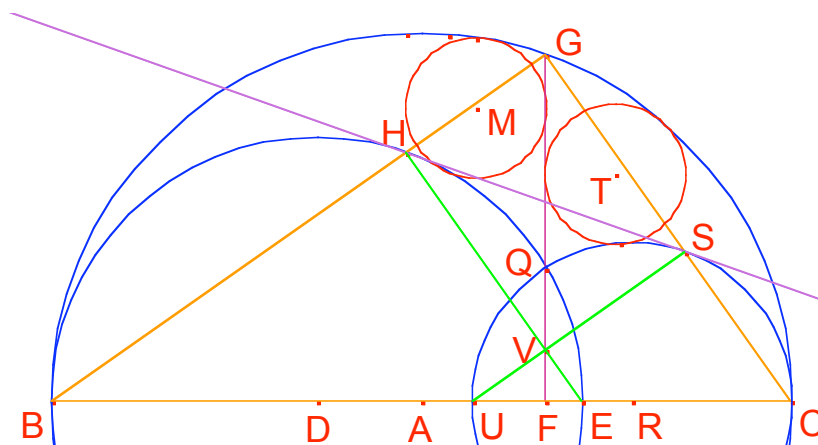
$$AM^2 = AM'^2 + MM'^2 = \left(\frac{1}{2}(a + ar) - \frac{1}{2}\right)^2 + ar(1 - a) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(a - ar)\right)^2. \text{ VSB}$$



Figur 3. Likformiga trianglar för bevis av konstruktionen.

2. Tvillingcirkarna

Den första generaliseringen av skomakarkniven är fallet när de två mindre halvcirkelarna C_{DB} och C_{RC} i Figur 4 skär varandra i en punkt Q (i det klassiska fallet hos Arkimedes är Q tangeringspunkt på BC mellan halvcirkelarna). Genom punkten Q dras nu normalen FG mellan BC och den stora halvcirkeln. Såväl till vänster som till höger om FG kan en tangerande cirkel inskrivas med den metod som beskrivits i Konstruktion 1. M och T är medelpunkt i respektive cirkel.



Figur 4. Tvillingcirkelar och tangenten HS.

Lemma 1

De två inskrivna cirkelarna i Figur 4 är tvillingcirkelar, dvs. har samma diameter.

Bevis

Dra sträckorna HE och SU, där U är skärningen mellan cirkeln C_{RC} och BC (se Figur 4).

Dessa sträckor skär varandra i V. Fyrhörningen GHVS är en rektangel eftersom vinklarna BGC, BHE och USC är räta. Dra linjen genom H och S. Triangeln GHS är då likformig med

triangeln GCB. Om Q' är den andra skärningspunkten mellan FG och cirkeln C_{DB} (och med C_{RC}) är nämligen enligt kordasatsen $GS \cdot GC = GQ \cdot GQ' = GH \cdot GB$ (1), som medför att $\frac{GS}{GH} = \frac{GB}{GC}$. Eftersom det finns en gemensam vinkel vid G följer likformigheten. Punkten V måste då ligga på FG då även trianglarna SVG och FCG är likformiga med GCB. Diagonalen HS till rektangeln GHVS delas då av FG på mitten, vilket innebär att punkterna H och S har samma vinkelräta avstånd till FG. Enligt ovan innebär detta att cirklarna med medelpunkter i M respektive T har samma diametrar, dvs. är tvillingcirklar. *VS*

Då punkterna E och U sammanfaller fås som ett specialfall de klassiska Arkimedes tvillingcirklar.

Lemma 2

Linjen genom H och S är gemensam tangent till de båda cirklarna C_{BD} och C_{RC} .

Bevis

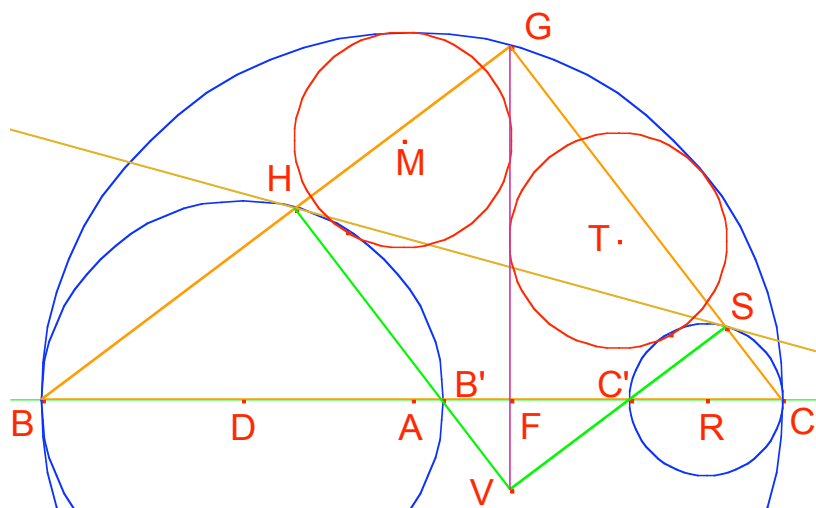
Vinkeln DHS är summan av vinklarna DHE och EHS. Men vinklarna DHE och DEH är lika och då enligt ovan lika med vinkeln BCG. Eftersom också vinklarna EHS och GBC är lika, så är vinkeln DHS lika stor som summan av vinklarna BCG och GBC, dvs. rät. Analogt ses att vinkeln RSH är rät. *VS*

Kordasatsen medför också utifrån (1) ovan att från punkten G (och från vilken annan punkt som helst på linjen genom F och G) är det lika långa tangenter till båda cirklarna C_{DB} och C_{RC} . Linjen genom skärningspunkterna Q och Q' är *potenslinjen* till C_{DB} och C_{RC} . Potenslinjen kan också enkelt konstrueras då cirklarna inte överlappar, vilket utgör det andra fallet av den generaliserade arbelosfigur jag kallar en *öppen arbelos*. Samma resultat för tvillingcirklarna gäller även i detta fall, om FG är på denna potenslinje som i Figur 5. Detta följer också med samma argument där mellanledet i (1) då ersätts med de gemensamma längderna av tangenterna. Eftersom diagonalen HS i rektangeln GHVS delas på mitten av FG kan potenslinjens läge direkt konstrueras med hjälp av mittpunkten på HS (se fotnot 2 nedan).

Resultaten ovan kan sammanfattas i följande sats:

Sats 1

I en *öppen arbelos*, dvs. den generaliserade arbelosfigur som fås då de mindre halvcirklarna inte tangerar varandra och deras gemensamma tangent ersätts av deras potenslinje, är de inskrivna cirklarna tvillingcirklar (dvs. cirklarna med medelpunkter M respektive T i Figur 4 respektive 5).



Figur 5. Tvillingcirklar vid potenslinjen.

För att bestämma potenslinjens läge BF och tvillingcirkelns diameter använder jag följande beteckningar: $BC = 1$, $BB' = r_1$, $BF = a$, $BC' = r_2$, och tvillingcirkelns respektive radie r_M och r_T . Här är r_1 och r_2 båda mellan 0 och 1 och oberoende av varandra (dvs. även fallet med de mindre cirkelarna enligt Figur 4 är möjligt).

Sats 2

Tvillingcirkelns diameter är halva harmoniska medelvärdet av $1 - r_1$ och r_2 (dvs. sträckorna $B'C$ och BC' i Figur 5), vilket kan uttryckas genom formeln $r_M = r_T = \frac{r_2(1-r_1)}{2(r_2+1-r_1)}$.

Bevis

Med egenskapen att tangenten från G till respektive cirkel C_{DB} och C_{RC} är lika ger

Pythagoras sats, efter förenklingar¹, att $a = \frac{r_2}{r_2+1-r_1}$, $r_M = \frac{a(1-r_1)}{2}$ och $r_T = \frac{r_2(1-a)}{2}$.

Tillsammans ger detta även att $r_M = r_T = \frac{r_2(1-r_1)}{2(r_2+1-r_1)}$. Tvillingcirkelns diameter är alltså

halva harmoniska medelvärdet av $1 - r_1$ och r_2 (dvs. sträckorna $B'C$ och BC' i Figur 5).

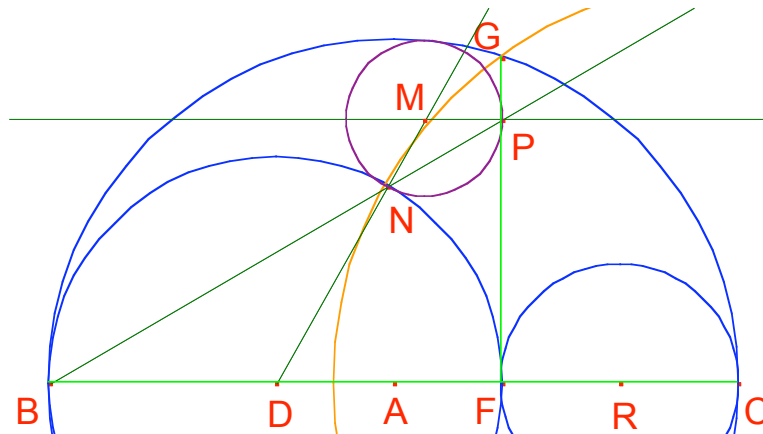
Med $r_1 = r_2 = r$ fås fallet med *arbelos* (dvs. B' och C' sammanfaller med F i Figur 5) och formeln ovan visar att tvillingcirkelns diameter då är halva harmoniska medelvärdet av de givna inre cirkelns diametrar. *VSB*

Konstruktionen ovan av tvillingcirkelarna kan alltså genomföras även i *arbelos*. Jag visar emellertid i Figur 6 en enklare konstruktion av dessa.

¹ Se Appendix för detaljerna.

Konstruktion 2

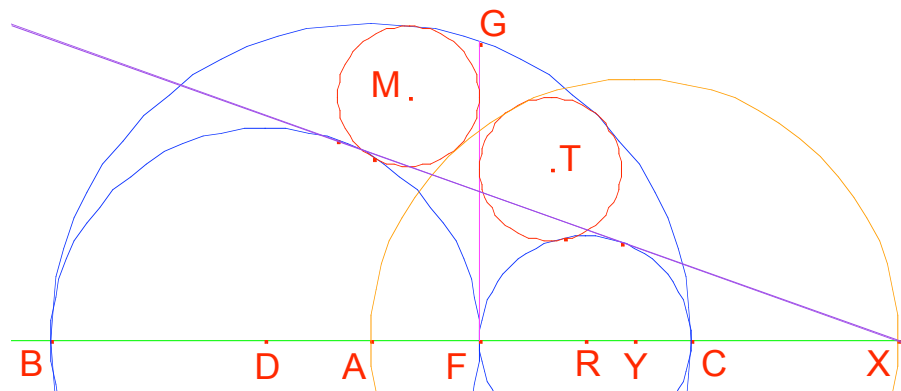
Genom att rita vad jag i Bergsten (2006b) kallade den *magiska cirkeln* C_{CG} får man direkt tangeringspunkten N som skärningen mellan C_{CG} och C_{DB} . Förlängningen av BN skär FG i P och förlängningen av DN skär normalen till FG genom P i M, tvillingcirkelns medelpunkt. Tvillingcirkeln kan ritas. Konstruktionen av den andra tvillingcirkeln genomförs analogt med hjälp av den *magiska cirkeln* C_{BG} . För ett bevis av konstruktionens giltighet hänvisas till Bergsten (2006b).



Figur 6. Konstruktion av en tvillingcirkel i *arbelos*.

3. Ett tangeringsproblem

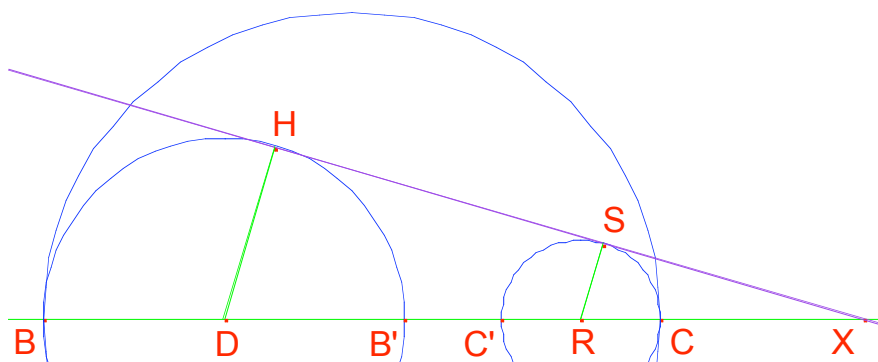
Konstruktioner och observationer som de som presenteras i denna artikel kan med fördel göras med hjälp av s.k. dynamiska geometriprogram som funnits på marknaden sedan 1980-talet, dvs. dataprogram där man kan rita och ”dra” i geometriska figurer för att undersöka deras egenskaper (se t.ex. Bergsten, 2006a). En sådan observation är att om den gemensamma tangenten till cirkelarna C_{DB} och C_{RC} i *arbelos* skär BC:s förlängning i punkten X, så tangerar cirkeln med diameter AX de båda tvillingcirkelarna (se Figur 7).



Figur 7. Cirkeln med diameter AX tangerar tvillingcirkelarna i *arbelos*.

Vid en undersökning med ett dynamiskt geometriprogram upptäcker man att denna tangeringsegenskap även gäller i en *öppen arbelos*. Jag formulerar detta som Sats 3.

Punkten X är den s.k. *likställighetspunkten* till cirklarna C_{DB} och C_{RC} . Figur 8 illustrerar denna punkt i en *öppen arbelos*. För att bestämma likställighetspunktens läge i detta fall är här r_1 och r_2 båda mellan 0 och 1 med $r_1 + r_2 > 1$ men i övrigt oberoende av varandra. Detta innebär att båda fallen med de mindre cirklarna enligt Figur 1 är möjliga och att punkten X ligger till höger om cirklarna.



Figur 8. Likställighetspunkten X till cirklarna i en *öppen arbelos*.

Lemma 3

För likställighetspunkten X i Figur 8 är $BX = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 - 1}$, där r_1 och r_2 båda är mellan 0 och 1 och $r_1 + r_2 > 1$.

Bevis

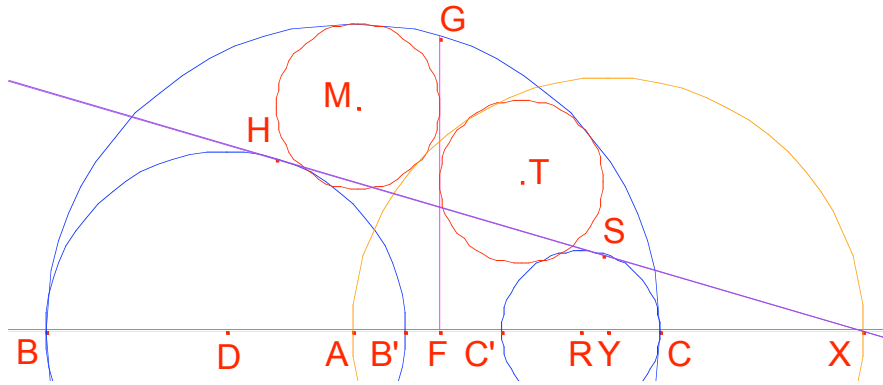
Låt $CX = x$. Likformigheten av trianglarna RXS och DXH ger att $\frac{(1-r_2)/2}{r_1/2} = \frac{x+(1-r_2)/2}{x+1-r_1/2}$, som direkt ger resultatet då $BX = 1 + x$. *VSB*

Då likställighetspunkten lätt kan konstrueras² kan den användas för att dra den gemensamma tangenten till cirklarna C_{DB} och C_{RC} . Med hjälp av dessa tangeringspunkter kan potenslinjen konstrueras då den måste passera mittpunkten mellan dessa tangeringspunkter (se Figur 5).

Sats 3

Den gemensamma tangenten till cirklarna C_{DB} och C_{RC} i en *öppen arbelos* skär BC:s förlängning i punkten X. Cirkeln med diameter AX tangerar då båda tvillingcirklarna (se Figur 9, där FG ligger på potenslinjen till C_{DB} och C_{RC}).

² Normalerna till BC genom D respektive R skär C_{DB} i P_1 och C_{RC} i P_2 (dvs. på övre halvcirklarna). Linjen genom P_1 och P_2 skär då BC:s förlängning i X. Det finns också andra enkla konstruktioner av potenslinjen.



Figur 9. Cirkeln C_{YX} tangerar tvillingcirkelarna vid potencinjen i en *öppen arbelos*.

Bevis

I Appendix visas att följande formler ger tvillingcirkelarnas medelpunkter (x_M, y_M) och (x_T, y_T) :

$$(x_M, y_M) = \left(\frac{r_2(1+r_1)}{2(r_2+1-r_1)}, \frac{\sqrt{r_1 r_2(1-r_1)}}{r_2+1-r_1} \right)$$

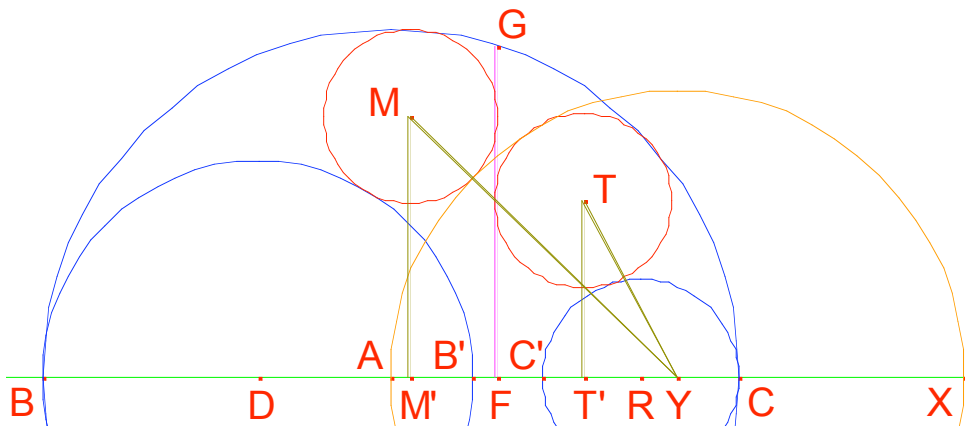
$$(x_T, y_T) = \left(\frac{r_2(3-r_1)}{2(r_2+1-r_1)}, \frac{\sqrt{r_2(1-r_2)(1-r_1)}}{r_2+1-r_1} \right)$$

För tvillingcirkelarnas radie visas även där att $r_M = r_T = \frac{r_2(1-r_1)}{2(r_2+1-r_1)}$.

Av Lemma 3 följer att cirkeln C_{YX} har radien $r_Y = \frac{r_1 r_2}{2(r_1+r_2-1)} - \frac{1}{4}$ och att punkten Y därmed

har x-koordinaten $x_Y = \frac{1}{4} + \frac{r_1 r_2}{2(r_1+r_2-1)}$. Med hjälp av Pythagoras sats på trianglarna $MM'Y$

och $TT'Y$ (se Figur 10) följer nu Sats 3 om likheterna $y_M^2 + (x_Y - x_M)^2 = (r_Y + r_M)^2$ och $y_T^2 + (x_Y - x_T)^2 = (r_Y - r_T)^2$ är uppfyllda, vilket enkelt verifieras genom en direkt algebraisk kalkyl. *VSB*



Figur 10. Rätvinkliga trianglar $MM'Y$ och $TT'Y$ för beviset av Sats 3.

Denna algebraiska kalkyl garanterar alltså resultatet att cirkeln C_{YX} tangerar båda tvillingcirkelarna men ger inte, som Descartes kanske skulle ha uttryckt det, någon *insikt* i varför det förhåller sig så. Kanske kan någon läsare hitta en rent geometrisk förklaring till detta resultat, dvs. ett argument som inte bygger på algebraisk kalkyl.

Att tangeringsegenskapen i Sats 3 även gäller i en *arbelos* följer direkt genom att välja $r_1 = r_2 = r$ med $0 < r < 1$. Att bevisa denna egenskap direkt i detta enklare fall med en *arbelos* kan vara en lämplig utmaning i en gymnasieklass.

Referenser

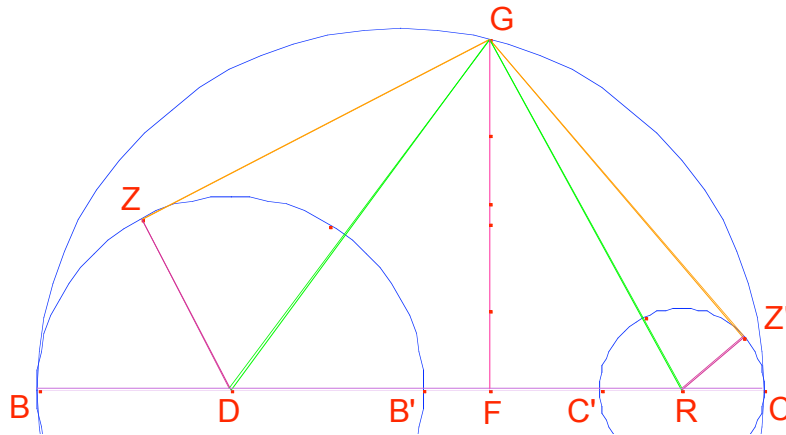
- Bergsten, C. (2006a). Euklides i nya kläder – om dynamiska geometriprogram. Medlemsutskicket, maj 2006, Svenska matematikersamfundet.
- Bergsten, C. (2006b). Magic circles in the arbelos. *LiTH-MAT-R-2006-12*, Department of Mathematics, Linköpings universitet.
- Ronaess, K. S. (2007). Arkimedes' arbelos. *Normat*, 55, 181-185.
- Ulin, B. (2005). Pappus – en proportionernas jonglör. *Normat*, 53, 13-20.

Appendix

För att bestämma potenslinjens läge i den generaliserade arbelosfiguren används Pythagoras sats på de rätvinkliga trianglarna i Figur 11, där $GZ = GZ' = d$ är lika långa tangenter från G till respektive cirkel. Då GD respektive GR är hypotenusor i två olika trianglar fås ekvationssystemet nedan med $BC = 1$, $BB' = r_1$, $BF = a$, $BC' = r_2$, och att $FG = a(1 - a)$.

Potenslinjens läge a kan där enkelt lösas ut till $a = \frac{r_2}{r_2 + 1 - r_1}$.

$$\begin{cases} \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 + d^2 = \left(a - \frac{r_1}{2}\right)^2 + a(1 - a) \\ \left(\frac{1 - r_2}{2}\right)^2 + d^2 = \left(\frac{1 + r_2}{2} - a\right)^2 + a(1 - a) \end{cases}$$



Figur 11. Potenslinjens läge.

För att bestämma tvillingcirkelns diameter använder jag Pythagoras sats på de rätvinkliga trianglarna $MM'D$ och $MM'A$ respektive $TT'R$ och $TT'A$ i Figur 12. Detta ger direkt följande två ekvationssystem (det vänstra för den vänstra tvillingcirkeln, det högra för den högra). Här är $y_M = MM'$ och $y_T = TT'$. Observera att samma ekvationssystem fås även då de mindre halvcirkelarna i den generaliserade arbelosfiguren skär varandra (som i Figur 4).

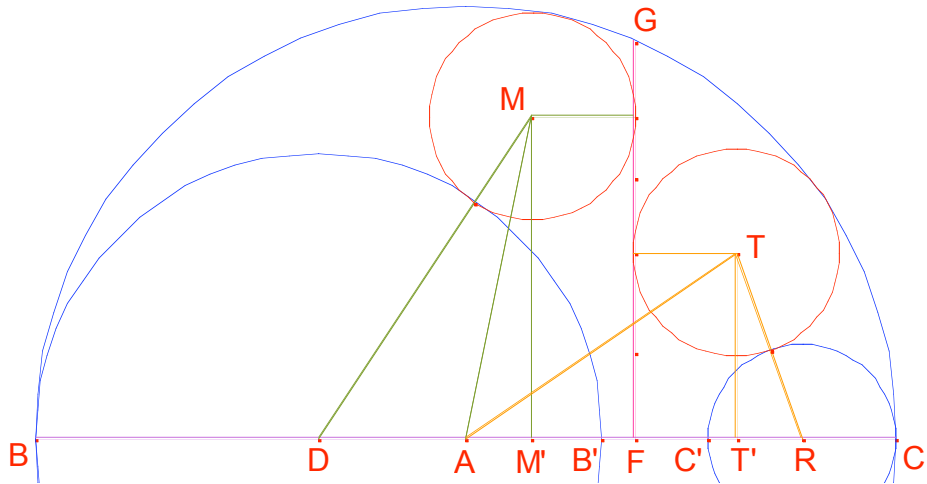
$$\begin{cases} \left(\frac{r_1}{2} + r_M\right)^2 = \left(a - r_M - \frac{r_1}{2}\right)^2 + y_M^2 \\ \left(\frac{1}{2} - r_M\right)^2 = \left(a - r_M - \frac{1}{2}\right)^2 + y_M^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{1 - r_2}{2} + r_T\right)^2 = \left(\frac{1 + r_2}{2} - (a + r_T)\right)^2 + y_T^2 \\ \left(\frac{1}{2} - r_T\right)^2 = \left(a + r_T - \frac{1}{2}\right)^2 + y_T^2 \end{cases}$$

Det vänstra ekvationssystemet ger att $r_M = \frac{a(1 - r_1)}{2}$ och det högra att $r_T = \frac{r_2(1 - a)}{2}$. En

insättning här av uttrycket för a ovan bekräftar att $r_M = r_T = \frac{r_2(1 - r_1)}{2(r_2 + 1 - r_1)}$. Enligt ovan är

$MM' = r_1 a(1 - a)$, vilket av symmetriskäl ger $TT' = a(1 - a)(1 - r_2)$. Medelpunkten M för den

vänstra tvillingcirkeln får därför koordinaterna $\left(\frac{r_2(1+r_1)}{2(r_2+1-r_1)}, \frac{\sqrt{r_1r_2(1-r_1)}}{r_2+1-r_1} \right)$ och T i den högra

$$\left(\frac{r_2(3-r_1)}{2(r_2+1-r_1)}, \frac{\sqrt{r_2(1-r_2)(1-r_1)}}{r_2+1-r_1} \right).$$


Figur 12. Rätvinkliga trianglar för bestämning av tvillingcirkelnas radie.