

S MDF

Svensk Förening för MatematikDidaktisk
Forskning

MEDLEMSBLAD

Nr 13

Mars 2007

INNEHÅLL

Medlemsblad nr 13 (<i>Christer Bergsten</i>)	1
Några rader från ... (<i>Barbro Grevholm</i>)	2
Matematikdidaktikens vägar (<i>Christer Bergsten</i>)	5
Doctoral theses in the Nordic countries (<i>Barbro Grevholm</i>)	20
Hedersdoktorer i matematikens didaktik (<i>Christer Bergsten</i>)	28
E-postadresser och Anslagstavlan	32

Medlemsblad nr 13

Detta nummer har tyvärr blivit försenat, bland annat på grund av redaktörens arbetsbörda. Det var planerat för december 2006 men utkommer först nu i mars 2007. Medlemmarna i SMDF uppmuntras att till medlemsbladet skicka in kortare artiklar, projektbeskrivningar, debattinlägg, reseberättelser, bokrecensioner eller annat som kan vara av intresse för föreningens medlemmar att ta del av.

Under rubriken *Några rader från...* berättar inledningsvis föreningens avgående ordförande om vad som är på gång i SMDF och svensk matematikdidaktik i övrigt.

Den nationella forskarskolan i matematik med ämnesdidaktisk inriktning, finansierad av Riksbankens Jubileumsfond, startade som bekant under 2001 och har fullgjort sina fem år under år 2006. Flera disputationer har genomförts under året och en jubileumskonferens i Linköping i oktober markerade avslutningen på forskarskolan. I detta nummer återges konferensens avslutande föredrag, där Christer Bergsten ser forskarskolans verksamhet i ett perspektiv.

Inte bara i Sverige utan även i övriga Norden presenterades under 2006 många doktorsavhandlingar inom vårt område. Barbro Grevholm sammanfattar under rubriken *Doctoral theses in the Nordic countries – a rich year in mathematics education* innehållet i alla dessa arbeten.

Matematikdidaktiken har uppmärksammats vid flera lärosäten genom hedersdoktorat, senast vid Göteborgs universitet under hösten 2006 då Göran Emanuelsson promoverades till hedersdoktor. Vi uppmärksammar detta i medlemsbladet i artikeln *Hedersdoktorer i matematikens didaktik*.

/ Christer Bergsten

Några rader från...

I det förra medlemsbladet som kom i juni 2006 skrev jag om hur innehållsrikt året 2005 hade varit för matematikdidaktisk forskning. Om året 2006 kan man verkligen säga detsamma. Här i Sverige har minst tolv doktorander lagt fram och försvarat sin avhandling i matematikdidaktik och åtta av dem är inom forskarskolan i matematik med didaktisk inriktning. I våra grannländer har ytterligare nio disputerat inom detta område. Att så många avhandlingar i matematikdidaktik läggs fram under samma år har troligen inte hänt i Norden förut. Och det kanske dröjer innan detta rekord kan överskridas. Det är en effekt av att den svenska forskarskolan antog 21 doktorander samtidigt och att de beräknades vara klara under 2006. Nu blev inte alla det så därför kan vi vänta oss fler som blir klara de närmsta åren. I en separat artikel i detta medlemsblad presenterar jag kort de nämnda avhandlingarna.

Forscarskolan som varit finansierad huvudsakligen från Riksbankens Jubileumsfond och till en mindre del från Vetenskapsrådet har nu avslutat sin verksamhet. Det sista styrelsemötet hölls den 4 december 2006. De medel som finns kvar är öronmärkta för de kvarvarande doktoranderna och förvaltas vid Stockholms universitet. Den ansökan som lämnats av fem av institutionerna till Vetenskapsrådet för en fortsatt forskarskola fick inte stöd 2006. Det betyder troligen att inga nya doktorander antas. Vi får verkligen hoppas att de olika institutionerna finner vägar för att finansiera nya doktorander. Annars kanske detta blir en engångssatsning i Sverige utan fortsättning. Dock kommer de fem institutioner som sökte i fjol troligen att upprepa sin ansökan i april 2007. Det skäl VR anförde mot satsningen var att det redan finns en forskarskola i matematikdidaktik och det stämmer inte längre.

I de tre grannländerna Danmark, Finland och Norge finns en pågående forskarutbildning i matematikdidaktik. De två första har nationella forskarskolor och i Norge fungerar Høgskolen i Agder som en slags nationell forskarskola. Där finns för närvarande tjugo doktorander. Efter hand som de disputerar blir deras doktorandtjänster lediga för nya som kan antas. Så där kan vi hoppas på en kontinuerlig verksamhet.

SMDFs styrelse har tillsatt en programkommitté för nästa forskningsseminarium den 29-30 januari 2008, före matematikbiennalen i Stockholm. I gruppen ingår Christer Bergsten, Kirsti Hemmi, Katarina Kjellström, Tine Wedege och jag, som fungerar som ordförande. Gruppen har beslutat vilket tema seminariet ska

ha och en första inbjudan har sänts ut. Temat blir Perspektiv på matematisk kunskap, 'Perspectives on Mathematical Knowledge'. Inbjudan att sända in artiklar om forskning eller utvecklingsarbeten kommer som vanligt att gå ut. Du kan därför redan nu börja fundera på om du har något du vill presentera. Några internationella gäster kommer att medverka, bland annat Rosamund Sutherland, Eva Jablonka (nyttillträdd professor i matematik och lärande i Luleå), Anne Watson och John Mason. För att få mer information kan du följa planeringen på hemsidan för MADIF6: www.mai.liu.se/SMDF/madif6

Samtidigt som vi blickar framåt har vi också sett tillbaka och rapporterat det gångna årets verksamhet vid årsmötet, som ägde rum i anslutning till matematikbiennetten i Stockholm.

Ordföranden och vice ordföranden deltog i ett seminarium om handledning av doktorander i Magleås den 5-6 oktober 2006 samt i en workshop om forskning om användning av IKT i matematikundervisning den 23-24 november 2006 i Kristiansand tillsammans med flera andra medlemmar i SMDF. På det sättet stärks de nordiska kontakterna för SMDF. Föreningen har även presenterats vid andra konferenser, och seminarier av styrelsemedlemmarna. I dessa sammanhang visas alltid våra böcker och medlemsblad. De medlemsblad som delas ut och böcker i skriftserien som visas väcker stort intresse.

I samarbete med NCM har SMDF gjorts synlig vid Skolforum i Stockholm i november. Ordförande producerade en ny poster som presenterar SMDF och den trycktes upp av NCM och ställdes ut i samband med alla de föreningar som NCM samverkar med när det gäller matematikdidaktik.

I oktober genomfördes en jubileumskonferens i Linköping för att markera avslutningen av forskarskolan i matematikdidaktik. Där medverkade SMDFs ordförande och vice ordförande i den programkommitté som planerade och genomförde konferensen och de bidrog även till programmet tillsammans med flera andra medlemmar i SMDF.

Vid årsmötet 2007 avgick jag som ordförande efter att ha varit verksam i styrelsen för SMDF sedan starten 1999. Det har varit nio inspirerande och spännande år där matematikdidaktisk forskning i Sverige har genomgått en alldeles fascinerande utveckling. Jag vill gärna passa på att tacka alla kollegor i SMDF för mycket gott samarbete genom åren och för alla fina möten med olika människor i matematikdidaktiken som ni erbjudit mig. Mitt avslutande uppdrag i föreningen blir att leda arbetet med att planera och genomföra MADIF6.

Även Astrid Pettersson lämnade sitt uppdrag i styrelsen efter flera år. Två nya styrelsemedlemmar valdes in nämligen Peter Nyström och Tine Wedege. Vi

hälsar dem båda välkomna. Välkommen också till Christer Bergsten som återinträder som ordförande i föreningen.

Den 26-26 april 2007 ordnar SMDF i samarbete med den nordiska forskarskolan i matematikdidaktik en workshop om forskning om matematik och språk. Detta blir en uppföljning av den workshop som SMDF ordnade våren 2005. Ett flertal medlemmar kommer att delta och presentera från sin forskning.

Den 21-25 april 2008 kommer nästa nordiska konferens om matematikdidaktisk forskning att äga rum i Danmark, NORMA08. Det är den femte i raden av sådana konferenser. Programkommittén leds av Carl Winslöv och medlemmar från alla de nordiska länderna ingår i kommittén. Samma år kommer den elfte internationella konferensen om matematikdidaktik, ICME11 att äga rum i Mexico. Den 5-8 mars 2008 firas hundraårsjubileet av bildandet av ICMI, International Commission of Mathematics Instruction i Rom. Så det ser ut som om den matematikdidaktiska verksamheten är livligare än någonsin och det finns goda möjligheter för den som vill lära mer att delta i olika evenemang.

Väl mött på alla dessa olika aktiviteter och fora för matematikdidaktik hälsar

..... *Barbro Grevholm, avgående ordförande i SMDF*

Matematikdidaktikens vägar¹

Titeln till mitt inlägg inspirerades av boken *Matematikens vägar*, som många här säkert känner till, skriven av Lancelot Hogben. Den engelska originaltiteln var *Mathematics in the making* (för svensk översättning, se Hogben, 1962), och boken var en historisk bild av framväxten och en beskrivning av de grundläggande matematiska begrepp och metoder som nu används och undervisas om. När det gäller matematikdidaktikens vägar står vi snarare mitt i *the making* och kanske bidrar till framväxten av de matematikdidaktiska metoder och verktyg som i en framtida historiebok kommer att ses som grundläggande.

Men matematikdidaktiken har redan idag en historia, där en kritisk period var den s.k. nya matematiken, *new math*. En klassisk bok från den tiden har titeln "Why Johnny can't add" (Kline, 1973), en titel som blivit ett begrepp. Var det Håkan Lennerstad som ställde frågan igår på denna konferens om undervisningen har någon betydelse? Låt oss titta på ett avsnitt ur Morris Klines text.

Let us look into a modern mathematics classroom. The teacher asks, "Why is $2 + 3 = 3 + 2$?"

Unhesitatingly the students reply, "Because both equal 5"

No, reproves the teacher, the correct answer is because the commutative law of addition holds. Her next question is, Why is $9 + 2 = 11$?

Again the students respond at once: "9 and 1 are 10 and 1 more is 11."

"Wrong," the teacher exclaims. "The correct answer is that by the definition of 2, $9 + 2 = 9 + (1 + 1)$. But because the associative law of addition holds, $9 + (1 + 1) = (9 + 1) + 1$. Now $9 + 1$ is 10 by the definition of 10 and $10 + 1$ is 11 by the definition of 11."

It would seem that the poor children would deserve some relaxation after school, but parents anxious to know what progress their children are making also query them. One parent asked his eight-year-old child, "How much is $5 + 3$?" The answer he received was that $5 + 3 = 3 + 5$ by the commutative law. Flabbergasted, he re-phrased the question: "But how many apples are 5 apples and 3 apples?"

The child didn't quite understand that "and" means plus and so he asked, "Do you mean 5 apples plus 3 apples?"

¹ Denna text är grundad på den föreläsning författaren gav på Forskarskolans Jubileumskonferens, Linköping den 25-26 oktober 2006. Se hemsidan www.mai.liu.se/jubileumskonferens/

The parent hastened to say yes and waited expectantly. "Oh," said the child, "it doesn't matter whether you are talking about apples, pears or books; $5 + 3 = 3 + 5$ in every case."

Exemplet visar tydligt konsekvenserna av att reducera komplexiteten i situationer med lärande och undervisning. Trots den nya matematikens gigantiska misslyckande bidrog den ändå till att öppna ögonen för just denna komplexitet och kanske till och med initierade den moderna matematikdidaktiken som vetenskap.

Tillbaka till titeln, så är min ambitionsnivå idag betydligt mer anspråkslös än Hogbens. Dels tänker jag hålla mig till vägarna genom det *svenska* matematikdidaktiska landskapet, dels till forskning kopplat till *forskarutbildning*, med tanke på anledningen till att vi samlats här dom här två dagarna. Formuleringen i min titel innehåller en metafor, som ju inte bara är ett användbart redskap för den abstrakta tanken utan kanske också dess nödvändiga grund, som nyligen hävdats även med koppling till matematikens abstrakta begrepp och matematiskt tänkande. Jag tänker här på arbeten av framför allt Mark Johnson, George Lakoff och Rafael Nuñez. Personligen attraherades jag ganska tidigt av dessa vilket syns i en del jag skrev redan i början på 90-talet, så det finns en risk att jag även i fortsättningen använder vissa metaforiska formuleringar.

Jag tänker försöka ge en bild av några aspekter av forskarskolans betydelse för matematikdidaktikens utveckling i Sverige, både i kvantitativa och kvalitativa termer. Inte riktigt som en före-efter annons för en kommersiell produkt, särskilt som vi inte än vet något om efter, men genom att spekulera kanske man i viss grad också kan initiera att det drar åt det hållet, vem vet?

Det en forskarskola direkt producerar är, kan man förenklat säga, två saker – *avhandlingar* och *forskare*. Detta sker genom att forskarskolans doktorander och handledare (och andra berörda) bedriver kurs- och forskningsverksamhet. Indirekt påverkar förstås verksamheten utveckling av forskningsmiljöer och forskningens resultat utbildningspraktik (får man hoppas) och annat. Men om vi koncentrerar oss på dessa två produkter, avhandlingar och forskare, så placerar de sig någonstans i det matematikdidaktiska landskapet, slår kanske in på någon eller några av dess vägar, eller öppnar/bygger kanske helt nya. Landskapet förändras. En relevant fråga en dag som denna är då hur forskarskolan har påverkats av och påverkat det svenska matematikdidaktiska landskapet. Detta har rimligen både kvalitativa och kvantitativa aspekter. Låt mig börja med det enklaste, att kvantitativt räkna frekvenser mot bakgrund av en tidsaxel, och sedan successivt glida över till det kvalitativa.

För räkningen krävs kriterier, vilka avhandlingar ska räknas med? Om vi håller oss till den definition av matematikens didaktik som Gerd tog upp för en timme sedan, den som finns i Niss (2001), så kan vi med plus minus något epsilon använda den lista som sammanställts på NCM:s hemsida, som idag innehåller nära 60 svenska doktorsavhandlingar. Men låt oss först uppehålla oss en kort stund vid identitetsfrågan, vad finns i det matematikdidaktiska landskapet?

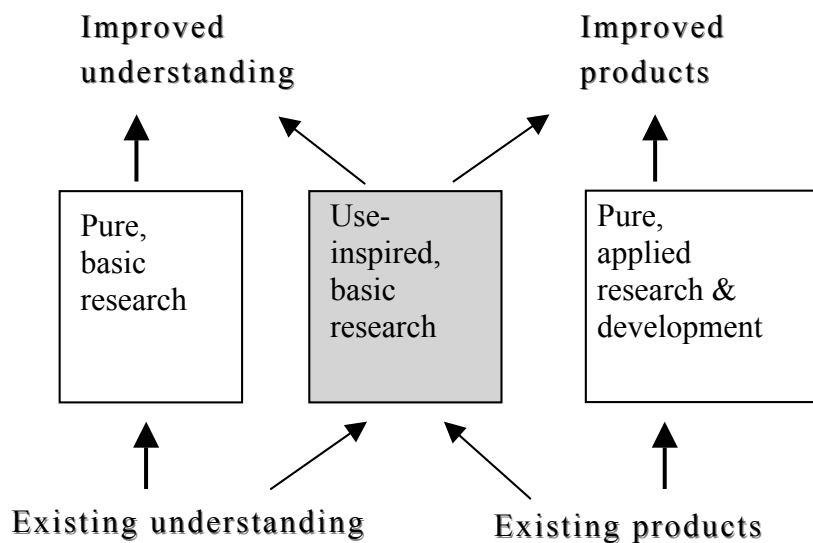
- *Studieobjekt.* Matematikens didaktik utgör det vetenskapliga arbetsfält där man försöker *identifiera, beskriva* och *förstå* företeelser och processer som är eller skulle kunna vara en del av *undervisning och lärande när det gäller matematik på alla nivåer i utbildningssystemet.*
- *Strävan* – När det gäller förståelse av dessa företeelser och processer, är det centrala syftet i verksamheten att visa på och *klargöra orsakssamband* och *orsaksmekanismer*
- *Ingångar.* ... samtliga förhållanden som är av betydelse för undervisning och lärande i matematik oberoende av vilka aspekter det berör, använder sig av idéer, metoder och resultat från andra ämnesområden när relevant
- *Aktiviteter.* ... Teoretisk/empirisk grundforskning, tillämpad forskning, systematisk reflekterande praxis

Förutom dessa fyra aspekter av definitionen diskuterar Mogens även

- forskningens syfte, där områdets *dubbla natur* är en central del av dess identitet och en kritisk punkt utifrån didaktikens grundläggande koppling till matematikbildningens praktik.

kan koppla detta till följande dynamiska modell för forskning inom matematikens didaktik (se figur 1), som integrerar vad som brukar kallas ren respektive tillämpad forskning.

En annan central aspekt är fältets ofrånkomliga *komplexitet* (tänk t.ex. på Anna Sierpinskias studie om frustration som presenterades vid denna konferens), som griper in i varje lärande- eller undervisningssituation som studeras. De svar som kan ges på genuina frågor om lärande och undervisning förblir partiella, modeller grundade på de forskningsperspektiv och metoder som väljs för att undersöka fenomenet. Ur vetenskapsteoretisk synvinkel är det vanligt att peka på olikheterna mellan naturvetenskaplig forskning och samhällsvetenskaplig men ett gemensamt mål är en strävan att utveckla teorier eller modeller av de fenomen som utgör forskningens objekt. Lester (2005) skriver t.ex. att "Educational research is a process of modeling educational processes" (s. 463).



Figur 1. En dynamisk modell för matematikdidaktisk forskning (Lester, 2005).

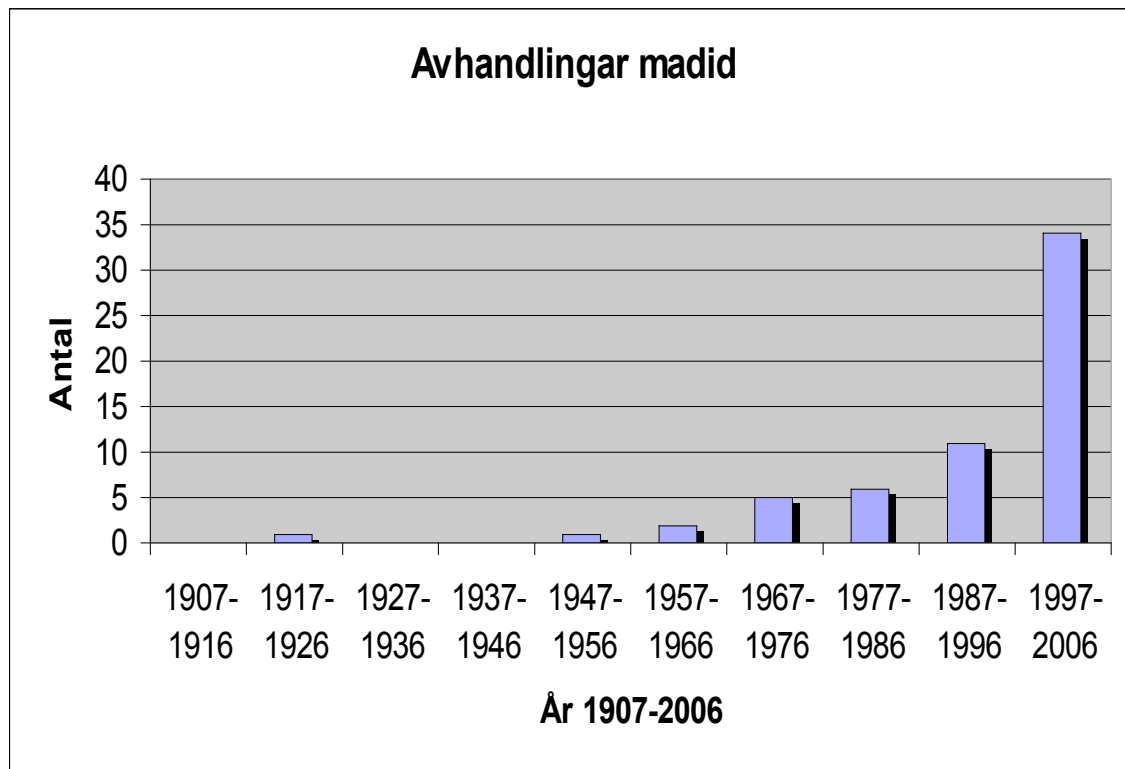
En annan central aspekt är fältets ofrånkomliga *komplexitet* (jfr. Anna Sierpinskias studie om frustration som presenterades vid denna konferens), som griper in i varje lärande- eller undervisningssituation som studeras. De svar som kan ges på genuina frågor om lärande och undervisning förblir partiella, modeller grundade på de forskningsperspektiv och metoder som väljs för att undersöka fenomenet. Ur vetenskapsteoretisk synvinkel är det vanligt att peka på olikheterna mellan naturvetenskaplig forskning och samhällsvetenskaplig men ett gemensamt mål är en strävan att utveckla teorier eller modeller av de fenomen som utgör forskningens objekt. Lester (2005) skriver t.ex. att "Educational research is a process of modeling educational processes" (s. 463).

Lester skiljer mellan *teoretiska*, *praktiska* och *konceptuella* forskningsperspektiv där det senare försöker kombinera de starka sidorna hos de förra och undvika deras enskilda svagheter genom att kombinera teorier och begrepp från olika håll relativt de krav som kontexten ställer. Vad som slutligen avgör styrkan i ett forskningsresultat är, enligt Lester, inte dess förklarande kraft och relevans utan dess grund, eller enkelt uttryckt - håller slutsatserna? Ett annat avgörande kriterium är forskningens konsekvenser, som naturligtvis berör både ökad kunskap/förståelse och användbarhet (som grund för utbildningsplanering), men även frågan om konsekvenserna är etiskt försvarbara.

Bland olika teoretiska ingångar kan vi skilja mellan till exempel *kognitiva*, *sociala* och *epistemologiska*. Det handlar då om hur man avgränsar sitt forskningsobjekt, hur man identifierar det fenomen man studerar och vad man

betraktar som minsta möjliga förklaringsenhet för att modellera komplexiteten i fenomenet.

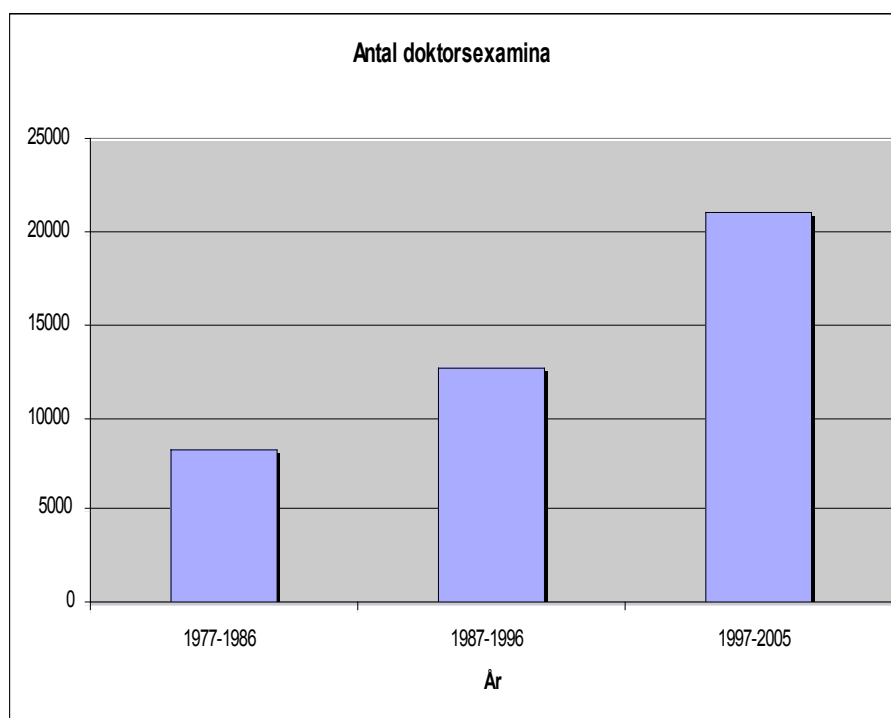
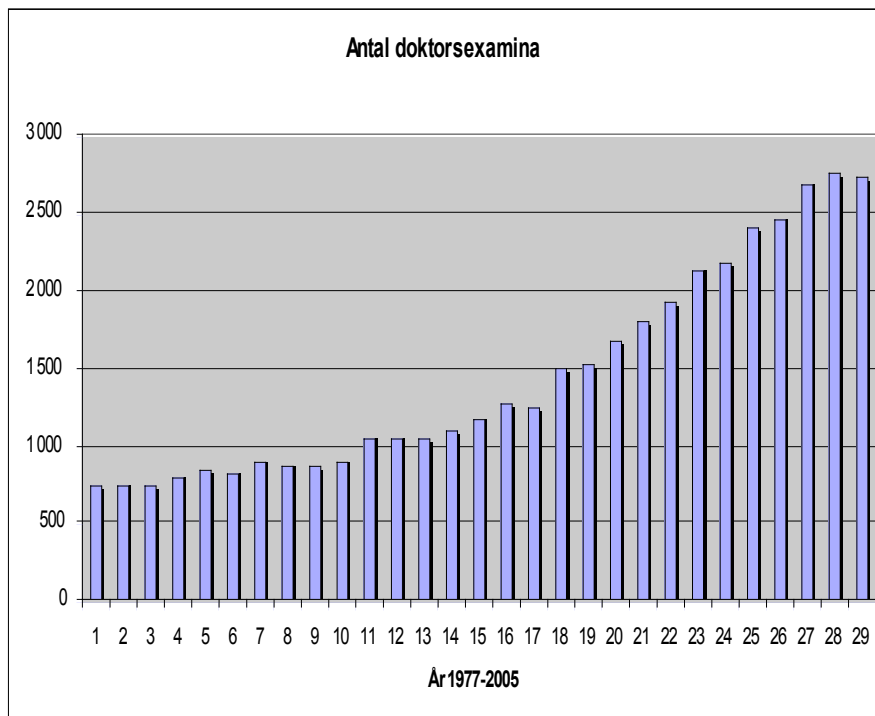
Låt oss nu börja räkna. Med en tidsaxel som startar 1907 får vi följande decennieindelade histogram över antal svenska avhandlingar inom det matematikdidaktiska området (figur 2; jag har här räknat in tre disputationer som ska ske i december 2006).



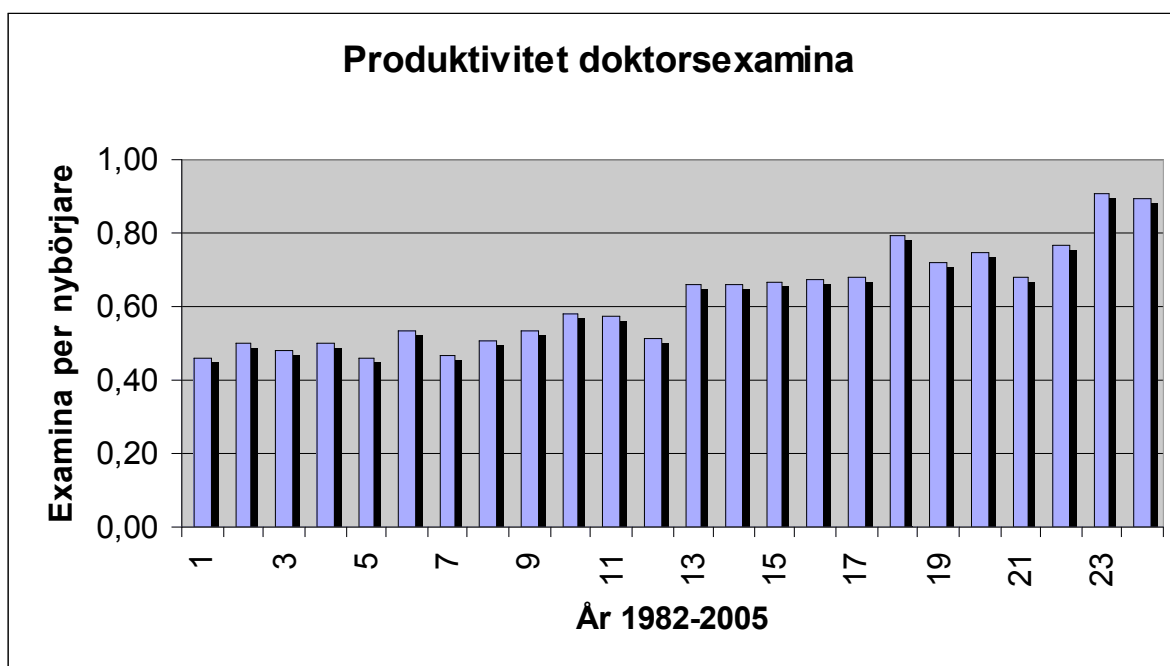
Figur 2. Antal doktorsavhandlingar inom svensk matematikdidaktisk forskning.

Då forskarskolans period helt ingår i senaste (pågående) decenniet där är det enkelt att få en visuell bild av det kvantitativa bidraget från forskarskolan (dra bort!). Man kan också räkna med en komplettering med kanske 5 till från forskarskolan det närmaste året. Man kan utifrån denna enkla tabell lugnt påstå att intresset på akademisk nivå av forskning om matematikutbildning varit endast sporadiskt fram till dom senaste två decennierna och att den procentuellt sett stora ökningen under 1990-talet fortsatt under 2000-talets första 7 år även utan forskarskolan trots att den svarat för ca en tredjedel hittills. Inte mindre än 45% av alla svenska avhandlingar inom området har producerats de senaste 7 åren och 73% från och med 1990. Innan man drar alltför stora växlar på detta fenomen kan det finnas skäl att se på följande tabellen i figur 3. Det har alltså varit en generell kraftig ökning av forskarutbildningens output som helhet,

delvis på utbildningspolitiska grunder. Antalet doktorander har inte ökat lika markant som antalet doktorsexamina, utan det är produktiviteten som stärkts (se figur 4), möjligen beroende på förändrade finansieringsformer för doktorander.



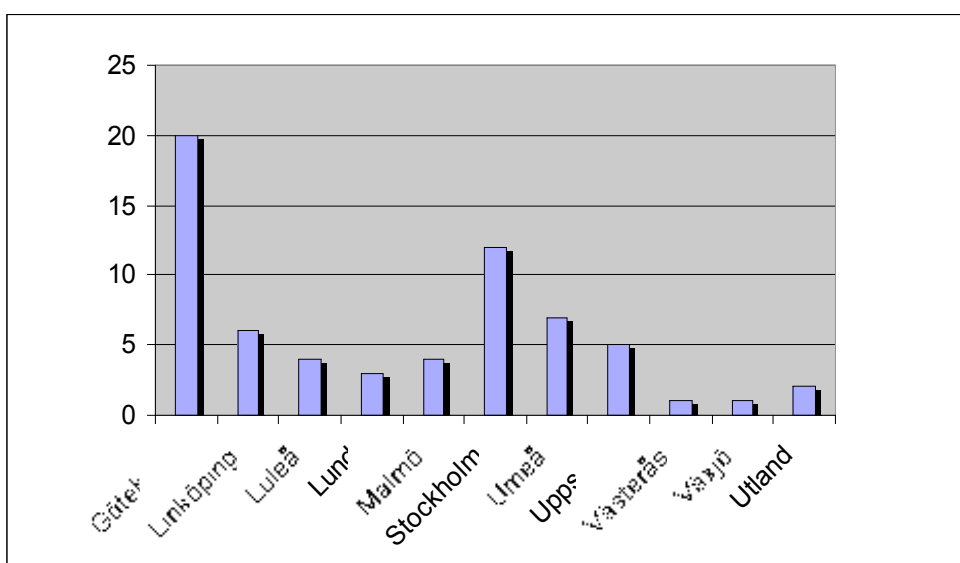
Figur 3. Antal doktorsexamina vid svenska lärosäten år 1977-2005 (källa: SCB)



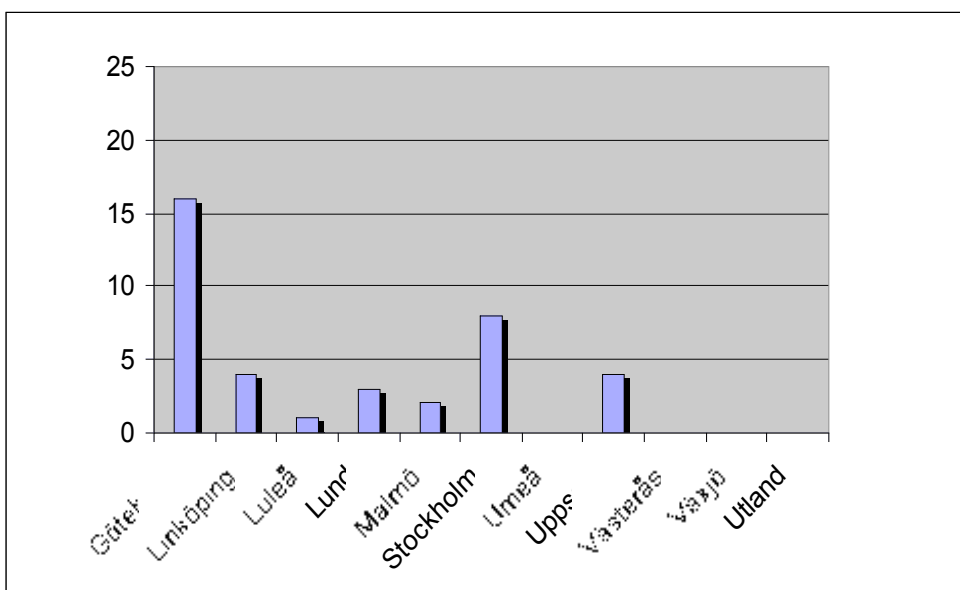
Figur 4. Produktivitet av doktorsexamina vid svenska lärosäten år 1982-2005 (källa: SCB)

Man kan ändå säga att det matematikdidaktiska området utmärker sig genom den för ett land av Sveriges storlek anmärkningsvärt låga akademiska produktionen fram till år 2000, ett "missförhållande" som också Ole Björkqvist (2003) pekade på i sin bild av svensk matematikdidaktisk forskning.

En bild av utvecklingen ges också genom att granska de olika forskningsmiljöerna. Ser vi på alla avhandlingar dominerar Göteborg scenen, med dess starka fenomenografiska tradition, och Stockholm (figur 5a; bokstavsordning, staplar utan namn ska vara Lund, Stockholm, Uppsala och Örebro). Jämför man denna bild med den man får om man ser på tiden före år 2000 framgår tydligt hur nya miljöer växt fram (figur 5b). Ur denna aspekt har det matematikdidaktiska landskapet blivit rikare och mer mångfacetterat. Det är också huvudsakligen vid dessa nya miljöer som matematiska institutioner är aktivt involverade, som en konsekvens av att forskarskolan startade.



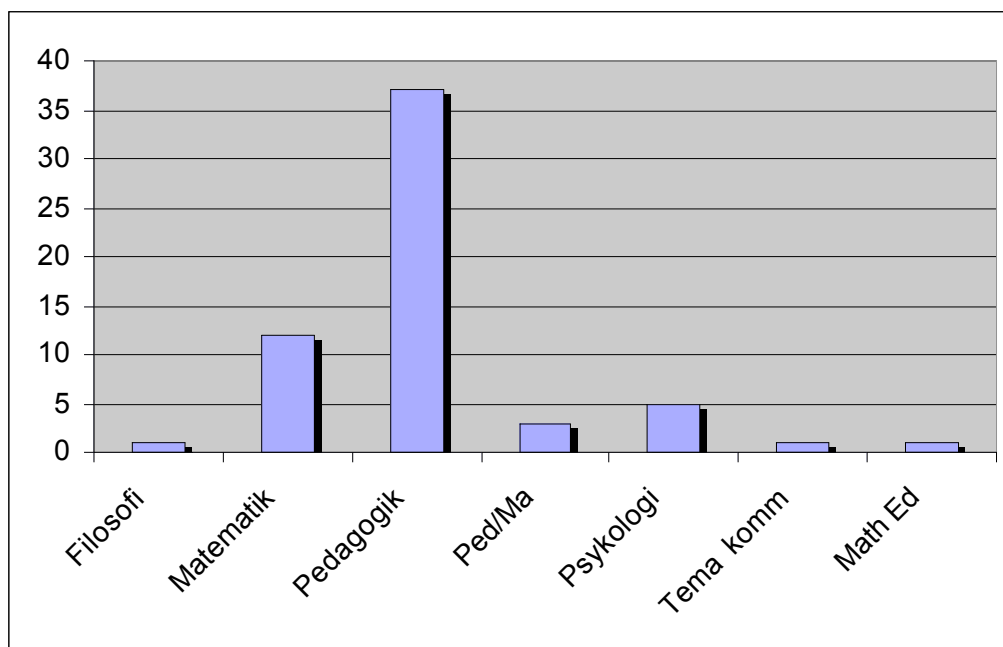
Figur 5a. Antal doktorsexamina inom matematikens didaktik vid svenska lärosäten.



Figur 5b. Antal doktorsexamina inom matematikens didaktik vid svenska lärosäten före 2000.

Vad som utmärker "vår" forskarskola är bland annat denna koppling till ämnesinstitutioner som kompletterar den forskning som bedrivs vid pedagogiska institutioner och lärarutbildningar. Det kan därför vara intressant att se på fördelningen mellan de ämnesområden som avhandlingarna "tillhör" (se figur 6). Vi kan notera här att samtliga 13 avhandlingar som gjorts inom matematik-

ämnet är från de senaste 10 åren, varav 8 inom forskarskolan detta år. Tillsammans med Ped/Ma-kategorin² utgör avhandlingarna med en potentiell extra ”matematisk komponent” jämfört med de rent pedagogikbaserade avhandlingarna cirka en tredjedel av avhandlingarna från och med 1990.



Figur 6. Ämnesområden för svenska avhandlingar inom matematikens didaktik.

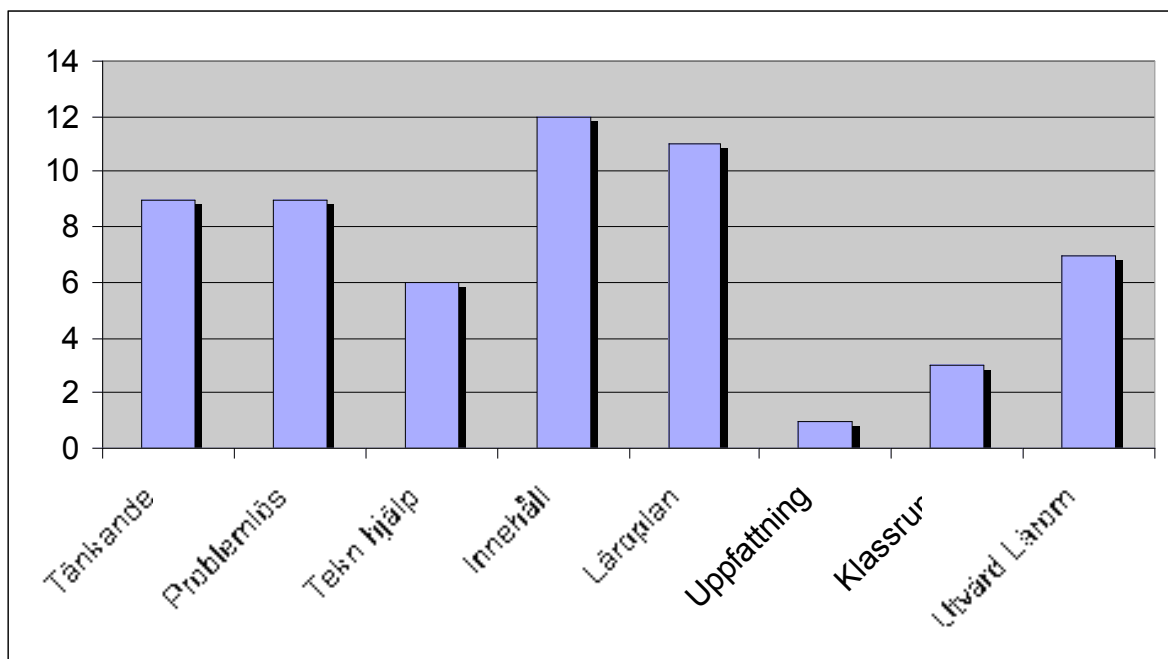
En intressant fråga i detta sammanhang är vilken innebörd som kan läggas i uttrycket en matematikdidaktiskt orienterad avhandling *har en stark matematisk komponent*. Denna problematik nämns av Ole Skovsmose i hans utvärdering av forskarskolans licentiatavhandlingar (Skovsmose, 2006). Han menar att detta kunde ha diskuterats mer explicit inom forskarskolan och att det kommer till uttryck kanske endast inom de matematikhistoriskt inriktade avhandlingarna. En annan väg i denna riktning är det epistemologiska perspektiv som finns representerat framför allt inom den franska forskningen (se mer om detta nedan).

Det finns många olika sätt att kategorisera forskningsobjektet och Gerd Brandell presenterade här en konstruktiv och överskådlig modell baserad på den didaktiska triangeln och dess kontexter på olika nivåer, alltså ett på förhand givet teoretiskt raster inom vilket avhandlingarna passas in. Ett alternativt sätt är att lista olika typer av observerade kategorier som t.ex. Björkqvist (2003):

² Ped/Ma står för den examen som benämns ”Pedagogik med ämnesdidaktisk inriktning”, med hälften av ämnesstudierna i forskarutbildningen i pedagogik och hälften i ett ämne som t.ex. matematik.

- Differentierande och integrerande åtgärder
- Effekt av ny teknologi
- Matematiska ”övertygelser” (beliefs)
- Interaktion i klassrum
- Matematisk kommunikation
- Talförståelse och symbolförståelse
- Problemlösning
- Effekter av kontexter, situerat lärande
- Anpassning läroplan, undervisning, utvärdering

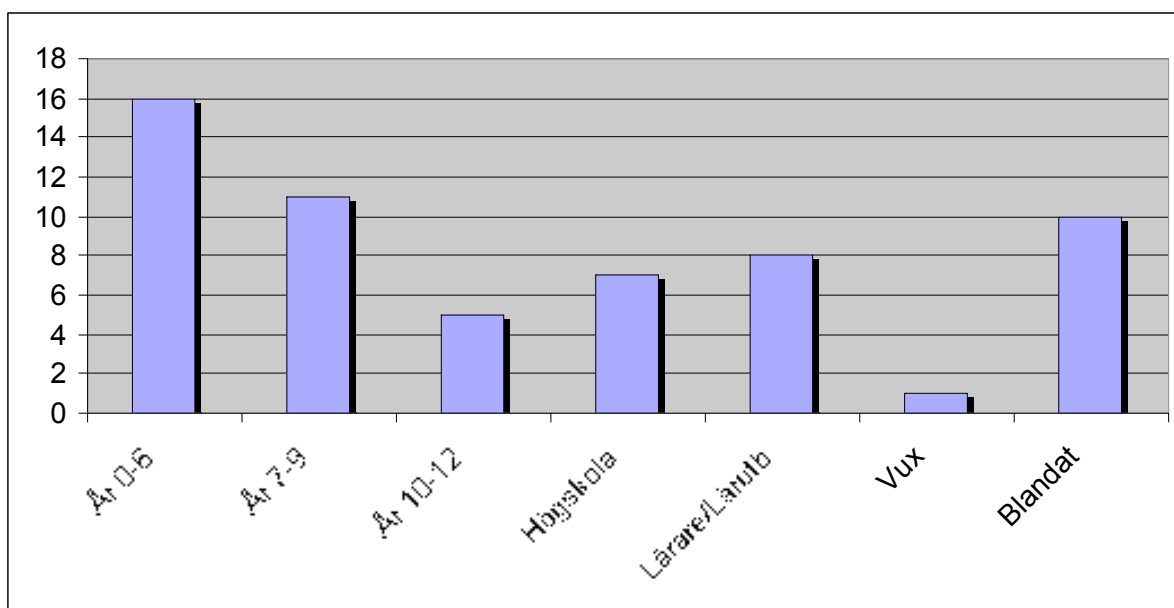
Dessa låter sig dock ganska enkelt placeras i Gerd Brandells schema, utom möjligen ”beliefs”, som kan handla om elevens relation till matematik (alltså den a-didaktiska axeln) men också allmänna uppfattningar om att gå i skola och vara elev. För de kategorier som jag själv identifierade i de 60 avhandlingar jag (översiktligt) tittade på gäller detsamma (figur 7; staplarna utan namn står för ”Uppfattning” resp. ”Klassrum”).



Figur 7. Huvudfokus inom svenska avhandlingar inom matematikens didaktik.

Ofta rör sig en avhandling över flera av dessa fält men jag valde i min räkning endast ett som jag bedömde som huvudfokus. Vi kan konstatera att den kategori som Björkqvist (2003), liksom även jag själv tidigare (Bergsten, 2002), pekade på som en brist, dvs. didaktisk forskning kring matematiska innehållsområden,

fått en förstärkning genom forskarskolan. Det är något som kan och borde förväntas med den starka förankring i matematik som är en medveten satsning för forskarskolan. För svensk matematikutbildning dokumenterat särskilt svaga områden som geometri och algebra syns dock ännu inte så tydligt i forskarskolans doktorsavhandlingar men väl flera licentiatarbeten både inom och utom forskarskolan och pågående doktorsarbeten. Bristen kvarstår ändå när det gäller dessa områden på grundskolenivå. Det skolstadium som stått i fokus i de olika avhandlingarna ses i figur 8 (de högra staplarna står för "Vux" resp. "Blandat").



Figur 8. Utbildningsstadium inom svenska avhandlingar inom matematikens didaktik.

Låt oss titta på en sammanställning av områden och skolstadium (figur 9). Bilden är delvis ofullständig då jag valt att identifiera endast ett huvudfokus per avhandling. Tendensen i forskarskolans placering – matematiskt innehållsorienterat, senare skolstadier, samt teoretisk och metodisk spännvidd – förstärks om man inkluderar licentiat- och pågående arbeten. Men rent allmänt bekräftar tabellen återigen att den svenska forskningen i matematikdidaktik i form av doktorsavhandlingar fortfarande är anmärkningsvärt sparsam – här finns att göra för framtida forskarskolor!

	Tänkande	Probl. lösning	Tekn. Hjälpn.	Innehåll	Läroplan	Uppfattning	Klassrum	Läro-Medel/Bedömn.
0-6	2	3	2	6	1	0	0	1
7-9	2	1	1	1*	2	0	2	2
10-12	1	1	1	1	0	0	0	1
Högskola	3	0	0	2**	1	0	0	1*
Lär/Lärutb	0	1*	2	2*	1	1	1	0
Vux	0	0	0	0	0	0	1	0
Blandat	1	0	0	0	5	0	0	2**

Figur 9. Antal svenska avhandlingar inom matematikens didaktik per utbildningsstadium och huvudfokus. Stjärnorna markerar forskarskolans avhandlingar.

När det gäller just teoretiska och metodologiska aspekter har dom ju för forskarskolans del redan belysts dessa dagar. Att göra en genomgång av alla 60 svenska avhandlingar ur dess aspekter har inte varit möjligt. Jag nöjer mig med att konstatera att de åtta doktorsavhandlingar inom forskarskolan som presenterats och diskuterats dessa två dagar uppvisar en stor spännvidd här och i vissa fall ett teoretiskt förankrat metodologisk utvecklingsarbete. Det finns dock en potentiell risk med sammanläggningsavhandlingar inom didaktisk forskning att, på grund av det begränsade utrymmet i konferensrapporter och (i mindre mån) tidskriftsartiklar, den teoretiska och metodologiska diskussionen görs översiktlig och därmed mer ytlig än man kan förvänta sig i ett doktorsarbete, i de fall den inte är ett huvudsyfte i rapporten. Vi kan också konstatera att vissa internationellt sett starka teoretiska perspektiv är underrepresenterade i svensk forskning inom vårt område:

- Det *epistemologiska* perspektivet har den matematiska kunskapens innehåll, organisation och institutionella förankring som utgångspunkt. Centrala begrepp är didaktisk transposition (Chevallard, 1985; se även Bosch & Gascon, 2006), didaktisk situation och didaktiskt kontrakt (Brousseau, 1997).
- Den *semiotiska* ansatsen har sina rötter i filosofer som Kant, de Saussure och Peirce och fokuserar på uttryck och mening. Inom modern matematikdidaktik företräds perspektivet av t.ex. Raymond Duval, Michael

Hoffman, Norma Presmeg, Luis Radford och Heinz Steinbring (se t.ex. Saenz-Ludlow & Presmeg, 2006).

- Med rötter hos de sovjetiska psykologerna Vygotsky och Leontiev har *verksamhetsteorin* ('activity theory') vidareutvecklats av t.ex. Engeström (1987) och använts inom bland annat tysk matematikdidaktik.
- Inom social och symbolisk interaktionism utgår man ofta från Vygotskys sociokulturella ansats där lärande inte kan isoleras från den sociala kontexten i vid mening (se t.ex. Yackel et al., 2000).
- *Uppfattningar* om och *attityder* till matematik och lärande och kunnande i matematik ('beliefs') har fått allt större uppmärksamhet internationellt (se t.ex. Pehkonen, 2001) men har i svenska undersökningar hittills mer observerats än analyserats.

Det teoretiska perspektivets innebörd och funktion ser jag som central för en stark utveckling av det matematikdidaktiska forskningsfältet. Det handlar bland annat om frågor om vad som styr valet av teoretisk ansats och en medvetenhet om konsekvenser av dessa val. Internationellt har denna diskussion stärkts på senare år (se t.ex. Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2006).

Åter till dom två direkta *produkterna* från forskarskolan, dvs. avhandlingar och forskare. Jämfört med den historiska bild som gavs i Bergsten (2002) och Björkqvist (2003) – ofta isolerade utvecklingsprojekt med otydlig progression, fåtal starka men ofta isolerade enskilda forskare, en bestående stark linje har varit utvärdering och bedömning, stark skolförankring och en koppling till pedagogikämnet – kan nya vägar i framtidens svenska matematikdidaktik förutspås:

- Större internationell förankring (det gäller konferenser, kontakter och publicering när det gäller forskaren, och för avhandlingar tydligare kopplingar till internationell forskning och större tillgänglighet då engelska dominerar – av de 60 avhandlingarna är ca hälften på svenska och hälften på engelska, av forskarskolans hittills 8 avhandlingar är 7 på engelska).
- Större spännvidd (tillsammans med den pedagogiskt baserade forskningen) när det gäller forskningens objekt – skolstadium, övergripande läroplansrelaterade frågeställningar, fördjupad begreppsanalys, teoretiska perspektiv.

- Större potential till fördjupad utveckling och påverkan genom den låga medelåldern vid disputation jämfört med traditionen inom pedagogikämnet (förutsatt att man hittar en position att verka i). Redan nu verkar dom nyblivna doktorerna inom olika typer av institutioner där dom kan få stort inflytande på utvecklingen av matematikutbildningen i Sverige.

Det finns också problem och kritiska frågor som kräver en öppen diskussion, till exempel:

- Balansen och kopplingen mellan en matematiskt respektive en pedagogiskt förankrad matematikdidaktik: samförstånd/samarbete eller missförstånd?
- Från matematikpedagoger till matematikdidaktiker – är det en bra utveckling? Konsekvenser för praktiken? Hur är detta kopplat till det ofta uttalade målet att undervisa i matematik på vetenskaplig grund, och till uttrycket den professionella läraren?

För att avsluta där jag började, med metaforen i titeln, kan vi beskriva matematikdidaktikens vägar genom bilden av en ganska obetydlig väg som dyker upp någonstans i det förflutna men som så småningom breder ut sig alltmer. Vi har sett vad som bidragit till denna breddning – en tillväxt när det gäller forskningens aktörer, miljöer, objekt, teoretiska perspektiv och metoder, kanske också dess utgångspunkter och konsekvenser. Dessa senare förtjänar att uppmärksammas extra då det där inte bara finns möjligheter utan kanske också döljer sig risker. Det handlar om matematikdidaktikens *dubbla natur*, denna kombination av *logos* och *praxis*, som nämndes dels i samband med Niss definition av matematikens didaktik, dels i Lesters dynamiska modell av forskningen. Det är vårt områdes val om de matematikdidaktiska vägarna leder in i ett ingenmansland eller kan bli en genererande kraft, och därmed även forskarskolan, i en positiv utveckling av matematikutbildning, både i ett svenskt och internationellt perspektiv.

Referenser

- Bergsten, C. (2002). Faces of Swedish research in mathematics education. In C. Bergsten, G. Dahland & B. Grevholm (Eds.), *Research and action in the mathematics classroom. Proceedings of Madif 2* (pp. 21-36). Linköping: SMDF.
- Bikner-Ahsbabs, A. & Prediger, S.: 2006, 'Diversity of theories in mathematics education – How can we deal with it?', *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik* 38(1), 52-57.

- Björkqvist, O. (2003). Mathematics education in Sweden: A review of research and developmental work. In C. Bergsten & B. Grevholm (Eds.), *Challenges in mathematics education. Proceedings of Madif 3* (pp. 7-14). Linköping: SMDF.
- Bosch, M. & Gascon, J. (2006). Twenty-five years of didactic transposition. *ICMI Bulletin No. 58, June 2006* (pp. 51-65). International Commission of Mathematical Instruction.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16.
- Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding. An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-kons.
- Hogben, L. (1962). *Matematikens vägar*. Stockholm: Forum.
- Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: The failure of the New Mathematics*. St. Martin's Press.
- Lester, F. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 37*, 457-467.
- Niss, M. (2001). Den matematikdidaktiska forskningen karaktär och status. I B. Grevholm (red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* (s. 21-47). Lund: Studentlitteratur.
- Pehkonen, E. (2001). Lärares och elevers uppfattningar som en dold faktor i matematikundervisningen. I B. Grevholm (red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* (s. 230-253). Lund: Studentlitteratur.
- Saenz-Ludlow, A. & Presmeg, N. (2006). Guest editorial: Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 1-10.
- Skovsmose, O. (2006). Graduate school in mathematics education. *Research Reports in Mathematics Education, No. 1, 2006*. Matematiska institutionen, Umeå universitet.
- Yackel, E., Cobb, P. & McClain, K. (Eds.) (2000). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Doctoral theses in the Nordic countries in 2006 – a rich year in mathematics education

In SMDF Newsletter we have tried to present regularly short presentations of Swedish theses in mathematics education, as they have come to our knowledge. During the year 2006 this task has grown substantially as we have found at least twenty one dissertations in mathematics education in the Nordic countries. Twelve of them are from Sweden and from them eight are from the Swedish Graduate School. This high level of production will probably not be seen again for some time. One contributing factor is of course that all the 21 doctoral students in the Swedish Graduate School started at the same time and were supposed to finish during 2006. The short presentations are intended to be appetizers and we hope that your curiosity will wake up and take you to a closer reading of the theses. Such a short paragraph as we give here can of course not do justice to work that has taken several years and comprise several hundreds of pages. Thus we recommend you to investigate the theses further.

Morten Misfeldt defended his dissertation in January at the Danish University of Education. The title is *Mathematical writing* and it consist of a monograph, where all chapters except two build on earlier published work or work in progress (17 titles), such as one journal paper, 5 reviewed conference presentations, 3 book chapters and some other publications. The subject of the thesis is mathematical writing and how various technologies support such an activity. It consists if an empirical and a theoretical part. One of the main theoretical results is the attempt to view that mathematical writing process simultaneously as a creative writing process and as a mathematical problem-solving process.

Kristin Bjarnardottir defended her thesis at Roskilde University Center in February. Her thesis carries the title *Mathematical education in Iceland in a historical context of socio-economic demands and influences*. Her data consists of historical documents from the development of school mathematics in Iceland and her dissertation is a monograph. The thesis consists of three parts and examines the history of mathematical education in Iceland and its position in comparison to its neighbouring countries. Mathematics education in Iceland differs primarily form its neighbours in the absence of demand for furthering higher mathematical education, nearly total dominance of a few institutions, and initiatives of individuals.

In March Iris Attorps defended her dissertation *Mathematics teachers' conceptions about equations* at the University of Helsinki. Her work is a monograph (a thick one with 231 pages). The aim of the study is to describe and clarify the mathematics teachers' subject matter and pedagogical content conceptions about equations. The research results show that some of the teachers do not have a clear conception of what the pupils should attain in algebra at compulsory school. Both expert and novice teachers have various apprehensions of the pupils' difficulties concerning equations.

Kristina Juter defended her dissertation in the beginning of April at Kristianstad University. The thesis comprises six published papers and an extended summary binding them together (referred 'kappa' in Swedish). The title of her work is *Limits of functions – University students' concept development*. She followed university students during their first course of tertiary mathematics and inquired into their development of the limit concept. One of her results is that many students complete basic courses in calculus without ever understanding the notion of limits. Kristina Juter interprets her findings to argue that connectedness and continuity are essential features of teaching and learning limits to prevent students from failing.

Lil Engström carried out her defence later in April and the work is called *Möjligheter till lärande i matematik* (Opportunities to learn mathematics). It is a monograph, written in Swedish and as Attorps' a thick one (238 pages). The study examines how teachers formulate mathematical problems, how they use the experiences students have gained and what use they make of the software's potential. One result is that the teachers' ability to pose thought-provoking open-ended problems is the most important factor as it significantly influences what the students learn.

Mette Andresen defended her dissertation on *Taking advantage of computer use for increased flexibility of mathematical conceptions* in Mid May at the Danish University of Pedagogy. Mette Andresen's study is part of a larger project in Denmark called World Class Math & Science. In a sub project each student had a laptop at her disposal with computer algebra software. Participants gained the experience that computer use in upper secondary school mathematics has a potential. Mette studied: "How could these potentials be captured and conceptualised?" Her later question became: "Is flexibility a supportive construct for articulation of experiences of teaching and learning within a modelling

approach? Is it useful for realisation of the learning potential of students' concept formation?" The methods can be described as an interpretative approach teaching experiment design with classroom observations in four schools, video recordings and field notes.

Gunnar Sjöberg defended his dissertation at Umeå University in the Graduate School of Pedagogical work. The title is *Om det inte är dyskalkyli – vad är det då?* (If it is not dyscalculia – what is it then?). He has investigated the concept of dyscalculia in the research literature and finds that it is an ill-defined or not defined concept. The pupils he has followed from year five in school to upper secondary school were said to be in mathematics problems but many of them succeeded later in the subject. One crucial factor seems to be the short time these pupils spend on mathematics learning, often less than half an hour per school week. Compulsory school mathematics teachers will find interesting interviews in this work, with pupils' comments that have much to say to them.

Monica Johansson wrote about *Teaching mathematics with textbooks – A classroom and curricular perspective*. She defended her work in June at Luleå University of Technology. The dissertation consists of four papers and a preamble and the focus of all the parts is the relationship between the textbook and the curriculum. She shows that the textbook influences not only what kind of tasks students are working with during the lessons, but also the examples the teacher presents on the board, what kind of concepts are introduced and how they are introduced. The teacher can get into problems because of too much reliance on the textbook. The study shows the relative autonomy of the mathematics teacher in relation to the most common teaching tool in Swedish classrooms - the textbook.

Örjan Hansson is also a member of the Swedish Graduate School in Mathematics Education, as is Monica, and he defended his dissertation the day after Monica at the same university. The work carries the title *Studying the views of pre-service teachers on the concept of function*. His work consists of five papers and an overview that binds the work together. Three different groups of pre-service teachers for year 4-9 in mathematics and science have been his informants. He has used questionnaires, concept maps, and interviews in order to understand and analyse how they perceive the concept of function. The concept of function is rarely a well integrated concept and the pre-service teachers' view of the concept is represented by a less developed knowledge

structure than one could wish for a prospective teacher. Thus there are many implications for the teaching of pre-service teachers.

On the same day as Örjan, Maria Bjerneby-Häll defended her thesis at Linköping University with the title: *Allt har förändrats och allt är sig likt: En longitudinell studie av argument för grundskolans matematikundervisning* (Everything has changed and all remains the same – a longitudinal study of arguments for mathematics teaching in compulsory school). The aim of this thesis is to describe and analyse arguments for mathematics in compulsory school and to understand why and how the official arguments change. The point of departure is that the conditions and the reality for school mathematics can be understood through an analysis of official arguments and of personal arguments given by teacher students and teachers. A group of teacher students has been followed during their education and the first three years after their professional debut. The result shows that during their education the teacher students develop a view on mathematics and mathematics education harmonizing with the goals of mathematics in the national syllabus. The novice teachers experience quite different conditions when they start to work as teachers. Preparing the pupils for the national test becomes the most important goal for the novice teachers. A factor influencing the mathematics teacher is the qualification requirement in mathematics from compulsory school to go into the national programs in the upper secondary school. The novice teachers experience a conflict between different goals in the national curriculum and course syllabus for mathematics.

Andreas Ryve's dissertation took place at Mälardalen University in the end of June with Anna Sfard as opponent. The title is *Approaching mathematical discourse. Two analytical frameworks and their relation to problem solving interactions*. His main aim of the study is to investigate how conceptual understanding and problem solving can become a natural part of mathematics teaching and thus of students' mathematical knowledge construction. He wants to characterize the classroom discourse in two different problem solving courses in teacher education and also to investigate and further develop two analytical frameworks – a communicational approach and a dialogical approach used to study mathematical discourses. He shows that the classroom discourse can be characterized in terms of subject oriented, didactically oriented and problem solving oriented discourses. The analytical frameworks are further developed in his study.

At Ålborg University Lene Østergaard Johansen defended her thesis *Hvorfor skal voksne tilbydes undervisning i matematik? – en diskursanalytisk tilgang til begrundelsesproblemet* (Why should adults be offered teaching in mathematics? – a discourse-analytical approach to the problem of justification). She claims that justification for mathematics teaching is rarely explicit and only on specific events can we get access to the real reasons for why a decided group of students are offered mathematics. She has chosen to answer the question by analysing the development of preparatory mathematics teaching for adults (FVU), which was introduced by a Danish reform in 1999. Lene differs analytically between three discourses: The political discourse, The planning of teaching persons' discourse and The mathematics teachers' discourse. In her thesis she develops a framework for analysing the explicit and implicit justifications. Although there are common explicit justifications in the system, her analyses show that there are conflicting implicit justifications. These conflicting justifications build upon different views of human beings, different views of mathematics knowledge and skills and of mathematics learning.

Kirsti Hemmi at Stockholm University defended her thesis *Approaching proof in a community of mathematical practice*. Her aim is to describe how students encounter proof in a community of mathematical practice at a mathematics department and how they are drawn to share mathematicians' views and knowledge of proof. She tries to combine socio-cultural theories, social practice theories and theories about proof into a framework for understanding and describing the diversity of the culture which involves the complex notion of proof. Students felt that they were confronted with proofs from the beginning of their studies. Proof was there as a mysterious artefact and many aspects of proof remained invisible for the students when they struggled to find out what a proof is and to understand its role and meaning in the practice. The first oral examination in proof seems to be significant in drawing students to the practice of proof.

At Umeå University Jesper Boesen defended his dissertation *Assessing mathematical creativity*. The thesis consists of four papers and a preamble. Jesper claims that use of superficial reasoning seems to be a main reason for learning difficulties in mathematics. Therefore he finds it important to investigate reasons for this use and the components that may affect students' mathematical reasoning development. Assessments have been claimed to be one such component that significantly influence students' learning. The study shows that a majority of the tasks in the teacher-made assessment could be solved by

successfully using only imitative reasoning. The national tests however required creative mathematically founded reasoning to a much higher extent. He also investigates what kind of reasoning the students really use, why teacher made tests emphasise low-quality reasoning and if national tests influence teachers in their development of classroom tests. This impact seems to have a limited effect.

Ole Einar Torkildsen defended his thesis for the academic degree of doctor philos at Oslo University. It has the title *Mathematical archaeology on pupils' mathematical texts. Un-earthing of mathematical structures*. The data basis for his work is the pupils' solutions for six tasks given in a competition in the journal Tangenten in the early 1990's. They make up 23 mathematical texts. The purpose of his analysis method is to make explicit the mathematical structures that are inherent in the pupils' solutions. Thus he is intending to uncover the mathematical structures by analysing pupils' solutions through the glasses of a mathematician. The analysis revealed that the pupils in their solving process heavily relied on some fundamental mathematical structures. The relationships in the answers can be identified as functions, in some instances functions with more than one independent variable. The mathematical structures are localised at two levels and factors influencing the solution process are studied. Finally Torkildsen argues that mathematical archaeology is a suitable tool for increasing the knowledge about pupils' mathematical activity.

Åse Streitlien's thesis has the title *Room for participation – a study of interaction and communication in mathematics classrooms*. It is written in Norwegian and makes up an extensive text of 350 pages and was defended at Oslo University. The aim of her work is to study interaction and communication between the teacher and her students in mathematics classrooms. The research focus is concerned with the opportunities young students have for participating in the discourse of mathematics and how the dynamics of reasoning and discussion gives rise to mathematical meaning. Taped lessons from two classrooms were analysed using discourse analysis. Focus was on how discourse patterns influence what counts as mathematics knowledge and what communicative competences the students need for participating in the classroom discourse. Streitlien suggests that what students learn in mathematics depends on how their teacher responds to their responses and the opportunities there are given them in the negotiation of mathematical meaning.

Ewa Bergqvist calls her thesis *Mathematics and mathematics education – two sides of the same coin: some results on positive currents related to polynomial*

convexity and creative reasoning in university exams in mathematics. It was defended at Umeå University in Sweden. The dissertation consists of two different but connected parts. Part A is based on two papers in mathematics and part B on two papers in mathematics didactics. In part B focus is on what kind of reasoning university students in mathematics use in courses and exams. Bergqvist differs between imitative reasoning and creative reasoning. About 70% of the tasks in exams can be solved by imitative reasoning. The teachers constructing the exams are pleased with this situation. They claim that otherwise the exams would be too difficult and lead to too low passing rates.

Sharada Gade was the first to present her thesis in the doctoral programme of Agder University College in Norway. The title is *The micro-culture of a mathematics classroom. Artefacts and activity in meaning making and problem solving*. The work is based on a yearlong classroom study in the first grade in upper secondary school in Norway. The thesis points to the centrality of both meaning-making in teaching-learning and goal-directedness in problem-solving, as important parts of the instruction in a mathematics classroom. The classroom was bilingual with emphasis on cooperation or group-learning by students. The thesis offers a synthesis based on socio-cultural perspectives of the micro-culture of teaching-learning of mathematics established and situated in the classroom.

Magnus Österholm defended his thesis at Linköping University and it has the title *Kognitiva och metakognitiva perspektiv på läsförståelse inom matematik* (Cognitive and metacognitive perspectives on reading comprehension in mathematics). The purpose of the dissertation is to examine whether a reader needs special types of knowledge or abilities in order to read mathematical texts. The reading of mathematical texts is studied from a cognitive perspective and from a meta-cognitive perspective. In the first case reading abilities and content knowledge are studied in relation to reading comprehension. In the second case the focus is on beliefs and how a reader determines whether a text has been understood or not. The results show that courses at upper secondary level and at university level do not affect the special reading ability. There is a need to focus on reading but it does not need to be about learning to read mathematical texts but to use existing, more general reading ability also for mathematical texts.

Markus Häikiöniemi at the University of Jyväskylä has written and defended the thesis *The role of representations in learning the derivative*. The aim of the study is to find out how students may use different kinds of representations for

thinking about the derivative in a specific approach. To achieve this the author designed and implemented a five-hour teaching-learning sequence introducing the derivative concept in a Finnish high school (grade 11). Five students were selected to take part in carefully designed task-based interviews. He found that the embodied world offered powerful thinking tools for the students. They used increase, steepness, horizontalness and tangent of the graph for thinking about the derivative qualitatively without calculating anything. On the basis of the analysis of the students' use of representations a hypothetical learning path to the derivative was constructed.

Per Nilsson's thesis presented at Växjö University has the title *Exploring probabilistic reasoning. A study of how students contextualise compound chance encounters in explorative settings*. The focus is on what learners with little experience of formal theories of probability do and can do when they are dealing with compound random situations in which they are offered opportunities to integrate different probabilistic lines of reasoning. Two part studies have been done on 12 to 13 year old students and one study on 14 to 16 year old students. The younger students acted within a dice-game setting and the older with ICT-versions of compound, independent events. Prior to instruction students were able to devise ideas of underlying probability distributions in the case of compound random phenomena. The students brought into the discussions geometrical and numerical considerations as well as arguments reflecting principles of the law of large numbers.

What will all this new knowledge about teaching and learning mathematics result in? Will we find changes in the mathematics classrooms as a consequence of the work presented? Hopefully we will but we must be aware that it takes time to change such heavy systems as school and the educational system. It would be interesting in the future to inquire into the effect of these dissertations on mathematics teaching and learning in the Nordic countries. Maybe some prospective doctoral student will take this challenge?

/ Barbro Grevholm

Hedersdoktorer i matematikens didaktik

Ett tecken på att vårt forskningsområde väcker allt större intresse och synliggörs vid landets lärosäten är de allt fler hedersdoktorer som promoverats under senare år. Först ut var Olof Magne (Åbo Akademi, 1988), Lars-Eric Björk (Uppsala universitet) och Jeremy Kilpatrick³ (Göteborgs universitet, 1995). Några år senare utsågs Gudrun Malmer⁴ (Göteborgs universitet 1999) och Kristin Dahl (Umeå universitet, 2000) till hedersdoktorer. Som en av motiveringarna till att Anna Sierpinska (Luleå tekniska universitet, 2005) förärades ett hedersdoktorat angavs att utnämmandet ”ska också ses som ett uttryck för universitetets och i synnerhet den tekniska fakultetens syn på matematisk didaktik – ämnet är centralt för att kunna utveckla våra teknikstudenter till duktiga ingenjörer och matematiker” (Jerker Delsing, dekan för teknisk fakultet vid LTU). Nu senast kom turen till Göran Emanuelsson⁵ (Göteborgs universitet, 2006), vilket vi uppmärksammar i medlemsbladet genom att återge en text baserad på en telefonintervju med Göran som gjordes hösten 2006.

En utmanande paradox⁶

I rapporten *Svårt att lära – lätt att undervisa?* diskuterar Göran Emanuelsson kompetensutveckling av matematiklärare i Sverige i ett historiskt perspektiv. Med sedvanlig grundlighet och balans, och känsla och respekt för lärares villkor och nyckelroll för svensk matematikutbildning, sätter han på ett mycket konkret sätt in läsaren mitt i den relevanta och aktuella forsknings- och skolverkligheten. Den fråga han ställer i rapportens titel, som låter som en paradox, fångar mycket av kärnan i den problematik inom svenska matematikutbildning i stort som debatterats flitigt under senare år och getts en grundlig beskrivning i Matematikdelegationens betänkande *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens*.

När jag pratar med Göran om denna ”paradox” berättar han om tiden som doktorand i Roskilde då dessa funderingar började växa fram, delvis inspirerade av

³ Se *Nämnavaren* 1995, nr 3, s. 1.

⁴ Se *Nämnavaren* 1999, nr 4, s. 6-7.

⁵ Se *Nämnavaren* 2006, nr 4, s. 3.

⁶ Denna text publicerades i *HedersNämnavaren* 21/10 2006 (s. 12-13) och återges här med tillstånd av redaktionen.

den s k *relevansparadoxen*, som på engelska formulerats ”Mathematics is useless to me, but at the same time I know I’m useless without mathematics”. Uttrycket *svårt att lära – lätt att undervisa* är en liknande typ av paradox. Sådana utmanande formuleringar kan ha viss genomslagskraft då dom inspirerar till fördjupade funderingar om dom känns igen, eller som Göran säger att det är ”ett sätt att få folk att tänka efter, viss kraft i det: *så är det* säger folk”.

Jag formulerar här några funderingar som Görans paradox väckt hos mig själv:

Svårt att lära –

Matematik har en yta som repellerar:

Formlernas regelstyrda mekanism

stjäl kontrollen från utövaren som känner sig utanför.

Själlösa, tråkiga och ointressanta stirrar siffror, bråkstreck och integraltecken

från en tillplattad pappersvärld.

*En sådan anrättning väcker tveksamt aptit,
serverad färdiglagad i skolans diversebutik.*

För många divisioner som går jämnt ut.

Matematik har ett djup som repellerar:

*Komplexitetens svårgenomträngliga snårskog,
abstraktionens ogenomskinliga klarhet.*

Det självklaras grundlösa botten och relationens hypotetiska realism.

Iterationens oupphörliga spiral.

– lätt att undervisa?

Matematik har en yta som attraherar:

*Formlernas självklara enkelhet och elegans
ger snabbt svaret på det genomträngliga.*

*Den överskådliga variationen lätt infångad i systematikens logiska
diagram. Ekvationslösningens ofrånkomliga pregnans.*

Matematik har ett djup som attraherar:

*Delbarhetens enkla mystik, primtalens onåbarhet och de komplexa
talens realitet. Det överraskande sambandet –*

den geometriska konstruktionens algebraiskt grundade omöjlighet.

Den symboliska kalkylens empiriska prediktion.

Lägg till detta den konkreta klassrumsverkligheten, elevers och lärares skolvardag, individens olika intressen och personligheter, så är det inte svårt att instämma i orden ”Att undervisa i matematik är en komplex verksamhet och det finns inga enkla recept för framgång”, som Mouwitz & Emanuelsson skriver i

Dokumentationen från Matematikbiennalen 2002. Det är också otillräckligt att begränsa perspektivet till klassrummet och de personer som agerar där, för ”Även om lärares kunskaper och undervisning är avgörande för om eleven ska utveckla matematiskt kunnande, så är hela det system som läraren verkar i till sist avgörande för framgång”. Inom detta system finns inte bara officiella styrdokument och en reglerad och organiserad skolvärld utan även historiskt grundade traditioner där olika värderingar och uppfattningar styr mycket av undervisningsverksamhetens uttryck.

Att sådana uppfattningar som paradoxen ger uttryck för är utbredda framgår av, enligt Göran i samband med vårt samtal, att på ”alla nivåer i utbildningssystem och samhälle finns en dominerande föreställning att matematik är abstrakt, svårt att förstå, meningslös och nästan omöjlig att lära för många”. Ett annat indicium på att matematik uppfattas som svårt är att dåliga resultat i skolans matematikutbildning (t ex det stora antalet underkända på gymnasiets A-kurs) tolereras av beslutsfattare på olika nivåer år efter år utan åtgärder. Att matematik kan uppfattas som lätt att undervisa menar Göran beror på att undervisningstraditionen i ämnet är så stark, särskilt lärobokens dominerande ställning: Dels anses läroböcker i matematik helt täcka kursinnehållet, dels läggs det inte ”ner mycket lärtid att planera eller förbereda med en lotsande lärobok”. Uppfattningen att matematik är svårt och att misslyckande därför accepteras gör att det är ”ok lokalt att inte anstränga sig med att söka förstå eller göra något genomgripande åt elevers svårigheter eller tänkande”, som Göran uttrycker det.

Ser man förbi dessa uppfattningar som ligger bakom Görans paradox, menar han att ”som kursplanen är skriven täcks den inte av någon lärobok”, men samtidigt är situationen komplex. Även om lärare vet att det egentligen inte fungerar att fortsätta på samma sätt, så är dom ”fångade” i sin arbetssituation och då det är ont om tid att klara allt blir det lätt så att ”matten är enklast att lägga ner mindre kraft på”, och man accepterar att en viss andel inte klarar det man ska. Göran menar att om ”undervisningen ska utgå från kursplan, från elevers tänkande och ha målet att eleverna ska bli intresserade och förstå det de gör, då blir det däremot ganska svårt (men spännande och givande) att undervisa i matematik”. Men han är optimistisk när det gäller elevers förmåga till lärande i matematik och ställer upp de olika valörer som uttrycks i de två orden *krav – förväntningar*, där det senare ordet har en helt annan potential att utveckla både undervisning och lärande än det förra, om höga förväntningar också kan paras med bättre stöd. Det handlar här inte bara om förväntningar från lärare, utan även från föräldrar, från ’samhället’ och från eleverna på sig själva. Det är inte minst

erfarenheterna från pilotprojektet om *Små barns matematik* som ligger bakom Görans optimism. Han är imponerad av hur 1-5 åringar resonerar matematiskt och redovisar sina tankar och hur förskollärare arbetar med barnen och dokumenterar deras arbete, som även ger föräldrarna en positiv syn på matematiken och dess möjligheter i förskolan. Implicit ligger här tanken att arbetet med matematik i skolan skulle kunna se helt annorlunda ut och upplevas på ett helt annat sätt om barnen fått arbeta tidigare med matematiska begrepp och fundera över dem i "sin värld".

Matematikens djup kan alltså attrahera. När det gäller idéer, samband och sammanhang handlar det även om kultur – synlig/dold matematik i samhället kan påverka sådana uppfattningar som ligger bakom paradoxen. Göran pekar på att om en del av denna dolda matematik synliggörs och bearbetas i skolan behöver "ämnet inte bli så torrt, mer av stora idéer (som symmetrier, kaos) kan förlösa problemen". Genom behoven att uttrycka och hantera dessa idéer kan även matematikens yta attrahera. Matematiken kan då för eleven upplevas som spännande att lära istället för att anses som svårt och därmed för läraren upplevas som inspirerande och givande att undervisa. Det är kanske så den utmanande paradoxen ska lösas upp, genom att ersätta de dömande orden svårt och lätt med mer inspirerande ord som skapar positiva förväntningar: *Spännande att lära – givande att undervisa!*

/ Christer Bergsten

E-postdresser till medverkande i *Medlemsblad* nr 13

Christer Bergsten
Barbro Grevholm

chber@mai.liu.se
barbro.grevholm@hia.no

Anslagstavlan

Aktuella konferenser

MACAS2 Mathematics and its Connections to the Art and Sciences

Odense, Danmark, 29-31 maj 2007

<http://www.macas2.sdu.dk/>

ALM 14, Limerick, Irland, 26-29 juni 2007

<http://www.alm-online.org/>

PME 31, Seoul, Korea, 8-13 juli 2007

<http://pme31.org/>

CIEAEM 59, Dobogokö, Ungern, 23-29 juli 2007

<http://www.cieaem.net/>

4th Nordic Research Conference on Special Needs Education in Mathematics

Vasa, Finland, 7-9 november 2007

<http://www.vasa.abo.fi/mathconf/>

Telefoner och e-postadresser till funktionärerna i SMDF:s styrelse 2007

Ordförande	Christer Bergsten	013-282984	chber@mai.liu.se
Vice ordförande	Tine Wedege	040-6658171	tine.wedege@lut.mah.se
Kassör	Thomas Lingefjärd	031-7732253	thomas.lingefjard@ped.gu.se
Sekreterare	Peter Nyström	090-7869949	peter.nystrom@edmeas.umu.se