SMDF

Svensk Förening för **M**atematik**D**idaktisk **F**orskning

MEDLEMSBLAD

Nr 12

Juni 2006

INNEHÅLL

Medlemsblad nr 12

Under rubriken *Några rader från...* berättar inledningsvis föreningens ordförande om vad som är på gång i SMDF och svensk matematikdidaktik i övrigt.

Detta nummer har tyvärr blivit försenat på grund av redaktörens arbetsbörda, det var planerat för december 2005, men vi räknar med ett större nummer under hösten 2006 istället. Medlemmarna i SMDF inbjuds att till medlemsbladet skicka in kortare artiklar, projektbeskrivningar, debattinlägg, reseberättelser, bokrecensioner, eller annat som kan vara av intresse för föreningens medlemmar att ta del av.

Vi fick ett sorgebesked nu i april då vår käre vän och kollega Rolf Hedrén gick bort. En minnesruna återfinns i detta nummer av medlemsbladet, skriven av Eva Taflin och Kerstin Hagland, samt en text från Rolf som han i december 2005 skickade in för medlemsbladet, där han på sitt mycket personliga sätt berättar om sina intryck från konferensen Norma05 i Trondheim i september 2005.

En nationell forskarskola i matematik med ämnesdidaktisk inriktning, finansierad av Riksbankens Jubileumsfond, startade som bekant under 2001. De första disputationerna har nu ägt rum då Kristina Juter, Monica Johansson, Örjan Hansson och Andreas Ryve har försvarat sina avhandlingar. Gerd Brandell ger i detta nummer en tydlig översikt av forskarskolans verksamhet.

Problemlösning är enligt många själva kärnan i matematisk verksamhet. Men vilken roll spelar egentligen problem i matematiken? Denna fråga diskuterar Barbro Grevholm med stor känslighet i sin artikel med titeln just *Problemens roll i matematiken*.

/ Christer Bergsten

Några rader från ...

År 2005 var ett händelserikt år för svensk matematikdidaktik och SMDF. Den 18 mars genomfördes vid KTH i Stockholm en workshop om matematik och språk i samarbete mellan SMDF, Svenska Matematikersamfundet och Sveriges Matematiklärarförening. Ordförande och vice ordförande har under året färdigställt dokumentationen från den nordiska konferensen Norma01 och boken har under hösten skickats ut till medlemmarna som årsbok och till deltagarna i konferensen. Både ordförande och vice ordförande medverkade i programkommittén för Norma05 som ägde rum den 2-6 september i Norge i Trondheim.

Föreningen har även presenterats vid andra konferenser, till exempel CERME4 i Spanien i februari och ICMI Study 15 i Brasilien i maj, och seminarier av styrelsemedlemmarna. Till ICME10 år 2004 utgavs SMDF:s medlemsblad på engelska och fick ett innehåll som kunde intressera internationella läsare. Ett stort antal trycktes upp och kunde delas ut vid SMDFs utställning. För 2005 genomfördes en liknande internationell satsning i samband med den fjärde nordiska forskningskonferensen i matematikdidaktik Norma05, den 2-6 september i Trondheim. De medlemsblad som delades ut och böcker i skrift-serien som visades väckte stort intresse. Även vid matematikbiennalen i Malmö i januari 2006 medverkade SMDF med en informationsutställning.

Ordföranden och vice ordföranden deltog i ett seminarium i april 2005 för handledare i den nordiska forskarskolan NoGSME i Korsør, i ett seminarium om handledning av doktorander i Trondheim den 1 september, i ett seminarium om granskning av vetenskapliga artiklar den 14-15 november i Lund, samt i ett seminarium i Vasa i början av maj 2006 om forskarutbildningsprogram i matematikdidaktik. NoGSME genomförde också en uppskattad sommarskola i närheten av Kristiansand i Norge den 12-17 juni.

SMDFs svar på remissen om Matematikdelegationens förslag har varit infört i Medlemsblad nr 11 i juni 2005. SMDF kommer under 2006 att medverka i en grupp som initierats av NCM för att följa utvecklingen av nya kursplaner i matematik.

Samarbetet med NCM ska fördjupas på olika sätt och kontakterna med övriga organisationer av intresse för SMDF utvecklas och förstärkas. Det gäller till exempel FMD, *Forum för matematikens didaktik,* i Danmark och *Sveriges Matematiklärarförening,* SMaL och *Svenska matematikersamfundet*, SMS. Med Forum önskas fortsatt utbyte av program, idéer och konkret samverkan bland annat i form av utbyte av ömsesidiga inbjudningar till arrangemang. Samarbetet som genomfördes inför och under ICME10 i form av en gemensam föreläsning och utställning om de båda organisationerna, ska följas upp i form av försök att finna mera långtgående samarbetsformer. Den gemensamma föreläsningen finns nu utgiven i en rapport från den Nordiska presentationen vid ICME10. Rapporten har redigerats av professor Erkki Pehkonen och kan beställas från universitetet i Helsingfors. Barbro Grevholm har väckt en diskussion om en paraplyorganisation för SMDF, Forum, den finska föreningen och eventuellt tillkommande andra nationella föreningar för forskning i matematikdidaktik i syfte att bättre utnyttja de program och möjligheter som erbjuds i respektive förening samt att eventuellt kunna få nordiskt stöd ekonomiskt för viss verksamhet. Denna diskussion har fortsatt och ett möte hölls, som redan nämnts, i Trondheim den 5 september 2005, där en arbetsgrupp utsågs för att arbeta vidare med frågan om en nordisk paraplyorganisation som även inkluderar Nomad. SMDF kommer under 2006 att medverka i den arbetsgruppen.

I januari 2006 genomförde SMDF den femte matematikdidaktiska konferensen MADIF5 i Malmö just före matematikbiennalen, som alltid mycket uppskattat av deltagarna. Werner Blum och Barbro Grevholm höll plenarföreläsningar, elva forskningsrapporter (papers) presenterades och kommenterades av särskilt inbjudna diskutanter, och två korta presentationer kompletterade programmet som avslutades med en paneldebatt. Arbetet med att dokumentera seminariet i en konferensbok pågår och den kommer att tryckas och ingå i SMDF:s skriftserie som nr 5 och som årsbok för 2006. Våra böcker väcker stort intresse både nationellt och internationellt. Det finns ett behov av att marknadsföra skriftseriens böcker internationellt och utarbeta en plan för försäljning av böckerna. Boken från MADIF2 efterfrågas fortfarande och ett nytryck planeras då den nu är slut i lager. Styrelsen kommer att föra det arbetet vidare under 2006, bland annat genom att sända böckerna till lämpliga tidskrifter för granskning.

En nationell forskarskola i matematik med ämnesdidaktisk inriktning, finansierad av Riksbankens Jubileumsfond, startade 2001, och den första disputationen ägde rum i april då Kristina Juter försvarade sin avhandling. SMDF fortsätter att aktivt medverka med olika insatser i anslutning till forskarskolan. Doktoranderna i forskarskolan inbjuds att skriva om sina forskningsprojekt i medlemsbladet. Vi kommer att fortsätta att rekrytera nya medlemmar bland doktoranderna och att erbjuda speciella program för dem såsom det Forum som anordnades vid Madif3 i Norrköping. Vid Madif4 var ett flertal doktorander aktiva och medverkade med egna presentationer. Inför Madif5 ingick en av doktoranderna, Kristina Juter, som medlem i programkommittén där.

SMDF har fått en inbjudan från NoGSME att tillsammans arrangera en workshop som följer upp den tidigare om matematik och språk. Vi återkommer senare med tidpunkt för denna workshop. Det blir troligen under våren 2007.

Vid årsmötet i Malmö i januari 2006 avgick doktoranden Jesper Boesen ur styrelsen och som ny medlem invaldes doktoranden Monica Johansson, som sedan dess hunnit bli fil dr i matematikdidaktik. Vi påminner om att protokoll från årsmöte samt verksamhetsberättelse och verksamhetsplan som behandlas vid årsmötet finns tillgängliga för medlemmarna på SMDFs hemsida.

… Barbro Grevholm, ordförande i SMDF

In Memoriam – *Rolf Hedrén*

Rolf Hedrén har avlidit i en ålder av 72 år. Han hade sedan flera år tillbaka en längtan efter att få tillbringa en vårmånad i Tyskland. Trots att han under vintern haft hjärtproblem beslöt han sig för att resa. Han insomnade lugnt på sin semesterort.

I höstas firade han sin 50-årsdag som aktiv matematiklärare och bjöd då oss kolleger inom lärarutbildningen på Högskolan Dalarna på jubileumstårta. Ett svårslaget rekord! Under de senaste åren har Rolf annars varit mest aktiv med forskning och handledning, särskilt har han då intresserat sig för hur elever tänker när de löser rika matematiska problem. Resultat av dessa studier har han presenterat vid ett flertal konferenser och i forskningsartiklar samt i en inspirationsbok för lärare.

Rolf var född och uppvuxen i Norrköping men fick sin grundutbildning i Uppsala där han studerade matematik, fysik, teoretisk fysik och statistik och avlade en filosofie licentiatexamen i matematik. 1990 doktorerade Rolf vid Linköpings universitet i pedagogik (med inriktning mot matematikdidaktik). Han tjänstgjorde som lärare inom realskolan och på gymnasiet och under två år undervisade han vid en secondary school i Tanzania. Sedan 1972 var han fast anställd vid Högskolan Dalarna i Falun och under många år ämnesansvarig i matematikdidaktik. Han kom under denna tid även att bli delförfattare till flera olika matematikdidaktiska böcker, t.ex. *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv*. Han var under åren 2001-2002 en av Skolverkets inspektörer då matematikämnet kvalitetsgranskades i landets kommuner.

Rolfs doktorsavhandling handlade om användning av datorer i matematikundervisningen i skolår 5 och 6. Han har även forskat om användning av miniräknare i grundskolans matematikundervisning. Tidigt intresserade han sig för betydelsen av elevers egna räknemetoder. Han ville veta om det traditionella utlärandet av uppställningar (algoritmer) i grundskolan kunde ersättas av en verksamhet, där eleverna får använda sina egna metoder för att göra uträkningar i de fyra räknesätten. Hans sista inlägg i denna fråga hann publiceras i det senaste numret av tidskriften Nämnaren.

Rolf var en mycket hängiven forskare och brann för att elevers egna tankar skulle tas på allvar och för att elever skulle få erfara det lustfyllda och positiva i matematikundervisningen.

Med Rolf Hedréns bortgång har en innehållsrik och arbetsfylld levnad ändats.
Vi saknar honom innerligt.

Kollegorna genom

Eva Taflin och ***Kerstin Hagland***

Några intryck från *Norma 05*

Allmänna intryck

Jag har blivit ombedd att ge några personliga intryck från den fjärde nordiska konferensen i matematikdidaktik, med deltagare även från de baltiska staterna, som ägde rum i Trondheim den 2–6 september 2005. Jag inleder med några tankar kring konferensen i allmänhet för att därefter ta upp några sessioner som gjorde särskilt intryck på mig.

Det är ju alltid roligt och inspirerande att åka på en nordisk konferens med internationella inslag, att träffa gamla vänner och även göra nya bekantskaper. Det sägs ju att det bästa med konferenser är pauserna, då man har tillfälle till mer informella samtal med övriga deltagare. Visst ligger det en hel del i detta, men samtidigt anser jag att organisatörerna verkligen gjort sitt bästa för att få ihop ett omväxlande och intressant program kring det övergripande temat (fritt översatt) *Att koppla samman praktik och forskning inom matematikdidaktik*. Något som jag också uppskattade var att träffa de många unga entusiastiska doktoranderna i matematikdidaktik. Att ämnesområdet för närvarande tycks väcka ett så stort intresse inom de nordiska länderna bådar gott för framtiden. Jag hoppas verkligen att de som bestämmer över våra länders skolväsenden tar intryck av detta.

En konferens måste ju också förläggas någonstans, i detta fall hade organisatörerna valt ett mycket bra hotell i hjärtat av Trondheim. Att säga att kringarrangemangen kring konferensen fungerade bra är närmast att underdriva. För mig personligen var det också speciellt intressant att komma tillbaka till Trondheim, en stad som jag hade anledning att besöka många gånger när jag under flera somrar vistades i Storlien. Utflykten till Trøndelags friluftsmuseum och det mer privata besöket i Trondheims vackra och imponerande domkyrka bidrog också med fina minnen från konferensdagarna.

Nu övergår jag emellertid till att diskutera några av de vetenskapliga sessionerna. Som vanligt förekom både plenarföreläsningar, presentationer av forskningsbidrag och kortare presentationer. Dessutom var en workshop (eller om heter det *tankeverkstad* på svenska) inlagd. Från mina kollegers och mitt projekt *Rika problem i matematikundervisningen* bidrog Eva Taflin med en kortare presentation och jag själv med en något längre, men dem tar jag inte upp här. Istället koncentrerar jag mig på en plenarföreläsning och ett konferensbidrag och vad jag anser att jag fick ut av dem.

Barbara Jaworski –
Learning Communities in Mathematics (LCM): Research and Development in Mathematics Teaching and Learning

Barbara Jaworskis plenarföreläsning handlade om ett forskningsprojekt som bedrivs vid Högskolan i Agder. I projektet samarbetar matematikdidaktiker vid högskolan och lärare ute på fältet i något som Barbara kallar ”learning communities in mathematics” (LCM) och som väl närmast kan översättas med ”miljöer för lärande i matematik”. Hon är noga med att framhålla att man i projektet vill ta till vara både didaktikernas och lärarnas kunskaper och erfarenheter och kombinera dem för att utforska sätt att utveckla undervisningen och därigenom också elevernas lärande.

En bärande princip i projektet är ”inquiry”, ett ord som är svårt att översätta till svenska. Ordet betyder ordagrant översatt från Barbaras definition på engelska: att ställa frågor, att göra en undersökning, att skaffa sig information, att söka efter kunskap. Jag kommer i fortsättningen att använda orden ”undersöka” och ”undersökning”, även om de inte täcker upp hela begreppets betydelse. I projektet är det meningen att göra undersökningar på tre olika nivåer:

1. Undersökning vid matematiklärande. I gemensamma tankeverkstäder undersöker och utforskar lärare och didaktiker (högskollärare) matematiken i uppgifter och problem. Eleverna i skolan lär sig också matematik genom att undersöka uppgifter och problem i klassrummen.
2. Undersökning vid matematikundervisning. Lärare undersöker tillsammans planerandet och genomförandet av uppgifter, problem och andra matematiska aktiviteter i klassrummen.
3. Undersökning vid utvecklande av matematikundervisningen. Lärare och didaktiker diskuterar och utforskar tillsammans möjligheter att använda undersökning vid matematiklärande och matematikundervisning.

För att kunna genomföra detta genomför man dels

1. Tankeverkstäder vid Högskolan i Agder. Här arbetar lärare och didaktiker tillsammans med uppgifter och problem. Här skapas en miljö för undersökande. Barbara menar att de allesammans lär på olika nivåer.
2. Arbete i lärarlag ute på skolorna. Det bildas grupper om minst tre lärare på varje skola, som arbetar tillsammans för att utveckla uppgifter för klassrummet. De får stöd av didaktikerna om så behövs.

3. Innovativ undervisning i klassrummen. Lärarna undervisar i sina klasser och använder då uppgifter för undersökande som skapats enligt punkterna 1 och 2 ovan. Även IKT kan komma till användning.

Det ställs många frågor i projektet. En av dem är: Hur stämmer den här skisserade undervisningen överens med det ”normala” sättet att arbeta på med tanke på kurs- och läroplan, prov och samhällskrav? Det är en fråga som kan vara värd att ställa. Det ska bli mycket spännande att få följa detta projekt, vi här i Sverige har säkert mycket att lära av det också. Det förefaller mig som att förutsättningarna för matematikundervisningen är ganska lika i Norge och i Sverige. Möjligen har norska lärare för skolåren 8–10 mindre kunskaper i ämnet matematik än vad svenska lärare för motsvarande skolår har, eftersom de norska lärarna förväntas undervisa i alla ämnen.

Marit Johnsen Høines och Beate Lode –
Communication on Mathematics within Practice in Teacher Education: An Investigative Approach

Denna session var en av flera bidragspresentationer under ett av de sista arbetspassen. Jag fastnade för den dels därför att den hade med lärarutbildning att göra och dels därför att jag fick förmånen att kommentera motsvarande rapport efteråt.

Mer specifikt handlade föreläsningen om de samtal som utspelar sig mellan skolhandledaren och lärarstudenten efter det att studenten har genomfört en lektion. Föreläsarna hade deltagit i och observerat både lektioner och efterföljande samtal kring lektionerna och dessutom intervjuat skolhandledare och studenter. De uppfattar två olika tillvägagångssätt som de ställer mot varandra:

Ett utvärderande, bedömande tillvägagångssätt som i hög utsträckning fokuserar på vad som gick bra eller dåligt, vad som kunde ha gjorts annorlunda, vilka val som stod till buds. Detta ses som ett vad-hände perspektiv eller ett *tillbakablickande perspektiv*. Problemet med detta tycker de är att det i stor utsträckning riktar sig mot vad som varit genom en utvärdering av vad som gjorts.

I motsats till detta ser föreläsarna en matematikfokuserad, reflekterande diskussion, ett tillvägagångssätt mer inriktat på studentens utbildning, hur situationerna kan föra med sig diskussioner för vidare utveckling, ett *framåtblickande perspektiv*. Diskussionen är befriad från den utvärderande aspekten och bottnar i ett intresse för ämnet matematik och utbildning i matematik.

Även om föreläsarna menade att båda tillvägagångssätten kan vara relevanta, framhöll de att den utvärderande aspekten kan ha en tendens att förhindra den framåtblickande och utbildande aspekten. Här finns säkert mycket att ta reda på och analysera. Det ska bli spännande att följa även denna forskning i framtiden. Säkert har vi också i vårt land en hel del att lära av den.

Sammanfattningsvis kan jag bara konstatera att det var en trevlig men också lärorik konferens, och jag ser fram mot att få se dokumentationen i tryck – alternativt på CD-skiva – för att ytterligare kunna fördjupa mig i den forskning som diskuterades.

/ Rolf Hedrén

Forskarskolan i matematik med ämnesdidaktisk inriktning

Som läsarna av SMDF:s medlemsblad känner till så startade en forskarskola i matematik med ämnesdidaktisk inriktning hösten 2001. Riksbankens Jubileumsfond tog beslut om denna betydande satsning i syfte att stärka forskningsområdet matematikdidaktik i Sverige, ge det en förankring inom ämnesinstitutionerna och bidra till att fler forskningsmiljöer skulle utvecklas. Forskarskolan är en engångssatsning och var från början tänkt att pågå under fem år, som är normalstudietiden för en forskarstuderande med doktorand-anställning. Den börjar därmed närma sig sin avslutning och läsåret 20065/06 är forskarskolans femte och sista år.

Totalt deltar idag 20 doktorander med finansiering i forskarskolan, var och en med hemvist vid en av de tio olika högskolor/universitet - från Luleå i norr till Kristianstad i söder - som medverkar i forskarskolan. Vetenskapsrådet stöder genom sin utbildningsvetenskapliga kommitté forskarskolan med bidrag som gjort det möjligt att ta med ytterligare fem doktorander utöver ursprungligen planerade femton. De flesta doktoranderna antogs som forskarstuderande och började i forskarskolan vid starten i augusti 2001. I januari 2004 inlemmades ytterligare tre doktorander i forskarskolan för att kompensera för några avhopp under de första två åren. Kursverksamheten har varit öppen även för andra och totalt har närmare 40 forskarstuderande deltagit i någon av kurserna i forskarskolan.

Under de första tre läsåren gavs två kurser per år i forskarskolans regi. Var och en av kurserna har anordnats av en eller två av de ingående miljöerna. Kurserna har alla haft en klar inriktning på den matematikdidaktiska forskningen, utifrån en rad olika perspektiv. Alla miljöer har vid det här laget anordnat en kurs utom Växjö som istället stått som värd för konferensen PICME 2003, där alla doktorander presenterade sina pågående arbeten. Under de två första åren deltog alla doktoranderna i kurserna, medan de olika forskningsintressena och fokuseringen på avhandlingsarbetet gjort att kurserna inte passat in för alla under det tredje året. Kursansvariga för de olika kurserna har varit handledarna i forskarskolan Johan Lithner, Umeå, Inger Wistedt, Stockholm och Göteborg, Christer Bergsten, Linköping, Staffan Rodhe och Sten Kaijser, Uppsala, Rudolf Straesser, Luleå och Barbro Grevholm, Kristianstad och Luleå. Många internationellt välkända forskare har medverkat som föreläsare i forskarskolans kurser, bland dem Ference Marton (Sverige), Mogens Niss (Danmark), Ole Björkqvist (Finland), Abraham Arcavi (Israel), Michele Artigue (Frankrike), samt Maria Bartolini-Bussi och Maria Alessandra Mariotti (Italien).

Forskarskolan har anordnat en rad seminarier för handledare och/eller doktorander, i början mer ofta och senare någon gång per termin. Det senaste seminariet ägde rum i Sigtuna under ett par dagar i november 2005 under medverkan av professor Ole Skovsmose från Aalborgs Universitet, professor Petter Aasen vid NIFU Step, Oslo och forskaren Lillemor Kim vid SISTER i Stockholm. Programmet gällde kriterier för bedömning av avhandlingar och frågor om den utbildningsvetenskapliga kommittén vid Vetenskapsrådet och dess hittillsvarande roll i utvecklingen av forskningen inom området med speciellt fokus på ämnesdidaktiken.

Resultaten av forskarskolans verksamhet började visa sig i form av examina redan i december 2003. Hittills (december 2005) har tio licentiatavhandlingar producerats inom forskarskolans ram, alla skrivna av doktorander som fortsätter mot doktorsexamen. En lista över avhandlingarna bifogas i slutet av artikeln. Tio disputationer för doktorsexamen och ytterligare ett par licentiatexamina planeras under år 2006 och fler examina kommer de följande åren. I dagsläget ser det ut som om alla nu inskrivna doktorander kommer att nå fram till examen, i de flesta fall doktorsexamen. Om det lyckas är det ett utomordentligt gott resultat rent kvantitativt jämfört med forskarutbildningen i allmänhet.

Den matematikdidaktiska forskningen har breddats innehållsmässigt genom förankringen på matematikinstitutionerna. Doktoranderna arbetar med projekt som tar upp en rad frågor som inte tidigare behandlats i svensk forskning, eller för andra grupper av elever. Många av projekten riktas mot gymnasiet och högskolan. Exempel på forskningsprojekt är följande: matematikläroböckernas innehåll i relation till läroplanerna (Monica Johansson, Luleå), effekterna på utbildningsarkitekturen av införandet av modern informationsteknologi i undervisningen (Mikael Nilsson, KTH), effekter av de nationella proven i matematik på undervisning och lärande (Jesper Boesen, Umeå), läsning av matematiska texter (Magnus Österholm, Linköping), det intuitiva sannolikhetsbegreppet (Per Nilsson, Växjö), lärares och studenters dialoger om matematik (Andreas Ryve, Mälardalen), begreppsutveckling på högskolenivå (Kristina Juter, Kristianstad), begreppsutveckling ur ett historiskt perspektiv (Kajsa Bråting, Uppsala).

Eftersom handledarkapaciteten i Sverige är begränsad, får nio av doktoranderna biträdande handledning för sitt avhandlingsarbete av forskare från andra länder. Handledarna är verksamma vid universitet i Norge (Barbara Jaworski), Danmark (Jeppe Skott), Storbritannien (Terezinha Nunes), Kanada (Anna Sierpinska), Australien (Gilah Leder och Robyn Zevenbergen), Nederländerna (Jan van Maanen) och USA (Norma Presmeg). Kontakterna sker genom besök av doktoranderna, genom besök av handledarna och genom kontinuerlig kontakt däremellan.

Åtta av doktoranderna har tillbringat kortare eller längre tid vid någon utländsk institution och andra kommer att göra det längre fram. Flera av doktoranderna skriver sina avhandlingar på engelska. De flesta av doktoranderna har redan presenterat sin forskning vid internationella sommarskolor, konferenser eller kongresser. Speciellt viktig var givetvis ICME 10 i Köpenhamn 2004 och de anknutna konferenserna PME i Bergen och HPM i Uppsala och där de flesta av doktoranderna medverkade med bidrag i någon form. Flera doktorander har redan fått bidrag accepterade eller publicerade i internationella forskningstidskrifter.

Utan överdrift kan man påstå att doktoranderna i forskarskolan har fått ett nationellt och internationellt kontaktnät som är mycket ovanligt för så unga forskare och därmed en bra start för en fortsatt karriär som forskare. De har samtidigt genom medverkan i bland annat Biennalen och Nämnaren och arbete inom lärarutbildningen fått en god grund för fortsatt verksamhet som riktar sig mot skolan och lärarutbildningen.

Inför avslutningen av forskarskolan diskuteras inom RJ och VR möjligheterna att låta utvärdera forskarskolan, eventuellt inom ramen för en större utvärdering av flera forskarskolor som VR stöder. En avslutande ”jubileumskonferens” kommer också att äga rum i Linköping den 25-26 oktober 2006 som kommer att visa upp en översiktsbild av forskarskolans verksamhet och roll inom svensk och internationell matematikdidaktik.

En utförligare och aktuell rapport om verksamheten finns publicerad i dokumentationen från ett seminarium anordnat av utbildningsvetenskapliga kommittén i september 2005, Resultatdialog och framåtblick.

Forskarskolanss hemsida:

www.msi.vxu/Forskarskolan

Koordinator för forskarskolan:

Universitetslektor Gerd Brandell
Matematikcentrum
Lunds universitet

Lista över licentiatavhandlingar tom 2005 inom forskarskolan:

Kajsa Bråting, Uppsala, 2004. *A study of the Development oc Concepts in Mathematics*

Örjan Hansson, Luleå och Krsitanstad, 2004. *Preservice teachers' view on the concept of function: A study including the utilization of concept map*

Monica Johansson, Luleå 2003. *Textbooks in Mathematics Education: A study of textbooks as the potentially implemented curriculum*

Kristina Juter, Luleå och Kristianstad, 2004. *Learning Limits of Functions: University students' development duning the basic course in mathematics*

Per Nilsson, Växjö, 2003. *Elevers förståelse av slumpsituation: En fallstudie av hur elever i årskurs 7 tolkar och hanterar aspekter av sannolikhet aktualiserade i ett tärningsspel*

Johanna Pejlare. Göteborg och Uppsala, 2005. *Torsten Brodén and the Principles of Geometry*

Kerstin Pettersson, Göteborg och Skövde, 2004. *Samspel mellan intuitiva idéer och formella bevis: En fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift*

Johan Prytz, Uppsala, 2004. *A Study of the Angle of Contact: With a special focus on John Wallis' conception of quantities and angles*

Andreas Ryve, Mälardalen, 2003. *Collaborative Concept Mapping in Linear Algebra*

Magnus Österholm, Linköping, 2004. *Läsa matematiska texter: Förståelse och lärande i läsprocessen*

Litteratur

Högskoleverket. (2000). *Forskarskolor ett regeringsuppdrag*. Högskoleverkets rapportserie 2000:2. Stockholm: Högskoleverket

Högskoleverket. (2004). *Uppföljning av 16 nationella forskarskolor: samverkan, rekrytering, handledning och kurser*. Högskoleverkets rapportserie 2004:18. Stockholm: Högskoleverket

Kilpatrick, Jeremy & Reys, Robert E. (editors). (2001). *One field, many paths: U.S. doctoral programs in mathematics education*. Issues in mathematics education. Vol 9. Providence: American Mathematical Society in cooperation with Mathematical Association of America

Kim, Lillemor. (2000). *Svensk forskarutbildning i internationell belysning*. Stockholm: Kungl. Vetenskapsakademien.

Leder, Gilah; Brandell, Gerd & Grevholm, Barbro. (2004). The Swedish graduate school in mathematics education. Conception, birth and development of a new doctoral programme. *NOMAD. Nordisk Matematikkdidaktikk*. (Jul 2004) v. 9(2) p. 165-182.

Niss, Mogens (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 40: 1-24

Sierpinska, Anna & Kilpatrick, Jeremy (eds.) (1998). *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht: Kluwer.

/ Gerd Brandell

PS. Under våren 2006 har följande avhandlingar lagts fram inom forskarskolan:

Doktorsavhandlingar

Krisitina Juter – *Limits of functions - University students' concept development*. (Kristianstad 3 april)

Monica Johansson – *Teaching mathematics with textbooks. A classroom and curricular perspective*. (Luleå 19 juni)

Örjan Hansson – *Studying the views of preservice teachers on the concept of function*. (Luleå 20 juni)

Andreas Ryve – *Approaching mathematical discourse. Two analytical frameworks and their relation to problem solving interactions.* (Västerås 28 juni)

Licentiatavhandlingar

Torbjörn Fransson – *Artefacts and objectification of knowledge. A study of students' interaction with concrete material in analytic geometry.* (Växjö 24 april)

Teresia Jakobsson-Åhl – *Algebra in upper secondary mathematics. A study of a selection of textbooks used in the years 1960-200o in Sweden.* (Luleå 19 juni)

/ ***Christer Bergsten***

Problemens roll i matematiken

Vad är matematik? Vad gör en matematiker? Varför ska alla elever i Sverige lära sig matematik? Varför är det så svårt att lära sig matematik?

Uppfattningar om ämnet matematik

Svaren på frågan *Vad är matematik?* skiftar i hög grad beroende på vem du frågar. Elever svarar ofta att det är tal, att räkna, göra uträkningar, räkneregler, svara rätt, geometri eller liknande. Lärare svarar till exempel att det är mönster och strukturer, att kunna beskriva sin omvärld med hjälp av tal och former, att tänka logiskt, att kunna beräkna och uppskatta, att arbeta med storheter och så vidare.

Matematik som vetenskap

En svensk professor i matematik beskrev nyligen för mig hur han när han var färdig med sin forskarutbildning upptäckte att han inte hade fått tillräcklig träning i hur man själv som forskande matematiker finner intressanta problem att arbeta med. När han utbildade sig till forskare fick han av sin handledare ett färdigformulerat problem att arbeta med. Att så sker är helt enligt traditionen inom ämnet (och stämmer även väl med min egen upplevelse som student). Forskningsproblemet löste min sagesman. Men som arbetande matematiker stod han inför frågan *Vad gör en matematiker?* Förenklat kan man säga att en matematiker utvecklar intressanta forskningsproblem och frågeställningar och försöker lösa och utreda dem med hjälp av matematikens begrepp och metoder. Nu stod han som nybliven doktor i matematik inför uppgiften att finna nya problem att forska på för att kunna utveckla sig och matematiken. Hur går det till?

Forskningsfronten i matematik är långt bort från en välutbildad persons kunskaper, brukar vi hävda. Ja, det belyses väl av att även en nybliven doktor saknar erfarenhet av hur man konstruerar nya intressanta problem. Har vi inte här något av matematikens dilemma? Att konstruera nya intressanta problemen är minst lika viktigt som att sedan kunna lösa dem och reda ut hur det förhåller sig. Blivande forskare i matematik behöver alltså i sin utbildning få erfarenhet av hur goda problem formuleras och konstrueras. Traditionen att doktorander får sitt forskningsproblem av handledaren medför alltså ur detta perspektiv vissa nackdelar. Tyvärr finns en liknande tradition i skolan, vilket vi ska ta upp mer nedan.

Vad är då matematik som vetenskap? Den frågan låter sig inte besvaras kort och enkelt. Och det finns lika många olika beskrivningar som personer som svarar på frågan. Andrejs Dunkels (1995) har beskrivit hur han uppfattar matematiken som ett didaktisk äventyr. Han skriver att det finns en vida spridd uppfattning att matematiken är logisk, strikt, steril, fri från känslor och helt enkelt rätt eller fel. Detta är delvis sant och delvis en myt. I sin polerade form kan matematiken ge den ej initierade detta intryck. Emellertid har inga delar av matematiken någonsin skapats på det sätt som de presenteras i forskningsartiklar och de flesta läroböcker. … Sanningen är att formuleringen av en sats är något som sker efter det att man upptäckt att i en bunt kladdpapper faktiskt något har bevisats. Från den röran - skisser och anteckningar - väljer man ut de relevanta detaljerna och presenterar resultatet i den omvända ordningen mot den i vilken det skapades - utan att nämna alla de felaktiga spåren eller alla misstagen. (s 420, min översättning)

Många som arbetar med matematik kan känna igen något i den beskrivningen. Är det så att matematiker själva betraktar produkten, det avskalade resultatet av sitt arbete som matematiken? Är det som presenteras i artiklar och böcker matematiken? Eller är den process som leder till dessa produkter också en del av matematiken? I processen ingår då att formulera intressanta problem eller problemområden och att göra ett arbete inom området.

Detta avskalade sätt att presentera resultaten av sitt arbete som matematiker leder också till att man inte avslöjar hur arbetsprocessen går till. Vilken association var det som ledde till att jag fick en ny idé bort från det blindspår jag först hamnade i? Vilka tillfälligheter eller samtal fick mig att pröva en ny infallsvinkel på problemet? Vilket var den verkligt svåra punkten i resonemanget, den som krävde tid och stor intellektuell ansträngning? Mera sällan ger matematiker svar på sådana frågor. Att även sådana delar av skapelseprocessen är av intresse ser vi av det uppseende som Simon Singh väckt med sin bok om hur Andrew Wiles löste Fermats gåta (1998). En intressant aspekt i den berättelsen är tidsperspektivet. Att det ska få ta tid att lösa matematiska problem inser inte alla studenter eller elever. Att matematik kan kräva intellektuell uthållighet framgår sällan av skolböcker i matematik. Hur kan vi erbjuda elever att uppleva dessa aspekter av arbete med matematik?

Matematiken i skolan

Eleverna får sina matematikproblem av läraren. Läraren får i regel sina problem av läromedelsförfattarna. Det är inte ens självklart att lärare skapar egna problem till elevernas prov och diagnoser. Det finns till flera läromedel färdiga prov och diagnoser. Alla vet att problemen redan är lösta. I regel följer ett facit med. I skolan vet eleverna att problemen oftast har ett enda rätt svar. Klipska elever måste undra varför de ska lösa problem och genomföra resonemang som andra redan gjort. Denna situation med givna på förhand lösta problem gäller även studenter på universitetens grundkurser i matematik. Det kan till och med vara så att studenterna vet vilken typ av uppgifter som ska ingå i en skriftlig tentamen genom att den alltid följer en viss mall.

Traditionen bjuder också att elever löser just det givna problemet, kontrollerar sitt svar med facit och går vidare till nästa problem. Sällan stannar lärare och elev upp och frågar: ”Månne jag kunde gjort på något annat sätt, kanske bättre? Kan jag lösa något liknande problem eller generalisera frågan? Har det här problemet någon anknytning till något jag tidigare arbetat med? Vilket var den viktigaste tanken i denna lösning? Kan jag lära mig något för kommande behov av lösningen?”

Det förekommer att lärare låter eleverna formulera egna problem och lösa varandras skapade uppgifter. Själv har jag arbetat så i viss grad till exempel inom utbildningen av 4-9-lärare i matematik. Ett exempel därifrån beskrivs mera ingående nedan. Konkreta exempel på sådant arbete både i skolan och i lärarutbildningen har nyligen redovisats i uppsatser, som jag handlett (Håkansson, 2002; Åkesson, 2000). I båda fallen var resultaten mycket intressanta och uppmuntrande. Lars-Anders Håkansson har integrerat ämnena bild och matematik för elever i år 6. Eleverna har ritat bilder och skapat problem i matematik med utgångspunkt från bilderna. Läraren konstaterar att skillnaden i matematisk förståelse för olika elever framgår tydligt av de exempel de skapar, men samtidigt har både duktiga och svaga elever presterat sitt bästa efter sina egna förutsättningar. Några elever sa:

- Detta är jobbigare för man måste tänka dubbelt. Först ska man göra en uppgift och sen ska man lösa den.
- Man måste ju tänka mer!
- Det är jättekul att man bestämmer själv.
- Då man gör en egen uppgift måste man tänka på ett helt annat sätt än när man löser en färdig uppgift.

Håkansson avslutar sitt arbete med att konstatera att matematik handlar om att upptäcka, inte att reproducera. Det viktigaste är inte att ha fokus på bara produkten utan ”vägen till svaret”, processen är det primära.

Jonny Åkesson söker i sitt arbete svar på frågan om hur studenterna upplever lärarutbildningens betoning av att de ska utvecklas till goda problemkonstruktörer. Studenternas reaktion var att de till en början upplevde det svårt att konstruera problem som låg på rätt nivå för eleverna men att det blev lättare efter hand. Åkessons slutsats är att kursens uppläggning möjligen fört studenterna ett stycke närmre målet att vara väl förberedda som lärare i matematik genom att ha problematiserat undervisningen om problemlösning och begreppsutveckling.

Att bidra till matematikens utveckling

Den forskande matematikern måste hitta på nya frågor och problem. Inspirerad av Vollrath (1994) ställde jag en gång frågan till en matematiker: "Vilka nya begrepp har du genom din forskning infört i matematiken?" Han tog mycket lång tid på sig för att fundera över vad han skulle svara. Till slut sa han: "Det är väldigt få förunnat i matematiken att införa nya begrepp som överlever." Vollrath hävdar att även elever borde få inspiration att försöka skapa nya begrepp i matematik.

> For most student teachers, university education in mathematics means receptive learning. They can be creative to some extent in problem-solving when they find a solution, perhaps on the basis of an original idea. But they will never be asked to form a new concept. Some students have perhaps written poems on their own, they have painted pictures, composed melodies, and made biological, chemical, or physical experiments. But why do they not develop mathematics on their own? We all feel that they will have no real chance of inventing an important piece of mathematics. But is this not also true for their poetry, their painting, their music, their biology, chemistry, or physics? Perhaps it is "the power of the mathematical giants" that discourages students from making mathematics? (Vollrath, 1994, s 67)

Kärnan i matematisk forskning är att finna på nya intressanta frågor och problem, införa nya begrepp som blir livskraftiga och kunna lösa problemen, bevisa de hypoteser man ställer upp och övertyga omvärlden av betydelsen av det man gjort. Ändå verkar det förhålla sig så att i undervisning i och om matematik uppehåller vi oss på alla nivåer mest kring uppgiften att lösa redan givna problem eller bevisa redan kända satser. Vad beror denna paradox på?

I en intervju som jag nyligen hade tillfälle att göra med en professor i matematik, som handleder doktorander, frågade jag om han kunde berätta hur han skapar bra uppgifter för en doktorand. Han berättade då att han vid ett tillfälle läst en matematisk artikel som redovisade lösningen av ett problem. Under läsningen tänkte han, att det här kan jag förbättra avsevärt. Jag kan utvidga lösningen till att gälla mera generella områden genom att dra nytta av resultat jag har från tidigare arbeten. Uppgiften att genomföra det gav han då till en doktorand. Exemplet visar att en aktiv forskande matematiker kan ha frågan om nya uppgifter att lösa levande hela tiden och ställer nya frågor i anslutning till en redovisad lösning. Ett sådant förhållningssätt bör stimuleras under all matematikutbildning och är idag inte så vanligt.

Hur framstår matematiken?

För att matematiken ska framstå för elever på olika nivåer som det vackra, spännande och för tanken utmanade ämne det är måste hela förloppet i matematisk forskning bli synligt. Det betyder att vi även måste inkludera fasen att skapa problem och att arbeta med frågor där inte läraren eller boken redan vet lösningen och svaret. Och detta måste elever på alla nivåer få förmånen att göra. Den begränsade bild "vanliga människor" har av matematiken beror delvis på att de enbart fått se en del av den matematiska verksamheten.

Anta att en ung student sitter med universitetens färgglada kataloger framför sig och funderar över sitt val av studieämne vid universitetet. Får hon/han svar på frågan: *Vad är matematik? Vad innebär det att studera matematik på universitetsnivå?* En genomgång av katalogerna från 1999/2000 visar att så inte är fallet (Grevholm, 2002). Så här kan texten vara utformad:

> Matematik är ett brett ämne med många nyanser, alltifrån enkel aritmetik till matematisk forskning. Studier i matematik tränar upp förmågan till analytiskt, kritiskt och systematiskt tänkande och ger det språk som används inom teknik och naturvetenskap.

Döljer vi matematiker vad matematik innebär för andra i världen? Varför framstår inte ämnet som den intellektuella utmaning det är? Med den teknik som finns idag på det världsvida nätet borde det vara möjligt för de matematiska institutionerna i Sverige att lägga ut en text om vad matematik är och vad det innebär att arbeta med matematik, som kan verka attraherande på unga studenter. I den texten skulle jag vilja att det kommer fram att uppgiften att skapa intressanta problem är en viktig del av arbetet med matematik.

Problemens roll

> Men är det möjligt att problemlösning är så central för undervisningen i matematik att man kan beskriva den som matematikens kärna? (Björkqvist, 2001)

Ja, problemlösningen är central. En viktig del i den måste även vara att formulera nya problem och utveckla nya områden. För att studerande på olika nivåer ska våga göra det måste de vara övertygade om att de kan tänka matematiskt (Mason et al, 1992). De måste våga lita på sin egen tankekraft och förstå att de kan resonera matematiskt, specialisera, generalisera, ställa upp hypoteser, pröva dem, resonera logiskt, kommunicera, beskriva, förklara och övertyga andra om att deras tankegångar är riktiga. För att våga använda sin kapacitet på detta område måste man ha fått tillfälle att pröva sin tankekraft och se att det bär. Undervisning i matematik i hela utbildningssystemet måste innehålla mycket mer av tillfällen att utveckla den studerandes förmåga att resonera och tänka matematiskt.

Varför ska alla lära sig matematik?

Det leder osökt in på frågan varför alla ska lära sig matematik. De mål som satts upp för matematikundervisningen och sättet att rättfärdiga dem har växlat med tiden. Frågan har varit föremål för en hel del forskning inom matematikens didaktik (Niss, 2001). Från en situation då matematik endast var till för en elit i samhället har vi kommit till att vi erbjuder matematikundervisning till alla upp till och med det tionde skolåret. Bakom det måste ligga en övertygelse om att matematiken kan tillföra något av värde för alla individer och för samhället. Ett vägande skäl är säkert, att den som prövat på kraften, som ligger i att kunna tänka och resonera matematiskt, har erfarit att den är stark och mångsidigt användbar. Den som utvecklat denna förmåga kan ha glädje av den i många av livets skeden. Det krävs emellertid då att de flesta som studerar matematik får uppleva tillfällen där de verkligen övertygas om att matematiken har en kraft som är av värde. Ett sätt att göra det är att de får vara med om att skapa problem, ställa nya frågor och lösa dem med sin matematiska kraft. Sådana inslag i matematikundervisning på alla nivåer kan få större plats, anser jag.

Vad beror svårigheterna på?

Varför är det då för så många elever så svårt att lära sig matematik? Det finns naturligtvis inte något kort och lätt svar på denna fråga som så många brottats med. Frågan i sig är en av grunderna för att vi behöver ett forskningsfält som matematikens didaktik. Min hypotes är att en bidragande orsak till problemen är att matematiken som ämne inte ges en rättvisande bild i skolämnet matematik eller ens i grundutbildningen för studenter. Forskningen om uppfattningar om matematik ('beliefs'; se Thompson, 1989) har belagt att både elever och lärare i skolan kan uppfatta matematiken i skolan som en samling regler man ska lära sig utantill och som ska följas mekaniskt i upprepningar av standardmetoder som förevisas. Den som enbart upplevt matematiken från denna aspekt har gått miste om de delar som är ämnets mest fascinerande. En sådan uppfattning får också konsekvenser för hur elever lär sig matematik.

Forskningen har också visat att lärare som har en instrumentell syn på matematiken lägger upp sin undervisning på ett annat sätt än den som har en djupare förståelse för procedurer och begrepp. Läraren erbjuder genom sitt handlande i klassrummet eleverna att bygga upp en syn på matematiken som stämmer med lärarens. Erkki Pehkonen (2001) pekar ut två tydliga teman i Thompsons (1989) beskrivning av läraruppfattningar om matematik: "När man lär sig matematik är vetskap och minne det viktigaste" samt "Tänkande verkar inte ha något gemensamt med matematik". Han hävdar att om en lärare har en sådan uppfattning kommer den förr eller senare att överföras till eleverna och göra att de får liknande föreställningar. Pehkonen tar som exempel den elev som tycker att matematik bara handlar om räkning. Elevens förståelse är ofta en följd av en tämligen ensidig undervisning inriktad på räkning på grundnivå. Problem som kräver en form av tänkande som går utöver enkla räkneoperationer kan visa sig att bli ett oöverstigligt hinder.

Forskningsresultat av detta slag indikerar att det är viktigt att lärare men även elever får en mångsidig bild av matematiken. Däri ingår att till fullo uppskatta problemens roll i matematiken. Jag återkommer till denna aspekt avslutningsvis.

Är det möjligt att förändra matematikundervisningen?

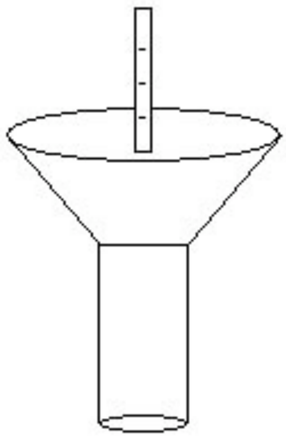
Med några konkreta exempel som bakgrund kan vi diskutera om en viss förändring vore möjlig. Det första hämtar jag från min egen undervisning med lärarstuderande för år 4-9. I en av de inledande matematikkurserna har studenterna ett inslag där de arbetar i projektform. Utgående från någon intressant situation eller fråga i media ska de undersöka vilken matematik som kan dölja sig inom området och vilka matematiska modeller som kan användas. Syftet med projektet är flerfaldigt. De studerande ska bland annat se om de kan använda sina matematikkunskaper från skolan i praktiken och se hur matematiken kan användas inom olika områden av vardagslivet. I kursplanen står det att studenten ska

- tillämpa sitt matematiska kunnande från skolan i självständiga projekt, som innebär problemlösning och kommunikation
- utveckla sin syn på matematikens relation till naturvetenskapliga arbetssätt och metoder samt se exempel på modellering.

Exemplet Regnmätaren

Exemplet handlar om arbete med en vanlig regnmätare i metall. Studenterna utgick från en annons om regnmätaren och valde att formulera sina problem så här:

- Hur ska man dimensionera regnmätaren?
- Hur ska man göra graderingen på mätstickan som sitter inuti regnmätaren?



Studenterna började med att besöka en järnaffär och mätte upp bland annat diametern uppe vid mynningen och nere i botten av regnmätaren samt mätstickan och dess gradering. Därefter ringde de upp företagets ägare och frågade hur graderingen på mätstickan var gjord. De fick svaret att man kört efter samma ritning sedan 1950 då den första regnmätaren tillverkades och att den ingenjör som gjort konstruktionen slutat för länge sedan. Själv visste ägaren inte hur man skulle gå tillväga för att gradera. I sin rapport skriver studenterna: ”Efter det var det bara att fatta pennan och börja räkna. Men vi måste erkänna att det tog lite tid innan vi visste hur man började räkna.”

Bakom denna skrivning gömmer sig det faktum att när studenterna inte fick någon hjälp med beräkningen från företaget förstod de inte hur de skulle gripa sig an problemet. I flera dagar gick de som katter kring het gröt runt mig innan de slutligen tog mod till sig och medgav att de behövde hjälp. Först efter vårt samtal förstod de att den modell de skulle arbeta med var att se det uppsamlade regnet i den vidare ”cylindern” vid mynningen och beräkna hur högt det når i den cylindriska behållaren i regnmätarens nedre del. De utgick då från att 1 mm regn fallit och beräknade den uppsamlade volymen. Då kunde de räkna fram att i den nedre behållaren skulle det vattnet nå upp till nivån 5,1 mm. Det visade sig stämma väl med den på regnmätaren uppmätta graderingen. Därefter gjorde de en genomgång av tänkbara felkällor som påverkar noggrannheten i mätningen.

Den första uppgiften de gav åt sig själva redovisar de inte trots att det är intressant att fundera på hur mätaren ska dimensioneras. Modernare mätare i plast rymmer i regel en mindre totalvolym. Min egen erfarenhet är att de ofta hinner bli överfulla om man inte har tillfälle att läsa av mängden nederbörd varje dag. Här hade studenterna kunnat få anledning att fundera över hur mycket regn som faller normalt under en viss tidsperiod och hur ofta man kan tillåta sig att mätaren ska få svämma över.

Vad kan vi lära av detta exempel? De båda studenterna behärskade troligen redan sedan grundskolan den matematik som krävs för att lösa problemet. Men att kunna formeln för cylinderns volym är inte tillräckligt här. De behöver även förstå att den modell som ska användas är att vattnet samlas upp i en vidare cylinder (som inte syns) och hälls ner i en smalare cylinder. En avsikt med att göra så måste rimligen vara att utslaget för 1 mm regn ska bli större än om man samlar upp och förvarar i samma cylinder. Modelltänkandet är så pass ovant för dem att de inte klarar av det på egen hand. Det enkla knepet att fråga någon som arbetade med regnmätare hjälpte inte i detta fall.

Den beskrivna situationen visar att studenterna kan formulera intressanta uppgifter för sig själva, uppgifter som är rimligt svåra att klara av med den matematiska kunskap de besitter. Däremot är de så ovana att tillämpa sin matematik i nya situationer att de har svårt att se hur de ska gå tillväga. Det är också uppenbart att den patentlösning, som en del obetänksamma idag ger, nämligen att leta på den världsvida väven efter lämplig information, inte är till någon vidare hjälp när man inte vet vilken modell man ska använda. Studenterna har här konstruerat ett eget problem till sig själva och egen tankekraft är nödvändig för att reda ut situationen. När de väl hade klarat ut uppgiften och lämnade in sin skriftliga redovisning var de ganska stolta över sin prestation.

En närläsning av redovisningen visar dock tydligt att det professionella språk en matematiklärare behöver i klassrummet ännu inte erövrats av studenterna. Några citat ur deras rapport belyser det:

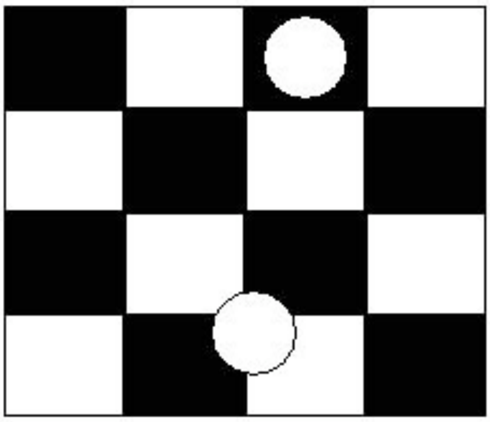
> Det vi först måste ta reda på är volymen för öppningen då det faller 1 mm nederbörd, detta för att underlätta graderingen av mätstickan. Volymen där nere kommer ju att få samma volym som där uppe fast med annan höjd.
>
> Denna volym kommer nu att få en annan höjd i den smalare uppsamlaren och det är den vi vill åt. Det får vi genom att lösa ut höjden där nere.

Studenterna är ovana att uttrycka sin tankegång i skrift och övningar av det här redovisade slaget är säkert nyttiga för tankereda och förmåga att redovisa.

Exemplet Marknadsspelet

Den här beskrivningen är hämtad från en artikel av Thomas Romberg (1994). Det handlar om en klass elever i år 8 som löser uppgiften om ”Fairground” hämtat från Geometric Probability (North Carolina School of Science and Mathematics, 1988). Så här lyder problemet:

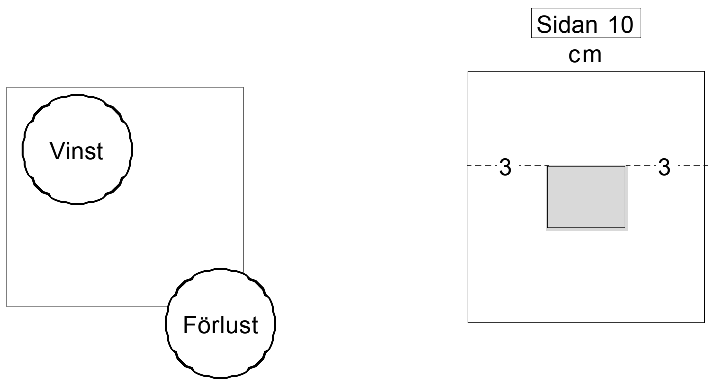
> På en marknad kastar spelare mynt på ett schackmönstrat bräde. Om ett mynt rör någon gräns mellan rutorna är det förlorat. Om det rullar av brädet återlämnas det. Men om det ligger helt inom en kvadrat vinner spelaren tillbaka myntet tillsammans med ett pris.



Romberg påpekar att problemet uppfyller flera av de viktiga dragen i matematikundervisning som den beskrivs i NCTM Standards (1989). Det börjar med en verklig problemsituation. För att lösa problemet krävs en förenkling så att en lämplig modell kan användas. För att skapa en modell måste flera begrepp från olika områden av matematiken användas, till exempel från sannolikhetslära, geometri, koordinatgeometri osv.

Flera olika matematiska procedurer kan användas så som generering av slumptal, simulering, att plotta punkter, specialisera, generalisera från ett specifikt exempel och så vidare. Romberg beskriver hur elever i en klass i år 8 faktiskt behandlade det här problemet. De bestämde sig först för att det verkligen var ett problem inom geometrisk sannolikhetsberäkning. De hade fått undervisning om att sannolikhet kan förstås från en geometrisk såväl som en analytisk eller beräkningsaspekt. De visste att det ofta var möjligt att göra en geometrisk modell för problemet.

Klassen bestämde sig för att bekanta sig med problemet genom att se på ett speciellt fall: Låt radien av myntet vara 3 cm och sidan av kvadraten 10 cm. Vilka geometriska former representerar utfalls- och händelserummen? Betrakta myntets medelpunkt som pilspetsen i en "dartpil". Var kan pilen träffa och vinna? Myntets medelpunkt måste vara minst 3 cm bort från varje sida annars kommer myntets kant att passera någon del av kvadratens omkrets. Utfallsrummet är kvadraten med sidan 10 cm medan det vinnande händelserummet är en kvadrat med sidan 4 cm.



Kvoten mellan dessa två areor är 16/100 = 16 %. Sannolikheten för att vinna detta speciella spel är 16 %.

Efter denna beräkning ser eleverna på det allmänna fallet: en kvadrat med sidan S och ett mynt med radien R. För att vinna måste myntets medelpunkt vara minst R enheter från sidan. Kvadratens area är S^2 medan arean för det vinnande området är $(S-2R)^2$. Den teoretiska sannolikheten för att vinna spelet är

$$P = (S-2R)^2 / S^2$$

Eleverna bestämde sig även för att undersöka hur stor radien ska vara på myntet för att en spelare ska ha lika stor chans att vinna som att förlora då kvadratens sida är 10 cm. Genom att sätta P lika med en halv i uttrycket ovan kunde de beräkna R till 1,46 cm ($(10-\sqrt{50})/2$). Om myntets radie överstiger 1,46 cm är chansen att förlora större än chansen att vinna. Därefter konstruerade eleverna ett bräde och testade sina resultat empiriskt. Den empiriska sannolikheten befanns vara nära den teoretiska.

Två elever skrev ett datorprogram för att simulera dartkastet (genom att använda en Monte Carlo rutin att plotta punkter på måfå på en datorskärm och räkna kast och träffar). De lade märke till att deras empiriska resultat och det teoretiska närmade sig varandra då antalet kast ökade.

Till slut undersökte eleverna flera problem som var relaterade till det ursprungliga. Till exempel såg de på:

- Anta att kvadraterna är ordnade i ett schackmönster med röda och vita kvadrater. Om bara de vita kvadraterna är vinnande område hur påverkar det sannolikheten för att vinna med en särskild storlek på myntet?
- Anta att mönstret består av hexagoner istället för kvadrater. Om sidan på en hexagon är 20 mm medan myntet hade en radie på 7 mm vad är sannolikheten för att vinna?
- Hur mycket bättre är en hexagon med sidan 25 mm än en kvadrat med sidan 25 mm för ett mynt med radien 10 mm?
- Vilken är, för det ursprungliga problemet med kvadrater, relationen mellan S och R för vilken sannolikheten är större än en halv för att vinna? Vilken betydelse får detta för önskan att spela eller inte spela spelet?

Romberg understryker att Standards betonar att elever ska göra matematik och att exemplet visar hur det kan uppnås. Men är det verkligen vad matematiker gör? Romberg noterar att för att förstå vad det betyder att göra matematik måste man inse att matematiker inom sin egen krets argumenterar om vad för slags matematik som är acceptabel, vilka bevismetoder som ska godtas och så vidare. Han citerar Kitchner (1988) som hävdar att:

> Mathematical practice has five components: a language employed by the mathematicians whose practice it is, a set of statements accepted by those mathematicians, a set of questions that they regard as important and as currently unsolved, a set of reasoning that they use to justify the statements they accept, and a set of mathematical views embodying their ideas about how mathematics should be done, the ordering of mathematical disciplines and so on. (s 299).

Kitchner hävdar således att matematiker engagerar sig i matematik som medlemmar i ett lärt kollektiv som skapar det sammanhang inom vilket den individuella matematikern verkar. Medlemmarna i detta kollektiv delar en syn på hur man betraktar matematisk aktivitet.

Elever har frågor och funderingar om matematik

Häromdagen fick jag följande brev i datorposten från en gymnasist.

> Hej!
> Jag läser just nu Matematik C och har kommit till kapitlet om logaritmer och ekvationer av typen 2^x=3. I boken står att någon kom på 10-logaritmerna på 1600-talet, "men hur beräkningarna gjordes tar vi inte upp här". Vad jag vill veta är hur man räknar ut 10-potensen för 1 till 10 för hand. Visst är det enklaste att använda tabeller eller miniräknare, men jag vill veta hur man gör. Det var likadant när jag läste en kurs om växelström och vi höll på med sinus och cosinus. Jag kan bara inte acceptera att "så här är det". Jag skulle även vara tacksam om ni kunde svara på hur man räknar ut t ex 2^(1/8), som man får när man sysslar med ekvationer som x^8=2. 2^(1/8) är ju =2^0.125, hur kan man ta ett tal gånger sig självt 0.125 gånger??

Har eleven ställt samma fråga till sin matematiklärare? Det är en bra uppgift för en klass att försöka ta reda på dels hur man gjorde ”på den tiden”, dels att fundera över hur de själva skulle kunna gå tillväga om de var på en öde ö och vill räkna ut 10-logaritmerna för 1 till 10 för hand. Förmodligen skulle både elever och lärare under det arbetet lära sig en hel del om matematik. Troligen skulle de eleverna inte komma till matematikundervisningen på universitetsnivå och säga att de aldrig mött begreppet logaritm.

Den sista funderingen som eleven kommer med visar hur en vanligt förekommande undervisning kan leda elever in i tankemässiga återvändsgränder. Om läraren alltför starkt betonar att en potens kan uppfattas som att basen multipliceras med sig själv ett antal gånger blir det svårt för eleven att ta steget från potens med heltalsexponent till allmännare exponent. Eleven måste då bli varse att det går att ge en mera generell innebörd till det begrepp som först studerats i ett enkelt specialfall. Eleven som skrivit brevet befinner sig i en kognitiv konflikt med sin tidigare tolkning av innebörden av en potens. För att eleven ska kunna ta steget till en mera generell uppfattning skulle läraren behöva göra synlig den tankegång som krävs för att införa potenser med allmän exponent. Eleven pekar på en punkt i lärandet som kräver ett ordentligt kliv i den kognitiva utvecklingen och som tyvärr ofta förbigås med tystnad av både läroböcker och lärare. Det här är ett förhållande som kan verka bortstötande på elever som vill skapa sig en djupare förståelse av matematiken.

Min egen syn på problemens roll i matematiken

Först ska sägas att inslag som syftar till att ge färdighet i att lösa även rutinproblem och förtrogenhet med förekommande matematiska verktyg och modeller behövs. Mycket av det som görs är sunt och bra. Men det finns utrymme för en del nya aspekter av det slag som jag pekar på ovan. Det är rimligt att kräva att undervisning i matematik på gymnasienivå och universitetsnivå går före i en utveckling där man mera betonar de skapande inslagen i matematik. Det kanske måste ske på bekostnad av att en del stoff lyfts bort ur kurserna.

Det är min fasta övertygelse att det är bättre att lära sig matematik på ett meningsfullt sätt där verklig förståelse uppnås och göra det inom ett något mera begränsat område än att hasta igenom en större stoffmängd och känna att man egentligen inte har förstått någonting på djupet. Den som fått uppleva att hon kan lära matematik med förståelse vågar ge sig på nya områden inom ämnet i övertygelse om att den egna kapaciteten räcker för att lära även där. Den som däremot bara fått uppleva att hon känner sig dum och inte förstår något tar avstånd från ämnet.

Under min tid som lärare i matematik på gymnasiet fann jag utbudet av uppgifter i gängse läroböcker något för begränsat. Jag införde något som jag kallade *Dagens nöt* där mina elever fick möta problem av lite annorlunda karaktär. Ett av problemen var *Sju broar i Königsberg*, som lät eleverna uppleva ett problem som saknar lösning. Det är en ovanlig företeelse i läroböcker. Det gav mig även anledning att visa en film om Euler och hur han bevisade att problemet saknar lösning. Det inbjuder även till att berätta om hur nya områden inom matematik utvecklas från en konkret problemsituation. Andra problem kunde behandla Möbius band, Fibonacci, Euklides algoritm, Akilles och sköldpaddan, Fyrfärgsproblemet, Space filling curves, Pascals triangel, Tangram, Fingerfärdig multiplikation och så vidare. Syftet kunde vara att ge eleverna en smak av matematik som vanligen inte tas upp inom skolans ram men på ett sådant sätt att den väckte deras intresse.

Fyrfärgsproblemet, som var aktuellt i slutet av 70-talet då en lösning presenterats och man gav ut ett frimärke med det motivet har fått förnyad aktualitet 2002 då ett nytt bevis lagts ut på nätet. Lösningen från 1976 gav upphov till omfattande diskussioner om vad som kan räknas som ett giltigt bevis i matematiken. Det blir intressant att se vilka diskussioner det nya beviset skapar. Genom att elever får kontakt med den här typen av problem kan de kanske förstå att matematiken fortfarande är ett levande ämne där forskning pågår. De problem jag använde med mina elever samlade jag i en pärm som eleverna med sina uppslag hjälpte till att fylla. En del av det materialet har senare getts ut som en problemsamling (Grevholm, 1988, 1989).

Utmaningarna, som problemen kom att kallas, använde jag ofta som utgångspunkt för att skapa nya problem och ställa nya frågor. Det i sin tur ledde till att jag senare lät lärarstuderande själva formulera och skapa problem och avgränsa egna uppgifter. Genom att de får göra det upptäcker de att matematiken kan användas i många olika sammanhang i livet och att den ofta kan göra en kraftfull i sin bedömning av en situation. Som exempel kan vi ta de tre lärarstuderande, som valde att undersöka villkoren för *Spel och dobbel*. Ämnesvalet berodde nog på en förkärlek för att spela. Deras slutsats då de beräknat sannolikheten för vinst i de olika spel som erbjuds i Sverige var att de aldrig mer tänkte spela. Den matematikuppgiften kanhända satte spår för lång tid. En annan grupp studerande gjorde beräkningar av hur dagistaxan slog mot olika typer av familjer i en kommun. De visade bland annat att en ensamstående med ett barn på daghem och två barn på fritidshem fick betala dubbelt så mycket som i grannkommunen. Det hade inte varit avsikten och kommunen tog emot studenternas utredning med stort intresse. Taxan ändrades.

Pehkonen frågar (2001) om det finns en optimal matematikundervisning. Hans hypotes är att det kräver av läraren innehållskunskap, pedagogisk innehållskunskap, en väl utvecklad syn på matematik och flexibilitet. En aspekt på flexibiliteten är att läraren delar med sig av sin makt och bestämmanderätt i klassrummet. För mig innebär detta att eleverna får ta ansvar för sitt eget lärande bland annat att de får vara med och formulera frågor och skapa problem i matematiken. Då kommer matematiken att få en mening för eleverna. De kommer bland annat att få tillämpa sina kunskaper i olika sammanhang. De får i bästa fall se exempel på matematikens kraft och de får tillfälle att kommunicera sina kunskaper. Problem i matematiken bör få spela denna vidare roll.

Referenser

Björkqvist, Ole (2001). Matematisk problemlösning. I Barbro Grevholm (red), *Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.

Dunkels, Andrejs (1995). Mathematics as a didactical adventure. *International Journal for Mathematics Education, Science and Technology, vol. 26*, nr 3, 417-429.

Grevholm, Barbro (2002). *Lärarutbildning - utbud, utbildare och anordnare*. NCM-Rapport 2002:1. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning.
Grevholm, Barbro (1988). *Utmaningen - problem och tankenötter i matematik*. Malmö: Liber.
Grevholm, Barbro (1989). *Lilla utmaningen - problem och tankenötter i matematik*. Malmö: Liber.
Håkansson, Lars-Anders (2002). *Matematik med hjälp av bilder*. Institutionen för matematik och naturvetenskap, Högskolan Kristianstad.
Kitchner, P. (1988). Mathematical naturalism. In W. Aspray & P. Kitchner (Eds.), *History and philosophy of mathematics, Minnesota Studies in the philosophy of science*. (Vol. xi, pp 293-325). Minneapolis: University of Minnesota Press.
Mason, John; Burton, Leone & Stacey, Kaye (1982). *Thinking mathematically*. Wokingham: Addison-Wesley Publishers.
Niss, Mogens (2001). Mål för matematikundervisningen. I Barbro Grevholm (red) *Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston VA: Author.
North Carolina School of Science and Mathematics (1988). *Geometric Probability*. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Pehkonen, Erkki (2001). Lärares och elevers uppfattningar som en dold faktor i matematikundervisningen. I Barbro Grevholm (red.) *Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.
Romberg, Thomas (1994). Connection between theory and practice. In Alan Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
Singh, Simon (1998). *Fermats gåta*. Stockholm: Norstedts Förlag.
Thompson, Alba (1989). Learning to teach mathematical problem solving: Changes in Teachers' conceptions and beliefs. In R. I. Charles och E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Research agenda for mathematics education. Volume 3. Reston VA: Lawrence Erlbaum.
Thompson, Alba (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. I D. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
Vollrath, Hans-Joachim (1994). Reflections on mathematical concepts as starting points for didactical teaching. In Biehler, Rolf; Strässer, Rudolf et al. (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific disipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Åkesson, Jonny (2000). *Problemkonstruktion är det lärarens angelägenhet?* Institutionen för matematik och naturvetenskap, Högskolan Kristianstad.

/ Barbro Grevholm

E-postdresser till medverkande i *Medlemsblad* nr 11

Gerd Brandell	gerd@maths.lth.se
Barbro Grevholm	barbro.grevholm@hia.no
Kerstin Hagland	kha@du.se
Eva Taflin	evat@du.se

Anslagstavlan

Aktuella konferenser

PME 30, Prag, Tjeckien 16-21 juli 2006
http://pme30.cz/

CIAEAM 58, Srni, Tjeckien, 9-15 juli 2006
http://www.pef.zcu.cz/cieaem58/en/

ALM 13, Belfast, Nordirland 16-20 juli 2006
http://www.alm-online.org/ALM13/alm13.htm

Forskarskolans Jubileumskonferens
Linköping 25-26 oktober 2006
http://www.mai.liu.se/jubileumskonferens/

Telefoner och e-postadresser till funktionärerna i SMDF:s styrelse 2004

Ordförande	Barbro Grevholm	044-203427	barbro.grevholm@hia.no
Vice ordförande	Christer Bergsten	013-282984	chber@mai.liu.se
Kassör	Thomas Lingefjärd	031-7732253	thomas.lingefjard@ped.gu.se
Sekreterare	Astrid Petterssson	08-7736968	astrid.petterssson@lhs.se