Dynamiska system

Hans Lundmark

Matematiska institutionen
Linköpings universitet

Dynamiskt system

= ett system vars tillstånd ändras med tiden, och som har följande egenskaper:

- Deterministiskt

  Följer någon (matematisk) **regel**.
  Inga slumpmässiga aspekter.

- ”Minneslöst”

  Nuvarande tillstånd bestämmer framtida; man behöver inte veta vad som hänt i det förflutna.

Exempel. Himlakropparnas rörelse (Newton 1687).

Systemets tillstånd:

Position och **hastighet** för varje himlakropp.

För varje kropp (och i varje ögonblick) gäller:

$$\textbf{accelerationen} = \frac{\text{sammanlagda tyngdkraften från de andra kropparna}}{\text{kroppens egen massa}}$$

$$\left(\text{där} \quad \textbf{tyngdkraften} \propto \frac{(\text{ena massan}) \cdot (\text{andra massan})}{(\text{avståndet})^2}\right)$$

Matematiskt sett:

- **Derivata** (ögonblicklig förändringstakt)

  Hastigheten är derivatan av positionen.

  Accelerationen är derivatan av hastigheten.

- **Differentialekvationer**

  Samband (som ska råda i varje ögonblick) mellan tillståndsvariablerna (positioner & hastigheter) och deras derivator.

Två kroppar (sol + en planet, dubbelstjärna):

- Löstes av Newton.
- Kägelsnitt (ellipser/parabler/hyperbler).

Tre eller fler kroppar:

- Extremt svårt problem! Sysselsätter forskare än idag.
- Man kan ej skriva upp någon formel som ger lösningen för godtyckligt starttillstånd.

Man får försöka hitta andra sätt att förstå eller förutsäga systemets beteende, åtminstone **kvalitativt**.

- Hur kan man **simulera** systemet i dator på ett tillförlitligt sätt?
- Är vårt eget solsystem **stabilt**?
- Kan man beskriva **vissa** lösningar exakt?
  - Liksidig triangel (Lagrange, 1770-talet) och andra *centralkonfigurationer*.
  - Tre kroppar i en åtta (2000) och andra krumelurer. (Sökord: ”*n*-**body choreographies**”).
  - Singularitet utan kollisioner (1992). (”Till oändligheten på ändlig tid.”)

Tidsdiskreta system

= dynamiska system där tillståndet ändras i steg istället för kontinuerligt.

Man utför någon matematisk operation gång på gång (samma operation i varje steg).

Detta kallas att ”**iterera**” (= upprepa) operationen.

Exempel. Upprepad kvadratrotsutdragning.

Starttillstånd	10000	(t.ex.)
Efter 1 steg	100	
Efter 2 steg	10	
Efter 3 steg	3,1622776601 . . .	
Efter 4 steg	1,7782794100 . . .	
Efter 5 steg	1,3335214321 . . .	
Efter 10 steg	1,0090350448 . . .	
Efter 20 steg	1,0000087837 . . .	
Efter 50 steg	1,0000000001 . . .	
etc.		

Okomplicerat beteende; talföljden konvergerar mot 1 (oavsett vilket positivt tal man startar med).

Exempel. Börja med ett tal mellan 0 och 1 och iterera funktionen $f(x) = 2\,x(1-x)$.

- Välj startvärde, t.ex. 0,75.
- Iterera:

$$\begin{aligned}
2 \cdot 0{,}75 \cdot (1 - 0{,}75) &= 0{,}375 \\
2 \cdot 0{,}375 \cdot (1 - 0{,}375) &= 0{,}46875 \\
2 \cdot 0{,}46875 \cdot (1 - 0{,}46875) &= 0{,}498046875 \\
2 \cdot 0{,}498046875 \cdot (1 - 0{,}498046875) &= 0{,}49999237060546875 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Talföljden konvergerar mot 0,5 (oavsett starttillstånd).
(Man kan notera att 0,5 är en **fixpunkt** för f, dvs $f(0{,}5) = 0{,}5$.)

Om man byter ut konstanten 2 mot något annat kan dock systemet bete sig helt annorlunda:

Funktion som itereras	Vad talföljden konvergerar mot
$2\,x(1-x)$	fixpunkt 0,5
$2{,}5\,x(1-x)$	fixpunkt 0,6
$3{,}3\,x(1-x)$	2-cykel (hoppar mellan 0,823603 . . . och 0,479427 . . .)
$3{,}5\,x(1-x)$	4-cykel (0,826940 . . . 0,500884 . . . 0,874997 . . . 0,382819 . . .)
$3{,}55\,x(1-x)$	8-cykel
$3{,}565\,x(1-x)$	16-cykel
$\vdots$	$\vdots$
$3{,}57\,x(1-x)$	konvergerar inte (”kaotiskt” uppförande – fortsätter hoppa runt till synes slumpmässigt, hur länge man än itererar)

Det var inte förrän på 60- och 70-talen som man på allvar insåg att även väldigt enkla dynamiska system kan uppvisa oerhört komplicerat beteende.

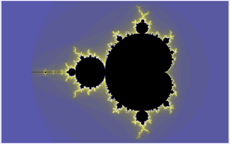
- Iteration av $f(x) = r\,x(1-x)$ för olika värden på r, som ovan. (Sökord: "**logistic map**".)
- Iteration av $f(z) = z^2 + c$ för olika värden på c, där man låter z och c vara **komplexa tal** ($x + iy$ där $i^2 = -1$).

Mandelbrotmängden (svart):

De komplexa tal c för vilka talföljden

$$\big(f(0),\, f(f(0)),\, f(f(f(0))),\, \dots\big)$$

är *begränsad*.



Integrabla system är motsatsen till kaotiska:

- Kan se mycket komplicerade ut…
- …men har någon bakomliggande **struktur** eller **symmetri**.
- Lösningarna kan beskrivas (mer eller mindre) fullständigt.

Exempel. "The Box–Ball System"

(Ett **ultradiskret** integrabelt system.)

Systemet utgörs av en (oändlig) rad med lådor. Varje låda är antingen tom eller innehåller en boll.

- Starttillstånd:

  Placera ut bollar i ändligt många av lådorna.

- Regel för att gå från ett tidssteg till nästa:

  Flytta varje boll (i tur och ordning) till närmaste lediga låda till höger.

```
t=0 000000.......0000.......000...................................
t=1 ......000000.....0000......000................................
t=2 ............00000....00000....000.............................
t=3 .................0000.....0000...00000........................
t=4 .....................0000.....000.....000000..................
t=5 .........................0000....000........000000............
t=6 .............................0000...000...........000000......
t=7 .................................000...0000.............000000
```

- Förutsatt att det finns ledigt utrymme till höger så kommer ett sammanhängande ”block” med k stycken bollar att röra sig med hastigheten k (dvs flyttas k steg åt höger i varje tidssteg).
- När ett snabbare block kör ikapp ett långsammare interagerar de (överflyttning av bollar).
- **Icketrivialt faktum**: om man börjar med välseparerade block sorterade i hastighetsordning med det snabbaste till vänster, så kommer det efter alla interaktioner ut block med samma hastigheter, fast i omvänd ordning. (Som **solitoner**!)

Den bakomliggande strukturen som förklarar detta är mer sofistikerad än vad man skulle kunna tro.

En förbluffande arsenal av avancerad matematik har använts för att analysera beteendet hos detta enkla system (och generaliseringar av det):

- Kvantgrupper
- Tropisk algebraisk geometri
- Exakt lösbara modeller från statistisk mekanik
- Solitonteori
- ...

Solitoner

- **Solitär våg** observerad 1834 av **John Scott Russell** på kanal i Skottland. Experiment i vattentank: större vågor har högre hastighet, en tillräckligt stor våg bryts upp i flera mindre.

- Teoretisk förklaring av **Korteweg & de Vries** 1895.

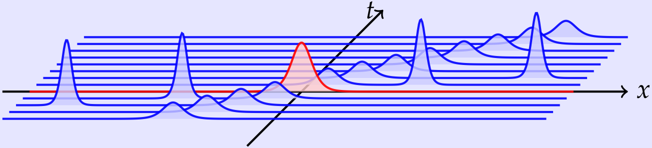
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

  Icke-linjär partiell differentialekvation för våghöjden $u(x,t)$. Har lösningar i form av en **ensam fortskridande våg**.

- Oväntad upptäckt 1967: exakta lösningar till KdV-ekvationen som beskriver interaktion mellan **flera** vågor – ”solitoner”.

Exempel på tvåsolitonlösning till KdV-ekvationen:

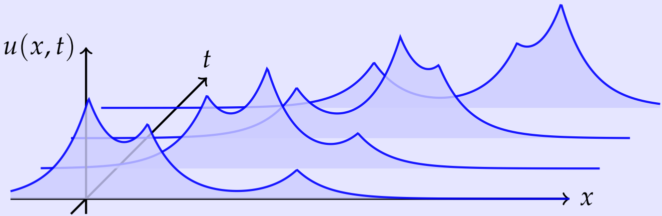
$$u(x,t) = \frac{72\big[3 + 4\cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)\big]}{\big[3\cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)\big]^2}$$

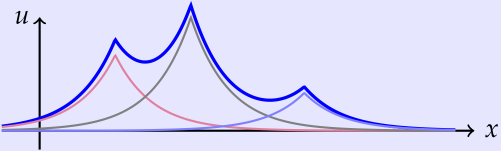


Till slut lite om något jag själv forskar om:

Spetsiga solitoner

(På engelska: **peaked solitons** = **peakons**.)





Spetsiga solitoner dyker upp som lösningar till vissa andra ekvationer, också med rötter i teorin för vattenvågor. Den mest kända är **Camassa–Holm-ekvationen** (1993):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + 3\,u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 2\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

(Anm.: I denna modell representerar $u(x,t)$ **inte** de vågor man ser på vattenytan, utan en hastighetskomponent hos vattenrörelsen på ett visst djup under ytan.)

Rörelsen hos dessa vågor styrs av ett dynamiskt system.

- Tillstånd: Positionen x_k och amplituden m_k för varje soliton ($k = 1, 2, \ldots, N$).
- Differentialekvationer:
  - Hastigheten dx_k/dt för soliton nummer k är lika med höjden hos vågen u i punkten x_k.
  - Amplitudens ändringstakt dm_k/dt ges av $(-m_k)$ gånger medelvärdet av lutningarna för höger- och vänstertangenten till u:s graf i punkten x_k.

Mirakulöst nog går detta komplicerade system att lösa exakt för godtyckligt antal solitoner. T.ex. för $N = 3$:

$$x_1(t) = \ln \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2 b_1 b_2 b_3}{\sum_{j<k} \lambda_j^2 \lambda_k^2 (\lambda_j - \lambda_k)^2 b_j b_k}$$

$$x_2(t) = \ln \frac{\sum_{j<k} (\lambda_j - \lambda_k)^2 b_j b_k}{\lambda_1^2 b_1 + \lambda_2^2 b_2 + \lambda_3^2 b_3}$$

$$x_3(t) = \ln(b_1 + b_2 + b_3)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_k = \text{konstant} \\ b_k(t) = b_k(0)\, e^{t/\lambda_k} \end{pmatrix}$$

$$m_1(t) = \frac{\sum_{j<k} \lambda_j^2 \lambda_k^2 (\lambda_j - \lambda_k)^2 b_j b_k}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \sum_{j<k} \lambda_j \lambda_k (\lambda_j - \lambda_k)^2 b_j b_k}$$

$$m_2(t) = \frac{\left(\lambda_1^2 b_1 + \lambda_2^2 b_2 + \lambda_3^2 b_3\right) \sum_{j<k} (\lambda_j - \lambda_k)^2 b_j b_k}{(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3) \sum_{j<k} \lambda_j \lambda_k (\lambda_j - \lambda_k)^2 b_j b_k}$$

$$m_3(t) = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3}$$

Lösningsformlerna i sig är kanske inte så spännande som metoderna för hur man finner dem.

- Kopplingar till massor av klassisk matematik.

  (Ortogonala polynom, kedjebråk, etc.)

- Invers spektralteori för vibrerande sträng.

  (”Kan man höra hur en strängs massfördelning ser ut?”)

Vad jag själv sysslat med mest:

- ”Släktingar” till Camassa–Holm-ekvationen.

  (Degasperis–Procesi, Novikov, Geng–Xue)
- Inte lika starkt kopplade till klassisk matematik.
- Man behöver generalisera en del klassiska begrepp för att beräkna lösningsformlerna för de spetsiga solitonerna.
- Generaliseringarna har visst matematiskt intresse i sig själva (oberoende av dynamiska system).

Tack för mig!