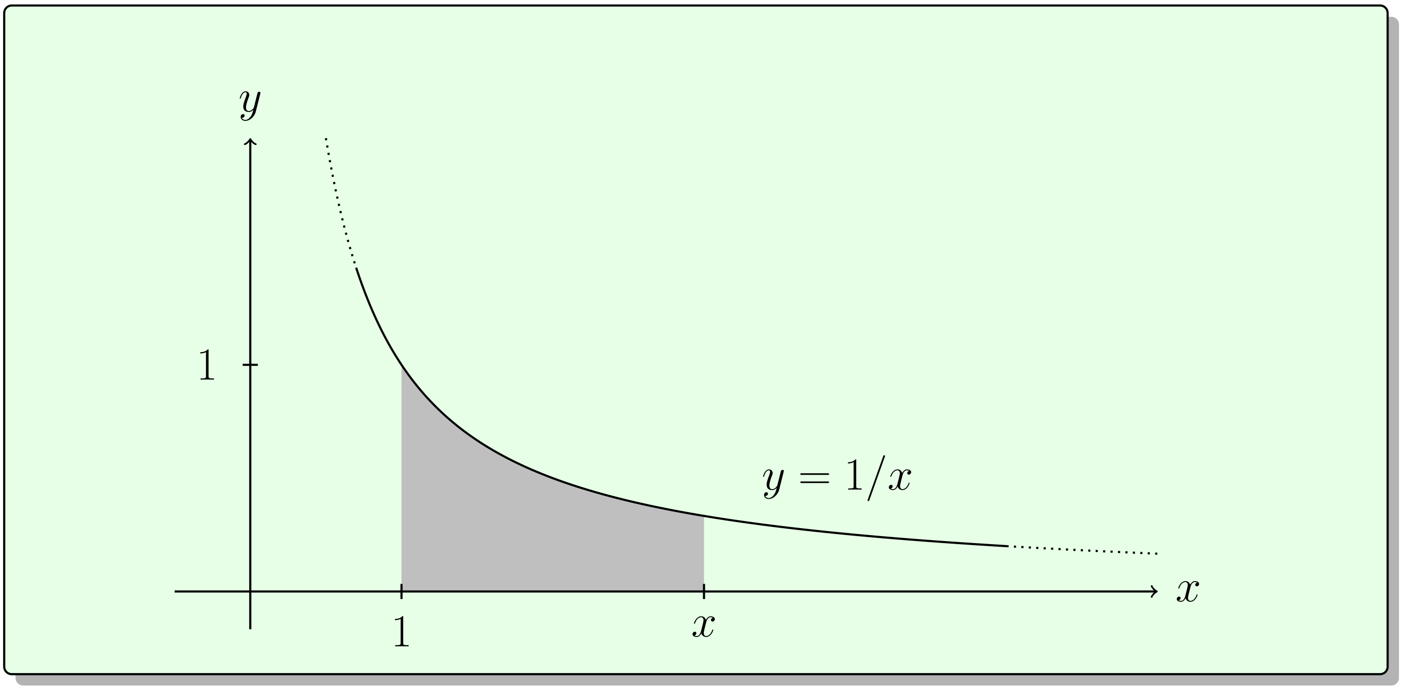
TATM79: Matematisk grundkurs HT 2015

Föreläsningsanteckningar för Y, Yi, MED, Mat, FyN, Frist

Johan Thim, MAI



TATM79: Föreläsning 1
Notation, ekvationer, polynom och olikheter

Johan Thim*

15 augusti 2015

1 Vanliga symboler

Lite logik

- **Implikation**: $P \Rightarrow Q$. Detta betyder att om P är sant så är Q sant. Utläses P *medför* Q eller P *implicerar* Q. Exempel: $x > 4 \Rightarrow x^2 > 16$.

- **Ekvivalens**: $P \Leftrightarrow Q$. Detta betyder att P är sant om och endast om Q sant. Med andra ord: $P \Rightarrow Q$ och $Q \Rightarrow P$. Exempel: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$, dvs $x = 2$ eller $x = -2$.

Logiska utsagor!

Observera att P och Q är **logiska utsagor**. Det är alltså saker som kan vara sanna eller falska. Typiskt för oss är saker som att P till exempel är utsagan att $x = 7$. Detta kan vara sant eller falskt (x kan vara 7 eller något annat). Däremot kan **inte** P vara ett påstående i stil med *röd* eller π. Uttryck av typen $7 \Rightarrow 2$ är nonsens. Samma sak med $(x-1)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1$. Påståendet saknar logisk mening. Även om det i sista exemplet går att gissa vad det skulle betyda så kan man inte skriva så. Använd likhetstecknet när ni menar likhet!

Det finns även speciella mängder av tal (siffror alltså) som vi kommer att använda oss av.

N: De naturliga (hel)talen: $0, 1, 2, 3, \ldots$.

Z: Alla heltal: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Q: Alla rationella tal, dvs bråk $\dfrac{p}{q}$ där p och q är heltal och $q \neq 0$.

R: Alla reella tal. Inkluderar **Q** och även alla irrationella tal som $\sqrt{2}$, π, e, etc.

C: Alla komplexa tal $z = a + bi$ där $i^2 = 1$ och $a, b \in \mathbf{R}$.

Se även till att speciellt studera tallinjen och olikheter i boken!

*johan.thim@liu.se

2 Ekvationslösning

Oftast när vi försöker lösa en ekvation handlar det om att använda omskrivningar och förenklingar tillsammans med logik för att hitta **alla** lösningar till en given ekvation.

Exempel

$$\frac{2x-9}{5} = 4x \quad \Leftrightarrow \quad 2x-9 = 20x \quad \Leftrightarrow \quad -9 = 18x \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{9}{18} = -\frac{1}{2}$$

Kontroll: VL $= (2(-1/2)-9)/5 = -2$ och HL $= 4(-1/2) = -2$. Alltså är $x = -1/2$ en lösning, och eftersom vi har ekvivalenser i alla steg är detta den enda lösningen!

Kontrollen i exemplet är egentligen överflödig då vi räknat med ekvivalens hela vägen. Men, då det alltid finns en risk för slarvfel när man räknar försöker vi alltid att kontrollera våra svar. Det är också värt att lägga på minnet att vissa metoder vi kommer att använda **kräver** en kontroll för att verifiera att "lösningar" som hittas inte är falska.
Lite repetition av omskrivningar vi sett tidigare.

Vanliga omskrivningar

Kvadratregeln: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Konjugatregeln: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
Kvadratkomplettering: $x^2 + bx + c = (x+b/2)^2 - (b/2)^2 + c$.

Till exempel med konjugatregeln kan vi reda ut vad som gäller för två tal a och b om $a^2 = b^2$.

Exempel

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)(a-b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a+b = 0 \text{ eller } a-b=0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -b \text{ eller } a = b \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm b. \end{aligned}$$

Observera att om vi vet att, till exempel a och b är positiva, så är $a = b$.

Vi har här utnyttjat en mycket användbar princip som gäller för de mängder tal vi betraktar i denna kurs, nämligen att om $ab = 0$ så måste endera $a = 0$ eller $b = 0$. Det enda sättet att få noll ur en produkt är att en av faktorerna är noll.

Kvadratkomplettering är ett verktyg vi kommer att använda ofta. Det mest typiska är nog att helt enkelt lösa en andragradsekvation.

Exempel

Lös $x^2 + 6x + 1 = 0$.

Lösning.
Vi kvadratkompletterar och utnyttjar konjugatregeln:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 1 &= (x+3)^2 - 9 + 1 = (x+3)^2 - 8 = (x+3)^2 - (\sqrt{8})^2 \\ &= [\text{ konjugatregeln }] = (x+3-\sqrt{8})(x+3+\sqrt{8}). \end{aligned}$$

Alltså måste

$$x^2 + 6x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 - \sqrt{8} = 0 \text{ eller } x + 3 + \sqrt{8} = 0.$$

Tag för vana att summera resultatet i ett kortfattat men tydligt svar.
Svar: $x = -3 \pm \sqrt{8}$ är de enda lösningarna.

Exempel

Bestäm största och minsta värde av $1 + x - x^2$.

Vi kvadratkompletterar:

$$1 + x - x^2 = 1 - (x^2 - x) = 1 - ((x - 1/2)^2 - (1/2)^2) = \frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Här ser vi tydligt att uttrycket som störst blir $5/4$, vilket inträffar endast då $x = 1/2$. Däremot kan uttrycket bli hur litet som helst (minsta värde saknas alltså)!

Kvadratroten

Definition. Om $a \geq 0$ så definierar vi $\sqrt{a}$ som det tal x så att

$$x = \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = a, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Det följer från definitionen att $\sqrt{a} \geq 0$ för alla $a \geq 0$.

Kvadratrötter och negativa tal?

- Inga negativa tal! Saker som $\sqrt{-4}$ är nonsens och inte något vi någonsin kommer att använda i denna kurs. Möjliga tolkningar i form av komplexa tal hanteras på annat sätt. Det finns kurser i komplex analys där detta problem studeras och problemet överlämnas dit.

- Vi får aldrig(!) något negativt från kvadratroten heller. Till exempel så är $\sqrt{9} = 3$. Aldrig ± 3 eller något annat vansinne. Tecken före kvadratroten kommer alltid från något annat. Ofta handlar det då om en ekvation vi försöker lösa. Till exempel $x^2 = 9$, som har lösningarna $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Tecknet här kommer alltså från ekvationen, inte kvadratroten!

Exempel

Lös $x - 1 = \sqrt{2x + 1}$.

Alternativ 1. Vi räknar med implikationer och kan därmed kvadrera lite hur vi vill. Priset vi betalar för detta är att alla eventuella lösningar vi finner **måste** kontrolleras. Utan kontroll har vi inte visat något (och därmed riskerar vi noll poäng på den uppgiften på en tenta). Alltså,

$$\begin{aligned} x - 1 = \sqrt{2x+1} \quad &\Rightarrow \quad (x-1)^2 = 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ eller } x = 4. \end{aligned}$$

Nu måste vi testa och ser då att om $x = 0$ så skulle

$$0 - 1 = \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 1,$$

vilket inte går då $-1 \neq 1$. Om $x = 4$ är VL $= 4 - 1 = 3$ och HL $= \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$. Detta är alltså en lösning!

Svar: Endast $x = 4$ löser ekvationen.

Alternativ 2. Detta är lite bökigare. Två problem:

1. Vi måste ha $2x + 1 \geq 0$, eller $x \geq -1/2$, för att kvadratroten skall vara definierad.

2. Vidare måste $x - 1 \geq 0$, eller $x \geq 1$, eftersom vi vet att kvadratroten alltid är icke-negativ.

Dessa villkor ger att $x \geq 1$ (varför bara den?). Med detta villkor kan vi faktiskt räkna med ekvivalenser i varje steg (undersök detta!). Detta villkor visar även att den falska lösningen $x = 0$ ska tas bort.

3 Polynom

Exempel

Lös ekvationen $x^3 = x$.

Lösning. Vi skulle kunna gissa fram lösningar. Till exempel $x = 1$ verkar fungera. Sen kan vi dessutom ganska direkt se att $x = -1$ löser ekvationen då $(-1)^3 = -1$. Är detta alla lösningar? Nej, lite mer analys visar att även $x = 0$ löser ekvationen. Hur vet vi då när vi är färdiga? Låt oss omformulera frågan:

$$\begin{aligned} x^3 = x \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(x-1)(x+1) = 0. \end{aligned}$$

Alltså är mycket riktigt $x = 0$ och $x = \pm 1$ de enda lösningarna. Det sista vänsterledet kallas för *faktoriseringen* av $x^3 - x$.

Polynom

Definition. Ett polynom $p(x)$ är ett uttryck av typen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

där $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är konstanter och n ett icke-negativt heltal. Om $a_n \neq 0$ säger vi att polynomet har *grad* n.

Exempel

- Exempel på polynom är x^2, 7, $1 + x + x^5$, $x^6 + 4x^3$, etc.

- Exempel på uttryck som **inte** är polynom: $x^{1/2}$, $\sin x$, x^{-3} etc.

Vanliga benämningar

Definition. Ett polynom $p(x)$ säges ha ett **nollställe** när $x = a$ om $p(a) = 0$. Speciellt för polynom kallas nollställen ofta för **rötter**. Ett polynom har alltså en rot $x = a$ om $x = a$ är ett nollställe. Vidare kallas konstanterna $a_0, a_1, \ldots, a_n$ för polynomets **koefficienter**.

3.1 Polynomdivision

Fungerar precis som för heltal (liggande stolen).

Exempel

Förenkla i meningen att graden för täljaren i bråket skall vara lägre än graden för nämnaren:
$$\frac{x^3-4x+1}{x-3}.$$

Lösning. Vi ställer upp liggande stolen, till exempel enligt följande.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & x^2 & +3x & +5 \\ \hline
x-3 & x^3 & & -4x & +1 \\
 & -x^3 & +3x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & 3x^2 & -4x & \\
 & & -3x^2 & +9x & \\ \cline{3-4}
 & & & 5x & +1 \\
 & & & -5x & +15 \\ \cline{4-5}
 & & & & 16
\end{array}
$$

Proceduren fortsätter till dess att vi får kvar något som har lägre gradtal än nämnaren. I detta fall gick det inte jämnt upp utan vi fick en så kallad *rest*. Vad vi kan utläsa ur detta är att
$$\frac{x^3-4x+1}{x-3} = x^2+3x+5+\frac{16}{x-3}.$$

Kontrollera att detta stämmer genom att skriva allt på samma nämnare! Ta för vana att göra detta efter varje polynomdivision. Det är lätt att få teckenfel!
Hade resten varit noll hade det inneburit att $x = 3$ hade varit ett nollställe till täljaren. Allmänt gäller att
$$p(x) = (x-a)q(x)+r,$$
där $p(x)$ har grad n, $q(x)$ har grad $n-1$, och r är en konstant (resten). Vi ser från denna representation att
$$p(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0.$$

Det vill säga, $x = a$ är ett nollställe till $p(x)$ (så $p(a) = 0$) om och endast om polynomdivisionen med $x - a$ går jämt upp (resten blir noll; $r = 0$). Detta är i princip det faktorssatsen säger.

Faktorssatsen

Sats. Följande två påståenden är ekvivalenta.

(i) Polynomet $p(x)$ innehåller faktorn $x-a$, det vill säga $p(x) = (x-a)q(x)$ för något polynom $q(x)$.

(ii) $x = a$ är ett nollställe till $p(x)$, det vill säga att $p(a) = 0$.

Vi betraktar ett exempel.

Exempel

Faktorisera polynomet $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 8x + 14$.

Lösning. Proceduren vi använder är följande. Först gissar vi en rot. Lämpligtvis testar vi heltal då uppgifterna som ges brukar vara konstruerade på det sättet. I ett allmänt fall får man helt enkelt låta en dator gissa. *Men*, det finns en teknik för att gissa systematiskt om man har heltalskoefficienter i polynomet; se slutet på föreläsningen. Vi testar $x = 0$, vilket inte fungerar (vi har en konstantterm så då kan $x = 0$ aldrig vara ett nollställe). Vi testar $x = \pm 1$ och ser att $x = -1$ faktiskt är ett nollställe.
Nästa steg är polynomdivision där vi delar bort den kända faktorn $x + 1$ (som motsvarar nollstället $x = -1$).

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & -6x & +14 & \\
\hline
x+1) & 2x^3 - 4x^2 & +8x & +14 & \\
 & -2x^3 - 2x^2 & & & \\
\hline
 & -6x^2 & +8x & & \\
 & 6x^2 & +6x & & \\
\hline
 & & 14x & +14 & \\
 & & -14x & -14 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Det gick jämt upp så $x = -1$ måste vara ett nollställe. Nu vet vi alltså att

$$p(x) = (x + 1)(2x^2 - 6x + 14) + 0 = 2(x + 1)((x - 3)^2 + 5),$$

där vi har kvadratkompletterat den sista parentesen Är vi klara? Ja, det är vi faktiskt (om vi inte ska blanda in komplexa faktorer, vilket vi återkommer till senare). Anledningen till kvadratkompletteringen är att vi nu enkelt kan se att $(x - 3)^2 + 5 \geq 5$ för alla x. Denna faktor blir alltså aldrig noll!
Svar: $p(x) = 2(x + 1)((x - 3)^2 + 5)$. Kontrollera genom att multiplicera ihop!

Exempel

Faktorisera polynomet $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$.

Lösning. Samma teknik som ovan. Vi gissar och finner att $x = 1$ är en rot. Polynomdivision:

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & x^2 & -2x & +1 \\
\hline
x-1) & x^3 - 3x^2 & +3x & -1 \\
 & -x^3 + x^2 & & \\
\hline
 & -2x^2 & +3x & \\
 & 2x^2 & -2x & \\
\hline
 & & x & -1 \\
 & & -x & +1 \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

Alltså måste $p(x) = (x - 1)(x^2 - 2x + 1)$. Den sista faktorn är ett andragradsuttryck och det kan vi faktorisera med kvadratkomplettering: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Alltså är $p(x) = (x - 1)^3$.
Svar: $p(x) = (x - 1)^3$. Kontrollera genom att multiplicera ihop!

4 Olikheter

Att lösa olikheter skiljer sig en del från att lösa likheter. I allmänhet brukar det vara svårare, och ett problem är att man måste vara försiktig med att förkorta bort saker. Vi betraktar ett exempel för att belysa hur vi angriper problemet.

Exempel

Lös olikheten $\dfrac{4}{x+1} \leq x-2$.

Lösning. Tekniken vi rekommenderar är att flytta allt till ena sidan av olikheten, föra upp allt på gemensam nämnare, faktorisera, göra en teckentabell, och sist men inte minst kontrollera rimligheten. Således,

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x+1} \leq x-2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{4}{x+1} - (x-2) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4-(x-2)(x+1)}{x+1} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4-(x^2-x-2)}{x+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+x+6}{x+1} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{-(x+2)(x-3)}{x+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)(x-3)}{x+1} \geq 0.
\end{aligned}$$

Observera tecknet i sista steget! Vi gör en teckentabell för det sista vänsterledet.

		-2		-1		3	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{(x+2)(x-3)}{x+1}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $-2 \leq x < -1$ eller $x \geq 3$. Observera vart det blev strikt olikhet (varför?)!

Kontroll. Här kan vi till exempel plocka punkter i de olika intervallen som finns och se till att vårt påstående stämmer överens med det vi utgick från.

$$\begin{aligned}
x = -3: & \qquad \frac{4}{-3+1} = -2 > -5 \\
x = -\frac{3}{2}: & \qquad \frac{4}{-3/2+1} = -8 \leq -3/2 - 2 = -7/2 \\
x = 0: & \qquad \frac{4}{0+1} = 4 > 0 - 2 = -2 \\
x = 4: & \qquad \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5} < 4 - 2 = 2
\end{aligned}$$

Observera att denna kontroll inte *bevisar* att vi har gjort rätt (det kan fortfarande vara allvarliga fel vid faktorisering och identifiering av nollställen etc), men den visar ändå att svaret inte är orimligt. Ett vanligt fel på tentor och duggor är att man av någon anledning svarar med komplementintervallen. Detta ger alltid noll poäng oavsett anledning. Genom kontroll av typen ovan kan man enkelt undvika att svara med komplementintervallen.

Svar. $-2 \leq x < -1$ eller $x \geq 3$.

Olikheter och multiplikation

Se upp med att multiplicera olikheter med variabler som kan skifta tecken! Till exempel kan det vara lockande att förlänga olikheten i föregående exempel med $x+1$. Då skulle vi i så fall kunna undersöka

$$4 \leq (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 6 \geq 0.$$

Vi ser att nämnaren $x+1$ har försvunnit i jämförelse med ovan, och därmed kommer vår nya teckentabell att sakna den informationen. Punkten $x = -1$ är inte längre intressant och resten av tecknen riskerar att bli fel. Detta är så klart helt åt skogen. Den enda räddningen är att betrakta två fall: $x+1 \geq 0$ och $x+1 < 0$ och reda ut ett i taget. Detta skulle fungera, men i allmänhet brukar sådana lösningar innehålla andra fel så det brukar ofta bli noll poäng på en tenta ändå. Undvik alltså denna teknik!
Ännu enklare, visst är $2 < 4$? Alltså måste $2 \cdot 2 < 2 \cdot 4$, eller $4 < 8$. Inget konstigt här, det gick bra att multiplicera olikheten med 2. Men vad händer om vi multiplicerar med -2? Då skulle $-2 \cdot 2 < -2 \cdot 4$, eller $-4 < -8$. Detta stämmer så klart inte!

5 Gissning av nollställen till vissa polynom

Som utlovat kommer här en systematisk metod för att veta vilka rationella lösningar som är möjliga om vi har heltalskoefficienter i ett polynom.
Låt

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

vara ett polynom där koefficienterna $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ är heltal. Om $x = \frac{p}{q}$ är en rationell rot (p och q är heltal, p och q har inga gemensamma delare så p/q är fullt förenklad, och $q \neq 0$) så måste p vara en faktor i a_0 och q en faktor i a_n. Med andra ord, om $\frac{p}{q}$ är ett nollställe så är $a_n = p \cdot k_1$ och $a_0 = q \cdot k_2$ för några heltal k_1 och k_2. Hur använder vi detta i praktiken?

Exempel

Faktorisera polynomet $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$.

Om $x = \frac{p}{q}$ är en rot till $p(x)$ så måste alltså p vara en faktor i siffran 3. Möjliga värden på p är $p = \pm 1, \pm 3$. Vidare, q måste vara en faktor i siffran 2. Möjliga värden på q är $q = \pm 1, \pm 2$. Från dessa möjligheter kan vi skapa alla möjliga kombinationer för $\frac{p}{q}$:

$$\frac{p}{q} = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}.$$

Detta är alltså **alla** möjligheter för att ha en rationell rot. Enda heltalsrötterna som är möjliga är alltså ± 1 och ± 3, och testning visar att ingen av dessa är en rot. Skulle vi bara gissa på måfå kan vi alltså hålla på ganska länge! Testar vi resten av möjligheterna finner vi att $\frac{3}{2}$ är ett nollställe. Polynomdivision ger att $p(x) = (x - 3/2)(2x^2 + 2)$. Den sista faktorn är strikt positiv så vi är klara.
Svar: $p(x) = (x - 3/2)(2x^2 + 2)$.

TATM79: Föreläsning 2
Absolutbelopp, summor och binomialkoefficienter

Johan Thim*

15 augusti 2015

1 Absolutbelopp

Absolutbelopp

Definition. För varje reellt x definieras **absolutbeloppet** $|x|$ enligt

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Exempelvis har vi $|3| = 3$ och $|-4| = 4$. Beloppet tar alltså bort tecknet! Det är alltså en direkt konsekvens av definitionen att $|x| \geq 0$ för alla x. Dessutom kan vi uttrycka $\sqrt{x^2} = |x|$ (visa det!).

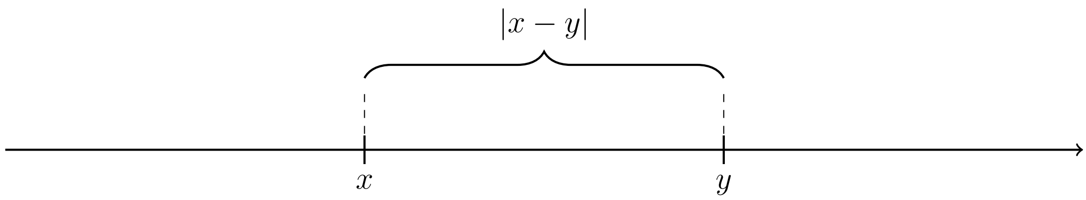
Strikt olikhet?

Observera att vi lika gärna hade kunnat definiera $|x|$ som x då $x > 0$ och $-x$ då $x \leq 0$, eller till och med x då $x \geq 0$ och $-x$ då $x \leq 0$. I den sista varianten har vi fallet $x = 0$ med två gånger, men $|0| = 0$ i båda fallen så detta orsakar ingen logisk kullerbytta. Däremot ser det lite fult ut att definiera samma fall två gånger.

Ur definitionen följer det också att

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, & x > y, \\ y - x, & x < y. \end{cases}$$

Vi kan alltså tolka $|x - y|$ som avståndet (alltid icke-negativt) mellan punkterna x och y på den reella axeln. Specialfallet är $|x - 0| = |x|$ som alltså är avståndet från x till origo.



*johan.thim@liu.se

Likheter och olikheter

Om $d \geq 0$ är en konstant så gäller följande.

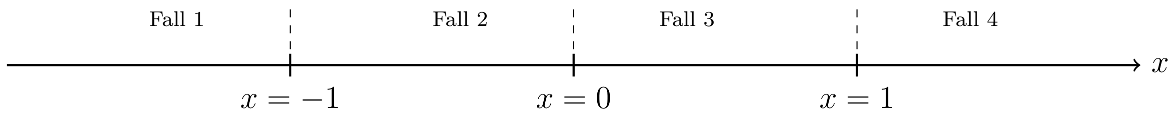
$$\begin{aligned}
|x| = d \quad &\Leftrightarrow \quad x = \pm d \\
|x| \leq d \quad &\Leftrightarrow \quad -d \leq |x| \leq d \\
|x| \geq d \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq -d \text{ eller } x \geq d
\end{aligned}$$

Hur löser vi då ekvationer och olikheter som innehåller absolutbelopp? Typiskt är att vi delar upp i olika fall, tillräckligt många för att vi ska kunna skriva uttrycken utan belopp i varje fall.

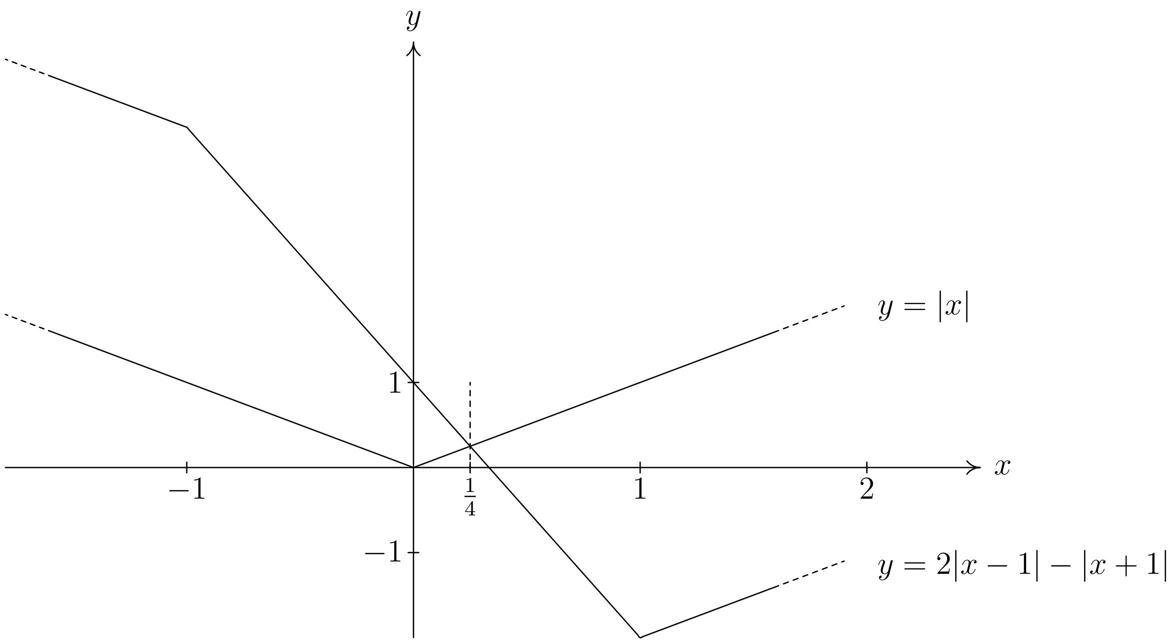
Exempel

Lös $|x| = 2|x-1| - |x+1|$.

Lösning.
Låt oss betrakta den reella tallinjen.



Intressanta punkter där beloppen kan växla tecken: $x = -1$ (då $x+1$ växlar tecken), $x = 0$ (då x växlar tecken), och $x = 1$ då ($x - 1$ växlar tecken). Vi måste alltså dela upp i fyra olika fall. Figur 1 skissar upp hur situationen ser ut grafiskt.



Figur 1: Vi ser att uttrycken skär varandra i en enda punkt, som verkar ligga vid $x = 1/4$.

Fall 1, $x < -1$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad -x = -2(x-1) + (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 3.$$

Går inte. Finns ingen lösning i detta intervall.
Fall 2, $-1 \leq x < 0$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad -x = -2(x-1) - (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Eftersom $\frac{1}{2} \notin [-1, 0[$ så är detta ingen lösning.
Fall 3, $0 \leq x < 1$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad x = -2(x-1) - (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}.$$

Eftersom $\frac{1}{4} \in [0, 1]$ så är detta en lösning.
Fall 4, $x \geq 1$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad x = 2(x-1) - (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -3.$$

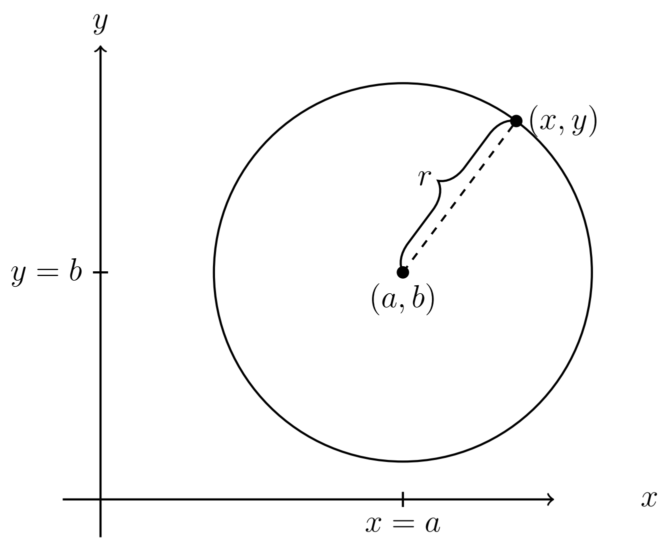
Går inte. Finns ingen lösning i detta intervall.
Svar: $x = \frac{1}{4}$ är den enda lösningen.

2 Cirklar

Låt $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ vara en punkt i planet. Avståndet r från en annan punkt (x, y) till (a, b) ges som bekant av

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

enligt Pythagoras sats. Om vi ritar ut alla punkter (x, y) som har samma avstånd r till punkten (a, b) erhåller vi en cirkel.



Med kravet att $r \geq 0$ kan vi kvadrera ekvationen ovan med ekvivalens (uttrycket inne i roten är aldrig negativt) och erhåller då cirkelns ekvation:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

Cirkeln har radien r (ingen kvadrat) och centrum i punkten (a, b).

Exempel

Undersök om ekvationen $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0$ beskriver en cirkel, och bestäm i så fall dess radie och centrum.

Lösning. Tekniken är att kvadratkomplettera x-termer och y-termer var och en för sig och analysera resultatet:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

Alltså är detta mycket riktigt en cirkel. Centrum ligger i $(-1,\ 2)$ (observera tecknen och ordningen) och radien är $\sqrt{5}$ (observera att det är r^2 som är konstanten i högerledet).
Svar. Ja, det är en cirkel med centrum i $(-1,\ 2)$ och radie $\sqrt{5}$.

3 Summor

Vi ska nu diskutera ett bekvämt sätt att skriva summor på, speciellt i de fall då termerna som summeras har någon form av upprepande mönster.

En summa S brukar skrivas

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Symbolen $\sum$ betyder att vi ska summera termerna a_k då **summationsindexet** k startar i $k = 1$, sen ökar k ett steg i taget till dess att $k = n$ och vi har då summerat n stycken termer.

Det är inget speciellt att börja med $k = 1$, summor kan starta i vilken punkt som helst (det blir olika värden på summan så klart).

Exempel

$$\sum_{k=2}^{4} (k^2 + k) = (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + (4^2 + 4) = 38.$$

Observera att det inte förekommer något k i svaret! Summationsindexet (bokstaven vi använder för att beskriva hur termerna i summan varierar) försvinner **alltid**. Att vi använde bokstaven k är inte heller något speciellt. Faktiskt så är

$$\sum_{k=2}^{4} (k^2 + k) = \sum_{j=2}^{4} (j^2 + j).$$

Summor kan delas upp (de är ju summor!) och gemensamma faktorer i alla termer kan brytas ut. Alltså,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \text{och} \qquad \sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

där c är en konstant.
Däremot kan inte summor multipliceras enkelt. Vad skulle gälla

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = ?$$

Antal termer i summan

Hur många termer innehåller summan $\sum_{k=-2}^{5}(2k+1)$? Vi börjar på $k=-2$ och slutar på $k=5$. Alltså kommer k att anta värderna

$$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5,$$

vilket är 8 stycken. Vi kan räkna ut detta genom $5-(-2)+1$. Ofta missar man $+1$, så var försiktiga!

3.1 Aritmetiska summor

Aritmetisk summa

Definition. En summa där det är konstant skillnad mellan påföljande termer kallas *aritmetisk.*

I en aritmetisk summa gäller alltså att

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots$$

är en konstant.

Exempel

Beräkna summan $S = 1+3+5+7+9$.

Detta kan vi direkt göra i huvudet så klart, men vi illustrerar en generell teknik. Genom att summera två stycken likadana summor (och skriva det kreativt genom att reversera ordning på den ena) uppstår följande mönster:

$$\begin{array}{ccccccccccc} S & = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & 7 & + & 9 \\ S & = & 9 & + & 7 & + & 5 & + & 3 & + & 1 \\ \hline 2S & = & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 \end{array}$$

Vi har alltså visat att $2S = 5 \cdot 10$ eller att $S = 25$. Generellt gäller för en **aritmetisk summa** alltid att

$$S = \frac{\text{första termen} + \text{sista termen}}{2} \cdot \text{antal termer}.$$

3.2 Geometriska summor

Geometrisk summa

Definition. En summa där det är en konstant kvot mellan påföljande termer kallas *geometrisk*.

Detta innebär alltså att

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots$$

är konstant.

Exempel

Beräkna summan $S = 1 - 2 + 4 - 8 + 32$.

Detta kan vi återigen direkt göra i huvudet så klart, men vi illustrerar igen en generell teknik. Om vi multiplicerar summan med kvoten q och drar bort detta från ursprungssumman uppstår följande mönster.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S & = & 1 & - & 2 & + & 4 & - & 8 & + & 16 & & \\ -2S & = & & - & 2 & + & 4 & - & 8 & + & 16 & - & 32 \\ \hline S-(-2S) & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 32 \end{array}$$

Vi har alltså visat att $3S = 33$ eller att $S = 11$. Generellt gäller för en **geometrisk summa** att

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = \begin{cases} a \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ a(n+1), & q = 1. \end{cases}$$

Observera här att

$$\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1},$$

så båda varianterna ger samma svar.

3.3 Andra sorters summor?

Aritmetisk eller geometrisk?

Observera att de allra flesta summor varken är aritmetiska eller geometriska! Det är alltså inte fifty-fifty att chansa på tentan och hoppas på det bästa. Till exmpel $\sum_{k=1}^{4} k^2$ är varken eller, men kan enkelt räknas ut ändå eftersom det bara är fyra termer.

Men om en summa innehåller för många termer för att beräknas för hand då? Vissa fall kan man ändå hantera, till exempel följande halvluriga variant (gammal tentauppgift!).

Exempel

Beräkna summan $\displaystyle\sum_{k=3}^{27}(3k + 3^k)$.

Lösning. Summan består av en aritmetisk del och en geometrisk del (kontrollera!). Vi delar således upp summan i två delar och beräknar enligt standardformler:

$$\sum_{k=3}^{27}(3k+3^k) = \sum_{k=3}^{27}3k + \sum_{k=3}^{27}3^k = \frac{3\cdot 3+3\cdot 27}{2}(27-3+1) + 3^3\sum_{k=0}^{24}3^k$$
$$= 1125 + 3^3\frac{3^{25}-1}{3-1} = 1125 + \frac{27}{2}(3^{25}-1).$$

Svar: $1125 + \dfrac{27}{2}(3^{25}-1)$.

4 Kombinatorik och binomialkoefficienter

Fakultet

Definition. Om n är ett naturligt tal definierar vi $n!$ enligt

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2, \quad n\geq 1,$$

och $0! = 1$.

Vi startar alltså med något positivt heltal n och multiplicerar sedan ihop samtliga heltal mindre än eller lika med n ned till och med 2. Alltså blir $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 3\cdot 2 = 6$, etc.

4.1 Kombinatorik

Multiplikationsprincipen: Om vi har en tvåstegsprocess av valmöjligheter, där vi i första steget har n_1 möjliga val och i det andra n_2 möjliga val, så finns det totalt sätt $n_1\cdot n_2$ kombinationer. Det brukar illustreras med så kallade träddiagram där varje ”löv” på trädet representerar en möjlighet. Antalet löv blir precis produkten ovan.

Exempel

En tre-rätters meny har 2 förrätter, 3 varmrätter, och 4 efterätter. Hur många olika måltider kan man beställa om man vill ha förrätt, varmrätt och efterätt?
Enligt multiplikationsprincipen blir det $2\cdot 3\cdot 4 = 24$ olika måltider.

Ordning

Vad menar vi med att ordna objekt? Till exempel, hur svarar vi på frågan ”på hur många sätt kan vi ordna siffrorna 1,2 och 3?”

Vi kan helt enkelt skriva ut varianterna:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & \quad & 2 & 1 & 3 & \quad & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & \quad & 2 & 3 & 1 & \quad & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

och ser att det finns 6 möjliga ordningar.

Detta är ett exempel på följande sats ($3! = 6$).

Permutationer

Sats. Om vi har n stycken olika objekt kan dessa ordnas på $n!$ olika sätt. Vi säger att det finns $n!$ olika *permutationer*.

Hur kan vi se detta? En variant är att vi helt enkelt placerar ut våra n objekt i en viss ordning och funderar över hur många val vi har i varje steg på samma sätt som menykonstruktionen ovan!
Vi ställer upp en lista med plats och skriver ut på hur många objekt vi har kvar att välja på i varje steg.

Plats 1	Plats 2	Plats 3	$\cdots$	Plats $n-1$	Plats n
n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	2	1

Multiplicerar vi ihop enligt multiplikationsprincipen ser vi att det blir precis $n!$ kombinationer.

4.2 Binomialkoefficienter

Något lite krångligare? Vi utnyttjar multiplikationsprincipen för att reda ut följande scenario. Om vi har 10 dörrar och ska öppna 6 stycken, på hur många sätt kan vi göra detta om ordningen (dvs i vilken ordning vi öppnar dörrarna) inte spelar någon roll? Vi har tio dörrar och skall välja ut sex st som öppnas:

Dörr 1	Dörr 2	Dörr 3	Dörr 4	Dörr 5	Dörr 6
10	9	8	7	6	5

Dörr 1 kan vi välja på 10 olika sätt. När vi sedan väljer dörr 2 finns det bara 9 kvar att välja på. Och så vidare. Ordningen på dörrarna är nu fixerad, och vi får (från multiplikationsprincipen) att det finns

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$$

sådana val. Detta är alltså svaret om vi vill göra skillnad på i vilken ordning dörrarna öppnas. När de sex dörrarna är valda kan vi variera ordningen mellan dessa 6 på 6! olika sätt:

Dörr 1	Dörr 2	Dörr 3	Dörr 4	Dörr 5	Dörr 6
6	5	4	3	2	1

Vi kan nu ta bort "multipla" dörrval (de kombinationer som bara skiljer sig åt med i vilken ordning sex st specifika dörrar ligger):

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \binom{10}{6}.$$

Detta uttryck kallas för en binomialkoefficient!

Binomialkoefficient

Definition. Om n och k är icke-negativa heltal så att $k \leq n$ så definieras *binomialkoefficienten* enligt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Exempel

Räkna ut $\binom{27}{25}$.

Detta gör vi direkt från definitionen:

$$\binom{27}{25} = \frac{27!}{25! \cdot 2!} = \frac{27 \cdot 26}{2} = 351.$$

Egenskaper för binomialkoefficienter

- $\binom{n}{k}$ är alltid heltal.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ då $n \geq 2$ och $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Exempel

Vid *Camp Crystal Lake* härjar en våldsverkare iklädd en hockeymask, låt oss kalla honom Jason. Jason planerar att mörda tre ungdomar en natt och har nio tillhyggen att välja på. Om vi bortser från ordningen på morden (alltså vem som blir mördad först etc), hur många unika mordserier kan Jason åstadkomma för dessa tre ungdomar om han använder precis ett tillhygge på varje individ (utan upprepning)?

Lösningen är enkel om vi bara abstraherar bort all text. Vi väljer alltså ut 3 objekt från 9 utan ordning. Detta kan göras på $\binom{9}{3}$ olika sätt enligt ovan, och

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84.$$

Svar. 84 olika sätt.

TATM79: Föreläsning 3
Binomialsatsen och komplexa tal

Johan Thim*

27 september 2015

1 Binomialsatsen

Ett minnestrick för att komma ihåg binomialkoefficienter (åtminstone för rimligt små n) är Pascals triangel:

Pascals triangel

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Denna konstruktion bygger på den rekursiva formeln $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ som gäller för vettiga val på n och k. Detta motsvarar alltså i triangeln ovan att varje siffra kan fås genom att summera de siffror som står närmast på raden ovanför. De möjliga k-värderna startar på 0 längst till vänster på varje rad med $\binom{n}{0}$. Sedan kommer $\binom{n}{1}$, följt av $\binom{n}{2}$, och så vidare, till slutligen $\binom{n}{n}$. Rad n har alltså $n+1$ siffror (kontrollera!); en siffra för varje möjligt värde på k. Till exempel så är $\binom{4}{3} = \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3+1 = 4$; kolla på raderna för $n = 4$ och $n = 3$. På så sätt kan vi rekursivt konstruera nästa rad om vi känner nuvarande rad.

*johan.thim@liu.se

Ibland skriver man Pascals triangel (som i boken) lite mer som en rätvinklig triangel i stället. Då blir det lite lättare att se hur k hänger ihop med allt:

Pascals (rätvinkliga) triangel

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$\cdots$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$							

En av de vanligaste tillämpningarna för binomialkoefficienter är binomialsatsen.

Binomialsatsen

Sats. Om n är ett ickenegativt heltal så gäller för alla x att

$$\begin{aligned}(x+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n.\end{aligned}$$

Bevis. Vi skriver ut parantesen:

$$(x+1)^n = \underbrace{(x+1)(x+1)\cdots(x+1)}_{n \text{ st}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Så hur bestämmer vi koefficienterna a_k? Om vi kikar närmare på produkten i mellanledet så ser vi att vi ur varje parantes kommer att välja ett x eller en etta när vi multiplicerar ihop allt. Om vi till exempel tittar på x^5 så ska vi alltså välja 5 stycken x och resten, dvs $n-5$ stycken ettor. Hur många sätt kan vi välja 5 objekt av n stycken utan ordning (ingen skillnad på olika x eller ettor)? Svaret är så klart binomialkoefficienten $\binom{n}{5}$, vilket då visar formeln i satsen ovan eftersom argumentet kan upprepas för varje k.

Exempel

$$\begin{aligned}(x+1)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k \\ &= \binom{5}{0} + \binom{5}{1} x + \binom{5}{2} x^2 + \binom{5}{3} x^3 + \binom{5}{4} x^4 + \binom{5}{5} x^5 \\ &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5\end{aligned}$$

Ofta ser man binomialsatsen på följande form:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

Detta kan visas med följande manipulation (såvida $b \neq 0$):

$$(a+b)^n = b^n \left(\frac{a}{b}+1\right)^n = b^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a}{b}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

En typisk användning av binomialsatsen är att identifiera vad koefficienten före en viss term är i en summa av typen i föregående exempel.

Exempel

Bestäm koefficienterna före x^8 och x^9 i uttrycket $\left(x+\frac{2}{x}\right)^{10}$.

Vi använder binomialsatsen och skriver

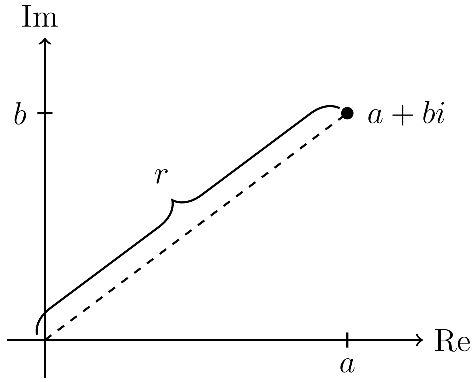
$$\begin{aligned}\left(x+\frac{2}{x}\right)^{10} &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k \left(\frac{2}{x}\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} x^{k-(10-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} x^{2k-10}.\end{aligned}$$

Vi ser att x får exponenten 8 om och endast om $2k-10=8 \Leftrightarrow k=9$. Koefficienten blir alltså $\binom{10}{9} 2^{10-9} = 20$. När dyker då x^9 upp? Vi skulle behöva $2k-10=9$, eller $k=19/2$. Detta är inget heltal mellan 0 och 10 (de heltal vi summerar över). Således saknas termen x^9, koefficienten är alltså noll.
Svar. 20 respektive 0.

2 Komplexa tal

Definition. Det imaginära talet i uppfyller att $i^2 = -1$.

Detta är alltså ett tal vars kvadrat är negativ. Det kan således aldrig vara ett reellt tal utan är ett helt nytt slags objekt. Vi inför de komplexa talen $z = a + bi$ där a och b är reella tal ($a, b \in \mathbf{R}$). Ett komplext tal har alltså två dimensioner, en reell koordinat a (kallas realdelen) och en *imaginär* koordinat b (kallas imaginärdelen). Vi kan representera det komplexa talplanet, vilket skrivs $\mathbf{C}$, som ett två-dimensionellt plan med en real-axel och en imaginär-axel.
Vi kan representera komplexa tal i det komplexa talplanet med figurer av denna typ.



Avståndet $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ har en naturlig tolkning och används som definition av det komplexa absolutbeloppet; vi återkommer till detta.

Komplexa tal uppfyller samma "regler" som reella tal gör (addition, multiplikation etc) med den extra förutsättningen att $i^2 = -1$.

När vi ska räkna med komplexa tal gör vi alltså som vanligt, men vi kan hela tiden förenkla uttryck som innehåller i^2.

Exempel

$$(2 - i)(1 + 4i) = 2 + 8i - i - 4i^2 = 2 + 7i + 4 = 6 + 7i.$$

Komplexa tal är en användbar konstruktion. I denna kurs och efterföljande analyskurs kommer vi att:

(i) Faktorisera polynom fullständigt i (komplexa) faktorer av grad 1.

(ii) Göra trigonometriska omskrivningar och förenklingar.

(iii) Beräkna integraler.

(iv) Lösa differentialekvationer.

Tillämpningar finns inom vitt skiljda områden som exempelvis elkretsteori, reglerteknik, transformer, elektromagnetism etc.

Definition. Låt $z = a + bi$, där $a, b \in \mathbf{R}$. Då definierar vi följande begrepp.

(i) **Realdelen** $\operatorname{Re} z = a$

(ii) **Imaginärdelen** $\operatorname{Im} z = b$ (observera att det inte är något i i imaginärdelen utan endast koefficienten före i i z)

(iii) **Absolutbeloppet** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

(iv) **Konjugatet** $\overline{z} = a - bi$ (vi har bytt tecken på imaginärdelen)

Direkta följder av definitionerna ovan inkluderar

(i) $|z|^2 = z\overline{z}$;

(ii) $|zw| = |z||w|$;

(iii) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;

(iv) $\text{Re } z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$; $\text{Im } z = \dfrac{z-\overline{z}}{2}$.

Vad menar vi då med att två komplexa tal är lika? Definitionen är ganska naturlig.

Likhet

Definition. Talen $z = a + bi$ och $w = c + di$ är lika om och endast om de har samma real- och imaginärdel, dvs att

$$a = c \qquad \text{och} \qquad b = d.$$

Vi skriver då att $z = w$.

Exempel

Hitta alla $z \in \mathbf{C}$ så att $3z - 2i\overline{z} - 5 + 10i = 0$.

Lösning. En variant för att lösa ekvationer som innehåller komplexa variabler är att ansätta att $z = a+bi$ och utnyttja definitionen ovan genom att undersöka realdelen och imaginärdelen för ekvationen som ett system av ekvationer med två obekanta. Denna metod är inte alltid den bästa. Det kan bli brutalt hemska kalkyler (om vi till exempel skulle ha $z^7 + \cdots$ eller dylikt), så finns det en annan metod brukar det vara den det är meningen att använda. Men i fall som denna ekvation blir det faktiskt enklast. Sålunda, låt $z = a + bi$ där $a, b \in \mathbf{R}$. Då måste

$$\begin{aligned} 3(a+bi) - 2i\overline{(a+bi)} - 5 + 10i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3a + 3bi - 2ai - 2i(-bi) - 5 + 10i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3a - 2b + i(3b - 2a) = 5 - 10i. \end{aligned}$$

Vi undersöker nu realdel och imaginärdel separat:

$$\begin{cases} 3a - 2b = 5 \\ -2a + 3b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -5 \\ 3a - 2b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$$

Alltså ges den enda lösningen av $z = -1 - 4i$. Kontrollera detta!
Svar. $z = -1 - 4i$.

Absolutbelopp

Observera att absolutbeloppet vi definierat ovan täcker en större klass tal än det vi såg på förra föreläsningen. Om $z = a + bi$ är reell så är $b = 0$, och då kan vi beräkna att $|z| = \sqrt{a^2 + 0}$. Vi vet enligt tidigare att $\sqrt{a^2} = |a|$, där detta belopp är det vi introducerade på föreläsning två. Den nya definitionen reduceras alltså till den gamla om vi endast betraktar reella tal.

En kuggfråga som blir fel ibland.

Komplext eller reellt belopp?

Bestäm $|3-4|$.

Felet som kan inträffa är att man slarvigt tänker sig att $3-4$ är ett komplext tal och bildar $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$. Detta är så klart helt galet; vi ser direkt att $3-4=-1$, så $|3-4| = |-1| = 1$.

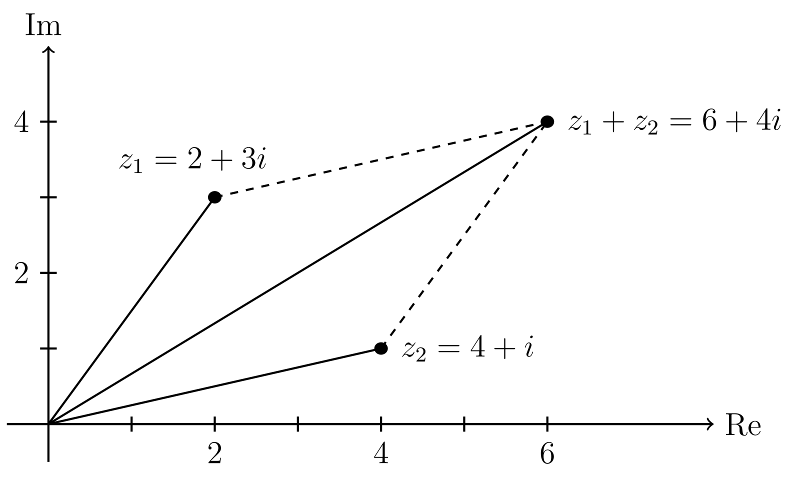
Definition. Om $z, w \in \mathbf{C}$ och $w \neq 0$ så definierar vi $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\overline{w}}{w\overline{w}}$.

Exempel

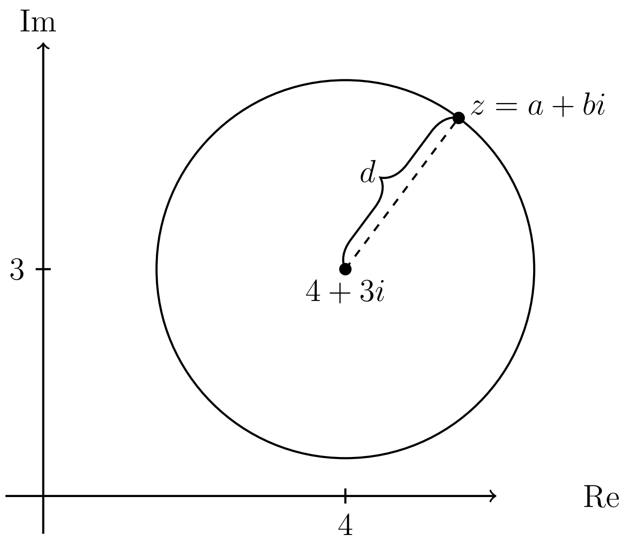
$$\frac{3-i}{2+3i} = \frac{(3-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{9-11i}{4+9} = \frac{9}{13} - \frac{11}{13}i.$$

2.1 Geometriska tolkningar

Eftersom komplexa tal kan representeras som punkter i ett plan så kan vi ibland tolka operationer, olikheter och ekvationer geometriskt. Till att börja med kan addition av komplexa tal göras som vektoraddition.



Om $z, z_0 \in \mathbf{C}$ så kommer till exempel samband av typen $|z-z_0| = d$ och $|z-z_0| \leq d$ att representera en cirkel respektive en ifylld disk.



Hur kan vi se detta? Vi kan ansätta att $z = a + bi$ och $z_0 = a_0 + b_0 i$ där $a, b, a_0, b_0 \in \mathbf{R}$ och se vilken form uttrycken tar. Till exempel:

$$d^2 = |z - z_0|^2 = |a + bi - a_0 - b_0 i|^2 = |(a - a_0) + (b - b_0)i|^2 = (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2,$$

något vi känner igen som cirkelns ekvation!

2.2 Triangelolikheten

En mycket användbar olikhet (så användbar att man ofta kräver att mer abstrakta rum ska ha denna egenskap) är triangelolikheten.

Triangelolikheten

Om $z, w \in \mathbf{C}$ så gäller att $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Geometriskt är detta ganska klart. Uttrycken $|z|$ och $|w|$ kan tolkas som katetlängderna i en triangel där längden på hypotenusan ges av $|z+w|$. Försök rita en triangel där hypotenusan är längre än summan av kateternas längder! Det går även att visa rent algebraiskt. Tanken bygger på att visa $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$. Utveckla vänsterledet som $(z + w)\overline{(z + w)}$ och utnyttja att $\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z\bar{w}|$ (varför är detta sant?).

Exempel

Antag att z ligger i en disk med centrum i punkten $3i$ och radie 7. Visa att z ligger i en disk med centrum i punkten -4 och radie 12.

Vi börjar med att formulera det hela med belopp. Vi vet att $|z - 3i| \leq 7$ då detta är precis den olikhet som beskriver att z ligger i en disk med centrum i punkten $3i$ och radie 7. Sen vill vi undersöka $|z - (-4)|$:

$$|z + 4| = |(z - 3i) + (3i + 4)| \leq |z - 3i| + |3i + 4| \leq 7 + |3i + 4| = 7 + \sqrt{9 + 16} = 12.$$

Här har vi kreativt lagt till noll i form av $-3i + 3i$ för att på så sätt skapa $z - 3i$, som vi sedan kan uppskatta.

2.3 Andragradsekvationer med komplexa koefficienter

Exempel

Finn alla (reella och komplexa) lösningar till ekvationen $z^2 + 2(1+i)z - 3 - 2i = 0$.

Lösning. Vi kvadratkompletterar för att få en enklare ekvation:

$$z^2 + 2(1+i)z - 3 - 2i = (z+1+i)^2 - (1+i)^2 - 3 - 2i = (z+1+i)^2 - 3 - 4i = 0.$$

Låt $w = z + 1 + i$ och skriv $w = a + bi$ där $a,\ b \in \mathbf{R}$. Vi löser

$$w^2 - 3 - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2abi - b^2 - 3 - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ \quad 2ab = 4 \end{cases}$$

Alternativ 1. Eftersom $w^2 = 3 + 4i$ så måste $|w^2| = |3 + 4i| = \sqrt{25} = 5$. Nu vet vi att $w = a + bi$, så $|w^2| = |w|^2 = a^2 + b^2$. Alltså är $a^2 + b^2 = 5$. Det följer då att $2a^2 = 8$, eller att $a = \pm 2$.

Alternativ 2. Vi ser att $a,\ b \neq 0$ och att $b = 2/a$. Då måste $a^2 - (2/a)^2 = 3 \ \Leftrightarrow \ a^4 - 4 = 3a^2$ gälla (ekvivalens ty $a \neq 0$). Vi låter $t = a^2$ och ser att

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-4)(t+1) = 0.$$

Endast $t = 4 \ \Leftrightarrow a = \pm 2$ ger intressanta lösningar då $t = a^2 > 0$.

Om $a = 2$ så blir $b = 1$ och om $a = -2$ blir $b = -1$. Vi får alltså lösningarna $w_1 = 2 + i$ och $w_2 = -2 - i$, vilket i sin tur ger $z_1 = 1$ och $z_2 = -3 - 2i$.

Svar: $z = 1$ och $z = -3 - 2i$.

Genomför även en kontroll!

TATM79: Föreläsning 4
Polynomekvationer och funktioner

Johan Thim*

16 augusti 2015

1 Polynomekvationer

Vi börjar med att upprepa definitionen av ett polynom.

Polynom

Definition. Ett polynom $p(z)$ är ett uttryck av typen

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

där $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är konstanter och n ett icke-negativt heltal. Om $a_n \neq 0$ säger vi att polynomet har *grad* n.

Det är en liten skillnad i jämförelse med föreläsning 1: vi har ersatt variabeln x med variabeln z. Detta har vi gjort för att markera att vi kommer att arbeta med komplexa tal. Faktorsatsen gäller fortfarande.

Faktorsatsen

Sats. Följande två påståenden är ekvivalenta.

(i) Polynomet $p(z)$ innehåller faktorn $z - z_0$, det vill säga $p(z) = (z - z_0)q(z)$ för något polynom $q(z)$.

(ii) $z = z_0$ är ett nollställe till $p(z)$, det vill säga att $p(z_0) = 0$.

Algebrans fundamentalsats

Sats. Varje polynomekvation $p(z) = 0$ med grad $n \geq 1$ har minst en rot.

Ett korrollarie till denna sats är att ett polynom $p(z)$ av grad n har precis n stycken rötter om vi räknar med multiplicitet (dvs en dubbelrot räknas som två rötter etc).

*johan.thim@liu.se

Exempel

Polynomet

$$p(z) = 4z^2(z-1)(z+\sqrt{2})(z+i)^3$$

har grad $n = 7$ (varför?) och har rötterna $z = 0$ (dubbelrot), $z = 1$, $z = -\sqrt{2}$, samt $z = -i$ (trippelrot).

Komplexkonjugerade rotpar

Sats. Om ett polynom $p(z)$ har **reella koefficienter** (viktigt) och $z = a + bi$ är en rot så är även $z = a - bi$ en rot. Med andra ord,

$$p(z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(\overline{z_0}) = 0$$

då $p(z)$ har rella koefficienter.

Reella koefficienter

Observera att denna sats endast gäller då $p(z)$ har reella koefficienter. Till exempel $p(z) = z^2 - iz$ har roten $z = i$, men $z = -i$ är ingen rot. Testa!

Exempel

Faktorisera polynomet $p(z) = 3z^4 - 15z^3 + 24z^2 - 18z$ fullständigt i komplexa faktorer.

Lösning.
Vi börjar med att bryta ut $3z$ och får att $p(z) = 3zq(z)$, där $q(z) = z^3 - 5z^2 + 8z - 6$. Vi gissar sedan en rot, och finner att $p(3) = q(3) = 0$. Alltså måste $z - 3$ vara en faktor i $q(z)$. Polynomdivision ger att $q(z) = (z-3)(z^2 - 2z + 2)$:

$$\begin{array}{r|r}
 & z^2 - 2z + 2 \\ \hline
z - 3 & z^3 - 5z^2 + 8z - 6 \\
 & -z^3 + 3z^2 \phantom{{}+8z-6} \\ \hline
 & -2z^2 + 8z \phantom{{}-6} \\
 & 2z^2 - 6z \phantom{{}-6} \\ \hline
 & 2z - 6 \\
 & -2z + 6 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

Det återstår sålunda att finna rötterna till $z^2 - 2z + 2$. Vi löser ekvationen

$$0 = z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 - 1 + 2 = (z-1)^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)^2 = -1,$$

varvid vi ser att $z - 1 = \pm i$ är de enda möjligheterna. Alltså finner vi lösningarna $z = 1 \pm i$, och vi kan skriva $z^2 - 2z + 2 = (z - (1+i))(z - (1-i))$. Vi kan nu faktorisera $p(z)$ fullständigt enligt

$$p(z) = 3z(z-3)(z-(1+i))(z-(1-i)).$$

Svar: $p(z) = 3z(z-3)(z-(1+i))(z-(1-i))$
Observera att det inte finns några kvadratrötter ur negativa (eller tal med imaginärdel) i lösning! Rötterna dyker upp direkt vid ekvationslösningen.

2 Funktioner

Vad är egentligen en funktion?

Definition. En funktion f är en regel som till varje punkt x i en definitionsmängd D_f tilldelar precis ett y enligt sambandet $y = f(x)$.

Denna definition kan göras lite mer ordentlig med så kallade relationer på mängder, men vi överlämnar detta till senare kurser. Observera här att vi inte sagt något om att definitionen bara gäller reella tal. Eller ens tal överhuvudtaget! Det kunde lika gärna handla om apelsiner eller solar ute i rymden. För vår del (i denna kurs) kommer vi i princip bara att betrakta reellvärda funktioner (där $y \in \mathbf{R}$ alltså), och oftast är även $x \in \mathbf{R}$ (eller någon delmängd). Ett undantag är faktiskt polynomen $p(z)$ som vi diskuterade ovan, där $z \in \mathbf{C}$ generellt sätt.

Funktion och funktionsvärde

Observera att det är f som är funktionen. Uttrycket $f(x)$ är det värde funktionen antar i punkten $x \in D_f$. Det är alltså ganska slarvigt att skriva uttryck i stil med ”funktionen $f(x)$”, men vi tillåter oss göra det ibland.

Värdemängd

Definition. En funktions värdemängd V_f definieras som alla möjliga y-värden vi kan få ur sammbandet $y = f(x)$,

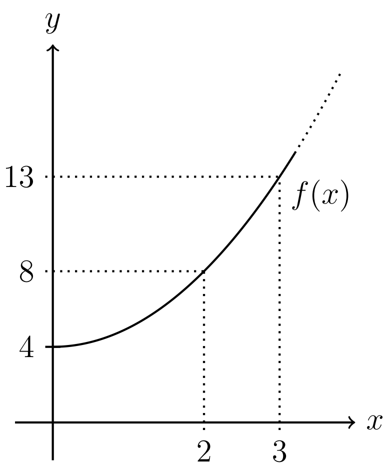
$$V_f = \{y = f(x) : x \in D_f\}.$$

Generellt sett kan värdemängden vara svår att bestämma för en generell funktion. Vissa verktyg kommer att introduceras i envariabelanalysen, men för oss just nu är vi begränsade till ganska enkla funktioner. Till exempel vissa enkla polynom kan vi enkelt rita upp och se vad värdemängden blir.

Exempel

Låt $f(x) = 4 + x^2$ för $x \geq 0$. Bestäm V_f och rita upp funktionen.

Skissa upp funktionen kan vi till exempel göra med en klassisk värdetabell för att få en uppfattning. Sen är det ett polynom så det beter sig ganska snällt.



x	$y = 4 + x^2$
0	4
1	5
2	8
3	13
4	20
...	...

Det som är bra med en bild här är att vi direkt kan se att varje y-värde större än eller lika med 4 kan träffas av (precis ett) x-värde. Till exempel så blir $y = 5$ precis då $5 = 4 + x^2$, dvs då $x^2 = 1$. Eftersom D_f ges av villkoret $x \geq 0$ så är det bara $x = 1$ som passar.
Svar. $V_f = [4, \infty[$.

Figuren ovan brukar kallas **grafen** för funktionen f. Formellt så är grafen en mängd av punkter (x, y) där $y = f(x)$ som beskriver hur definitionsmängd och värdemängd hänger ihop, men för vår del räcker det med att betrakta grafen som en ritad figur där vi ser hur x och y-värden hänger ihop.

Exempel

Låt $f(x) = \sqrt{3 - x^2 - 2x}$. Bestäm D_f och V_f.

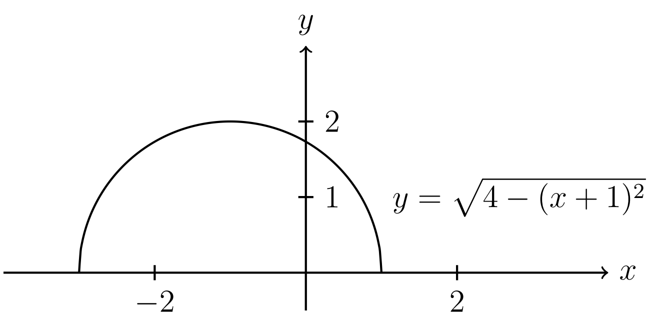
Borde inte D_f vara angiven? Inte nödvändigtvis. Om inget står brukar vi anta att D_f är största möjliga mängd där f är naturligt definierad. I detta fall är detta när kvadratroten är definierad. Hur reder vi ut när detta sker? Vi börjar med att analysera det som står i rottecknet. Det är ett polynom av grad två, så en vettig start är att kvadratkomplettera:

$$3 - x^2 - 2x = 3 - (x^2 + 2x) = 3 - ((x + 1)^2 - 1) = 4 - (x + 1)^2.$$

Eftersom kvadratorten bara är definierad för icke-negativa argument så måste $4-(x+1)^2 \geq 0$. En teckentabell visar att $-3 \leq x \leq 1$ är nödvändigt. Så vilka y-värden kan vi få ut? Vi försöker lösa ekvationen $y = f(x)$:

$$y = \sqrt{4 - (x + 1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 = 4 - (x + 1)^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Detta är inget annat än ekvationen för övre delen av en cirkel med radie 2 och centrum i $(-1, 0)$. Största möjliga värde är alltså 2 (när $x = -1$) och minsta möjliga värde är 0 (när $x = -3$ eller $x = 1$). En figur där det mesta vi precis räknat ut kan utläsas direkt (men man måste så klart få upp figuren på något sätt också).



Svar. $D_f = [-3, 1]$ och $V_f = [0, 2]$.

Vad händer om vi sätter ihop två funktioner?

Sammansättning

Definition. Sammansättning $f \circ g$ av två funktioner f och g defineras av sambandet $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ där detta uttryck har mening.

Exempel

Låt $g(x) = 1 - x^2$ och $f(x) = \sqrt{x}$. Jämför $f \circ g$ och $g \circ f$.

Ser vi på f och g separat så är $D_f = [0, \infty[$ och $D_g = \mathbf{R}$. Om vi betraktar $f \circ g$ så måste $1 - x^2 \geq 0$, eller ekvivalent, $-1 \leq x \leq 1$. Så,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{för } -1 \leq x \leq 1,$$

och

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x \quad \text{för } x \geq 0.$$

Observera att vi får både olika sammansatta uttryck och olika definitionsmängder för $f \circ g$ och $g \circ f$. Ordningen är alltså mycket viktig både för värdet och definitionsmängd för den sammansatta funktionen!

Monotonicitet

Definition. En funktion kallas

(i) **växande** om $x_1 \leq x_2$ medför att $f(x_1) \leq f(x_2)$;

(ii) **strängt växande** om $x_1 < x_2$ medför att $f(x_1) < f(x_2)$;

(iii) **avtagande** om $x_1 \leq x_2$ medför att $f(x_1) \geq f(x_2)$;

(iv) **strängt avtagande** om $x_1 < x_2$ medför att $f(x_1) > f(x_2)$;

(v) **monoton** om f är växande eller avtagande;

(vi) **strängt monoton** om f är strängt växande eller strängt avtagande.

Avtagande eller icke-växande?

I litteraturen är uttrycket avtagande/växande inte entydigt bestämt. I vissa fall (som vi definierat det) innebär till exempel avtagande att vi endast har $\leq$, så en konstant funktion uppfyller detta villkor. Verkar det vettigt att kalla en konstant funktion för både växande och avtagande? Det är en definitionsfråga. Ett vettigare uttryck är egentligen icke-växande. Var försiktig om ni läser andra böcker!

Så hur visar man att något är, till exempel, strängt växande? I envariabelanalyskursen kommer ni att lära er andra metoder, men i detta fall är vi tvugna att visa att olikheten i föregående definition är uppfylld. Vi betraktar ett exempel.

Exempel

Visa att $f(x) = x^3$ är strängt växande.

Lösning. Vi undersöker $f(x_2) - f(x_1)$ och visar att detta uttryck är strikt större än noll om $x_1 < x_2$. Vi ser att $x_1 - x_2$ borde vara en faktor så vi försöker faktorisera:

$$\begin{aligned} x_2^3 - x_1^3 &= (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2)) \\ &= (x_2 - x_1)((x_1 - x_1/2)^2 + 3x_1/2)^2) > 0 \end{aligned}$$

ty $(x_1 - x_2/2)^2 + 3x_1^2/2 > 0$ och $x_2 > x_1$.

Injektivitet

Definition. En funktion f kallas **injektiv** (eller **ett-till-ett**) om det till varje $x \in D_f$ finns precis ett $y \in V_f$ så att $y = f(x)$. Eller ekvivalent:

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Invers

Definition. Om f är injektiv så har f en invers f^{-1} så att

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

Hur hittar vi då inversen (om den finns)? Vi löser helt enkelt ut x ur ekvationen $y = f(x)$.

Exempel

Finn inversen, om den finns, till $f(x) = \sqrt{4 - (x+1)^2}$ för $x \geq -1$.

Lösning. Vi försöker helt enkelt att lösa ut x ur ekvationen $y = f(x)$:

$$y = \sqrt{4-(x+1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 = 4 - (x+1)^2, \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4, \\ \qquad\qquad\quad y \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -1 + \sqrt{4 - y^2}$$

Eftersom vi bara får ett svar så finns inversen. Skulle vi erhålla något i stil med $x = \pm \cdots$ så det finns flera möjligheter så finns det ingen invers.
Svar. $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{4 - x^2}$.

Exempel

Låt $f(x) = 4 + x^2$ där $D_f = \mathbf{R}$. Undersök om f är injektiv.

Lösning. Nej, f kan inte vara injektiv. Kvadraten är ett vanligt tecken på att en funktion inte är injektiv om D_f innehåller viss symmetri kring nollan. Specifikt, till exempel $f(-1) = 4 + (-1)^2 = 4 + (1)^2 = f(1)$. Alltså är f inte injektiv.

Udda och jämn funktion

Definition. En funktion f är **udda** om $f(-x) = -f(x)$ för alla x. En funktion f är **jämn** om $f(-x) = f(x)$ för alla x.

Exempel

(i) Funktionerna 1, $4 + x^2$, $\cos x$, $\ldots$, är jämna.

(ii) Funktionerna x, x^3, $\sin x$, $1/x$, $\ldots$, är udda.

Observera att en funktion f varken behöver vara udda eller jämn. De flesta funktioner är varken eller. Till exempel $f(x) = 1 + x + x^2$. Rita figur!

TATM79: Föreläsning 5
Trigonometri

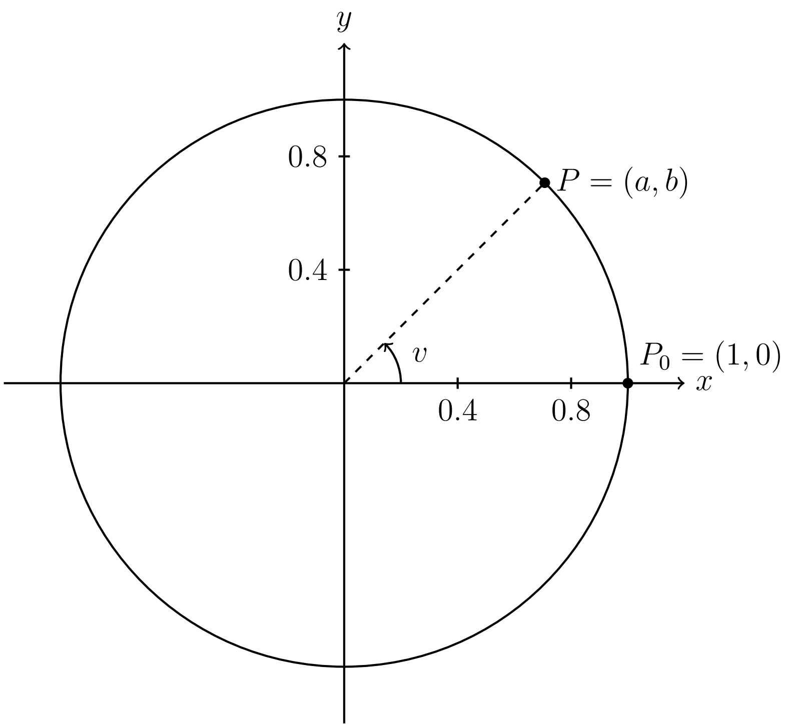
Johan Thim*

16 augusti 2015

1 Enhetscirkeln

Definition. Enhetscirkeln är cirkeln med centrum i origo och radie ett.

En punkt $P = (a, b)$ på enhetscirkeln uppfyller alltså $a^2 + b^2 = 1$.



Vinkel

Definition. Vinkeln v definieras som båglängden från P_0 till P i positiv led (moturs).

Det följer alltså att ett varv motsvaras av vinkeln 2π (cirkelns omkrets).

*johan.thim@liu.se

Sinus och cosinus

Definition. Vi definierar funktionerna sin och cos genom

$$\sin v = b \qquad \text{och} \qquad \cos v = a.$$

Definition. Funktionerna tan och cot definierar vi genom

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}, \quad \text{då } v \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ för alla } n \in \mathbf{Z}$$

och

$$\cot v = \frac{\cos v}{\sin v}, \quad \text{då } v \neq n\pi \text{ för alla } n \in \mathbf{Z}.$$

Följder från dessa definitioner (sådant vi kan se ur enhetscirkeln).

(i) Trigonometriska ettan: $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$;

(ii) $\sin(v + 2\pi n) = \sin v$ och $\cos(v + 2\pi n) = \cos v$ för $n \in \mathbf{Z}$;

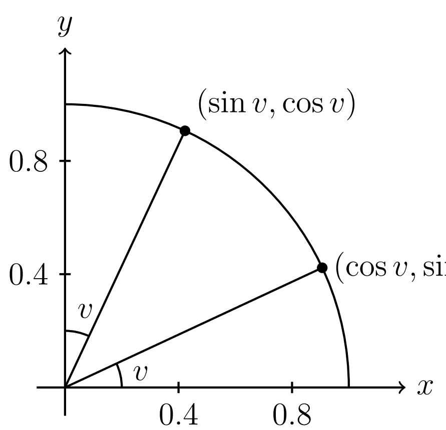
(iii) $\sin(v+\pi) = -\sin v$, $\cos(v+\pi) = -\cos v$, $\tan(v+\pi) = \tan v$ och $\cot(v+\pi) = \cot v$;

(iv) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v$ och $\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin v$;

(v) $\cos(-v) = \cos v$ och $\sin(-v) = -\sin v$;

(vi) $\cos(\pi - v) = -\cos v$ och $\sin(\pi - v) = \sin v$.

Till exempel punkt (iv) kan vi se ur följande figur.



Övriga samband kan illustreras på liknande sett (övning!)

Paranteser?

Som vi redan sett skriver vi ibland $\sin v$ och ibland $\sin(v)$. Tanken är att om det inte råder någon tvetydighet om vad som är argumentet till funktionen så skriver vi inte ut parantsen. Uttrycket $\sin \pi/3$ är tydligt medan $\sin \pi/3 + \pi/2$ inte är lika klart. Om det inte är självklart vad uttrycket betyder, skriv ut paranteser! Men gör det inte i onödan för då blir uttrycken svårlästa med många paranteser.

1.1 Trigonometriska ekvationer

Följande samband kan ses direkt ur enhetscirkeln.

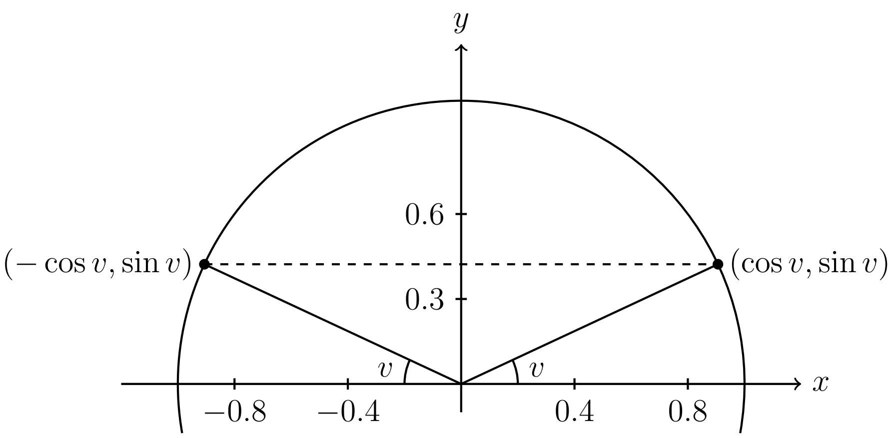
(i) $\sin u = \sin v \quad \Leftrightarrow \quad u = v + 2\pi n$ eller $u = \pi - v + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

(ii) $\cos u = \cos v \quad \Leftrightarrow \quad u = \pm v + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

(iii) $\tan u = \tan v \quad \Leftrightarrow \quad u = v + \pi n,\ u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k, n \in \mathbf{Z}$;

(iv) $\cot u = \cot v \quad \Leftrightarrow \quad u = v + \pi n,\ u \neq k\pi,\ k, n \in \mathbf{Z}$.

Till exempel (i) kan illustreras med följande figur.



Det finns alltså två "sätt" att få ett visst värde på sinus, den "naturliga" vinkeln v men även $\pi - v$. Sen kan vi så klart snurra runt hur många varv vi vill för att hitta andra vinklar, men dessa två är principlösningarna.

Exempel

Finn alla $x \in \mathbf{R}$ så att $\sin 2x = \cos 3x$.

Lösning. Om vi hade haft samma trig-funktion på båda sidorna i likheten så hade vi kunnat använda sammbanden ovan. Kan vi komma dit? Visst går det, på flera olika sätt. En variant är att utnyttja att $\cos v = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)$ och därmed att ekvationen kan skrivas

$$\begin{aligned}
\sin 2x = \cos 3x \quad &\Leftrightarrow \quad \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi n \text{ eller } 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2\pi n.
\end{aligned}$$

Fall 1:

$$2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad 5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}.$$

Fall 2:

$$2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2\pi n. \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi n.$$

Här finns flera saker att kommentera. Variabeln n antar alla heltal $\mathbf{Z}$ (alltså $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), så om vi har $+2\pi n$ eller $-2\pi n$ spelar egentligen ingen roll, så den sista likheten kan lika gärna skrivas

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Sen kan det visa sig att vissa vinklar förekommer både i fall 1 och fall 2, så vill man snygga till svaret så måste det undersökas. I vårt fall ser vi att för att få $-\pi/2$ i fall 1 måste

$$\frac{1+4n}{10} = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2n = -3,$$

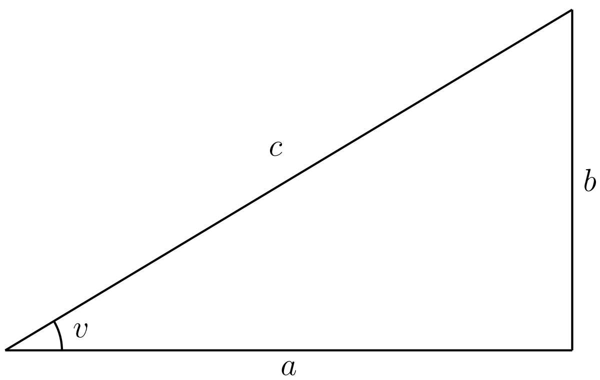
vilket inte kan hända då n är heltal. Lösningarna överlappar alltså inte.

Svar: $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5}$ och $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ där $n \in \mathbf{Z}$.

Alternativt hade man kunnat byta ut $\sin 2x$ mot $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$.

2 Trigonometriska funktionsvärden

Vissa standardvinklar förväntas vi kunna sinus, cosinus etc för mer eller mindre utantill. Vilka? Vi betraktar fallet då vinkeln ligger i intervallet $\left]0, \pi/2\right[$. I detta fall kan vi använda trianglar för att reda ut vissa vinklar. Låt oss undersöka en rätvinklig triangel.



Här är

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

och

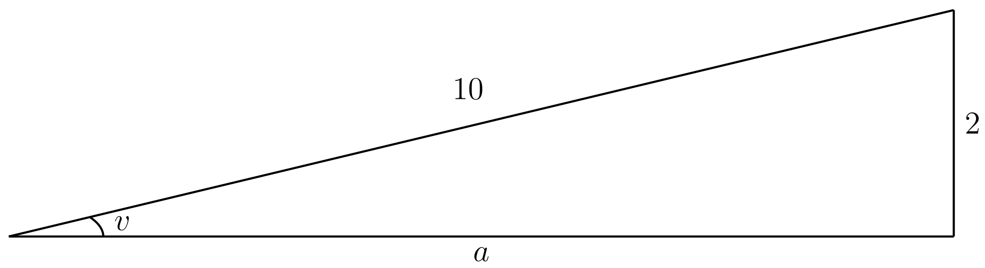
$$\sin v = \frac{b}{c}, \quad \cos v = \frac{a}{c},$$
$$\tan v = \frac{b}{a}, \quad \cot v = \frac{a}{b}.$$

Alltså kan vi använda en sådan triangel och via pythagoras räkna ut till exempel $\sin v$ om vi känner $\cos v$. Hur då?

Exempel

Om $\sin x = 0.2$ och $0 < x < \pi/2$, vad är $\cos x$ och $\tan x$?

Lösning. Eftersom x ligger mellan 0 och $\pi/2$ så kan vi använda en hjälptriangel.



Pythagoras medför att $a^2 = 10^2 - 2^2 = 96$, så $a = \sqrt{96}$ (givet att $a > 0$). Alltså kan vi direkt säga att $\cos x = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{96}}{10}$ och $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2/10}{\sqrt{96}/10} = \frac{2}{\sqrt{96}}$.

Svar: $\cos x = \frac{\sqrt{96}}{10}$ och $\tan x = \frac{2}{\sqrt{96}}$.

Exempel

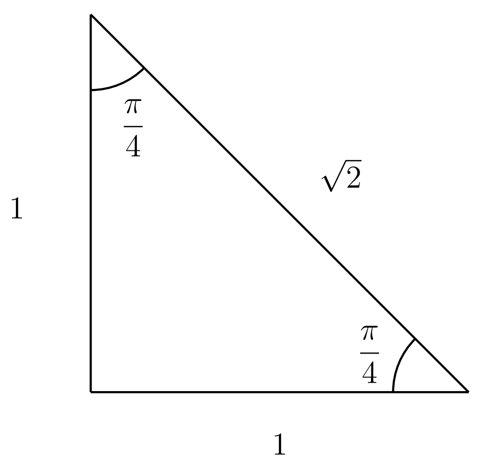
Om $\sin x = 0.2$ och $\pi/2 < x < \pi$, vad är $\cos x$ och $\tan x$?

Lösning. Är det samma svar som ovan? Observera att längderna i en hjälptriangel måste ha positiv storhet! Dvs att $a, b, c > 0$.

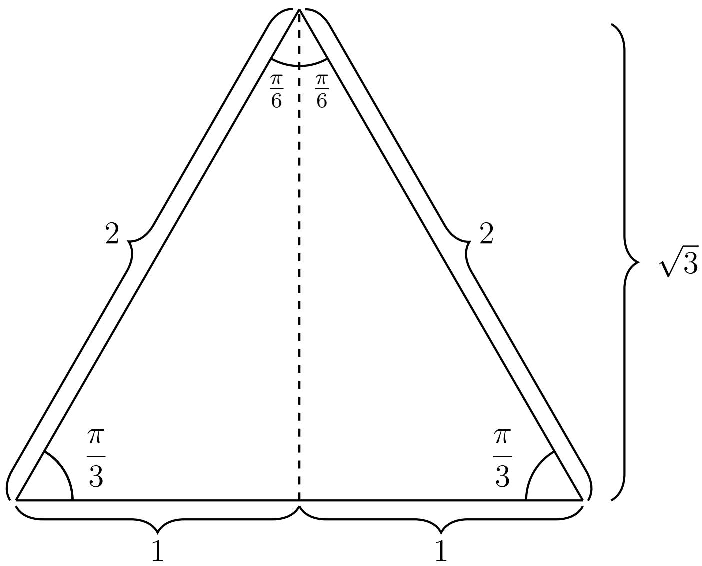
2.1 Standardvinklar

I en rätvinklig triangel med samma katetlängd (till exempel 1, men båda kateterna av längd 2 eller $\sqrt{731}$ går också bra) så är en vinkel (den räta) $\pi/2$ medan de andra två måste vara lika stora, så $\pi/4$.

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Om vi istället konstruerar en likbent triangel där alla sidor är lika långa (till exempel 2) så måste alla ingående vinklar vara lika stora, dvs $\pi/3$. Om vi delar triangeln i två lika stora delar från ett hörn till mitten på motstående sida så uppstår två rätvinkliga trianglar enligt figuren nedan.



Ur denna triangel kan vi utläsa att

$$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad \sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

3 Additionsformlerna

Additionsformlerna

$$\sin(u+v) = \sin u\cos v + \cos u \sin v$$
$$\sin(u-v) = \sin u\cos v - \cos u \sin v$$
$$\cos(u+v) = \cos u\cos v - \sin u \sin v$$
$$\cos(u-v) = \cos u\cos v + \sin u \sin v$$

Det räcker att visa den första likheten, resten följer av enkla trigonometriska sammband vi redan känner till. Bevisen kan återfinnas i boken (men vi kommer visa sammbanden med hjälp av komplexa tal senare). Ett par intressanta specialfall. Formler för dubbla vinkeln

$$\sin 2x = 2\cos x \sin x \quad \text{och} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

och omvänt

$$\sin^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{2} \quad \text{och} \quad \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}.$$

Dessa formler är mycket användbara när det gäller att lösa trigonometriska ekvationer, och som ni kommer att se, även när ni skall integrera vissa uttryck i envariabelanalysen! Tangens då? Jodå, via formlerna ovan kan vi ställa upp följande sammband.

Additionsformel för tangens

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} \quad \text{och} \quad \tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}.$$

Exempel

Finn det exakta värdet för $\tan \frac{\pi}{12}$.

Lösning. Tricket här är att försöka dela upp vinkeln som en summa av kända standardvinklar. Således,

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

och därmed måste

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})^2.$$

Exempel

Lös ekvationen $\cos 2x + 2\sin x - 2\sin x \cdot (1 + \cos 2x) = 1$.

Lösning. Exemplet kanske ser lite avskräckande ut, men vi försöker oss på att skriva om med lite trig-ekvationer och se om det trillar ut något enklare. Ett tips är att försöka se till att man bara har en ”sorts” trigonometrisk funktion i uttrycket. Vi vet att $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ och att $1 + \cos 2x = 2\sin^2 x$, så ekvationen är ekvivalent med

$$1 - 2\sin^2 x + 2\sin x - 2\sin x(2\sin^2 x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 2\sin x = 0$$

Om vi låter $t = \sin x$ (för att enklare se vad vi arbetar med) så ser vi att

$$4t^3 + 2t^2 - 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t(2t^2 + t - 1) = 0.$$

Så $t = 0$ är en lösning. Vi faktoriserar andragradaren:

$$2t^2 + t - 1 = 2(t^2 + t/2 - 1/2) = 2((t + 1/4)^2 - 9/16) = 2(t+1)(t - 1/2),$$

så de övriga lösningarna ges av $t = -1$ och $t = 1/2$. Vi har alltså tre olika fall.

Fall 1: Om $t = 0$ så är

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = n\pi.$$

Fall 2: Om $t = -1$ så är

$$\sin x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

Fall 3: Om $t = 1/2$ så är

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \text{ eller } x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi.$$

Svar: $x = n\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ och $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, där $n \in \mathbf{Z}$.

TATM79: Föreläsning 6
Logaritmer och exponentialfunktioner

Johan Thim*

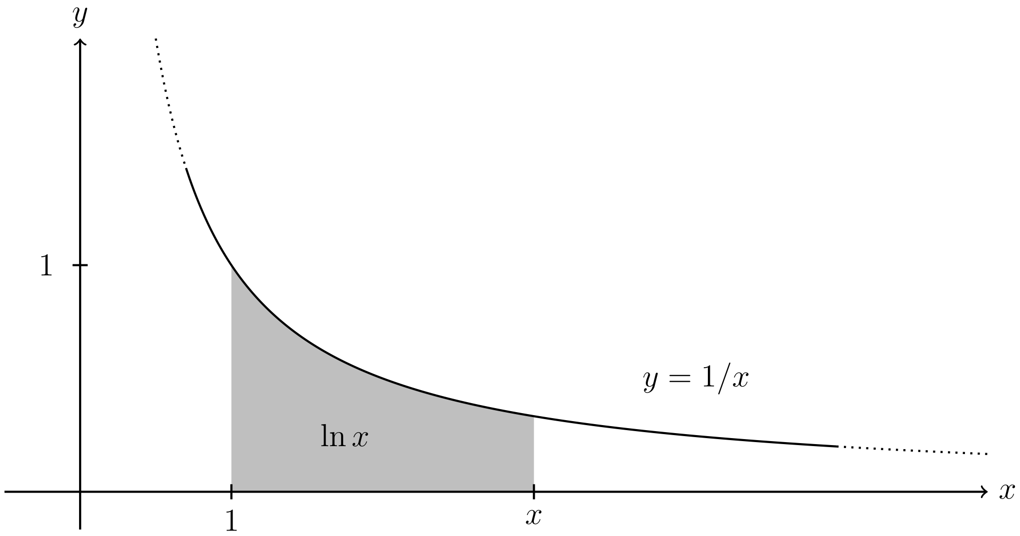
9 september 2015

1 Den naturliga logaritmen

Vi börjar med att introducera den naturliga logaritmen.

Definition. Den naturliga logaritmen $\ln x$ för $x > 0$ definieras som $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

Här ser vi att vi använder integralbegreppet utan att direkt ha definierat det innan. Vi återkommer till detta i envariabelanalysen när Riemann-integralen behandlas. Förhoppningsvis kommer vi ändå ihåg att man kan tolka en bestämd integral som arean under kurvan.



*johan.thim@liu.se

Egenskaper

Den naturliga logritmen har bland annat följande egenskaper:

(i) $D_{\ln} =]0, \infty[$ och $V_{\ln} = \mathbf{R}$;

(ii) $\ln xy = \ln x + \ln y$ för $x, y > 0$;

(iii) $\ln x < x - 1$ för $x > 0$ och $x \neq 1$;

(iv) $\ln 1 = 0$;

(v) $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$ för $x, y > 0$;

(vi) $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$ för $x > 0$;

(vii) $\ln x^p = p \ln x$ för $x > 0$ och $p \in \mathbf{Z}$.

De första tre egenskaperna behöver visas från definitionen medan övriga egnenskaper följer från dessa tre. Till exempel kan vi se att $\ln x = \ln(x \cdot 1) = \ln x + \ln 1$, så $\ln 1 = 0$ är nödvändigt. Vi kan även se detta direkt från definitionen via Riemann-integralen så klart. Vidare,

$$\ln x = \ln\left(\frac{x}{y} y\right) = \ln \frac{x}{y} + \ln y,$$

vilket bevisar (v). Egenskap (vi) är ett specialfall av (v) och (vii) kan visas genom att betrakta $x^p = x \cdot x \cdots x$ och utnyttja (ii) (och (vi) då $p < 0$). Observera att vi inte kan säga något om fallet då p ej är ett heltal i nuläget; vi återkommer strax till detta.

Dessa egenskaper kan också användas för att visa en användbar olikhet för att ”stänga in” logaritmen.

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1, \quad \text{för } x > 0 \text{ och } x \neq 1.$$

Vi kan även använda denna egenskap för att visa att $\ln x < 0$ då $0 < x < 1$ och $\ln x > 0$ då $x > 1$, även om detta också är tämligen klart från Riemann-integralen.

Övriga samband kan illustreras på liknande sett (övning!)

Den naturliga logaritmen ln är strängt växande.

Bevis. Låt $x_2 > x_1 > 0$. Då är $\dfrac{x_2}{x_1} > 1$, så

$$0 < \ln \frac{x_2}{x_1} = \ln x_2 - \ln x_1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x_1 < \ln x_2.$$

Alltså är ln strängt växande.

> **Exempel**
>
> Lös ekvationen $\ln(x+1) = \ln(5+x) - \ln(x+2)$ för $x \in \mathbf{R}$.

Lösning. För att alla ingående uttryck ska vara definierade krävs att $x+1 > 0$, $5+x > 0$, och $x+2 > 0$. Från detta ser vi att $x > -1$ krävs för att samtliga uttryck ska vara definierade. Antag att $x > -1$. Då gäller

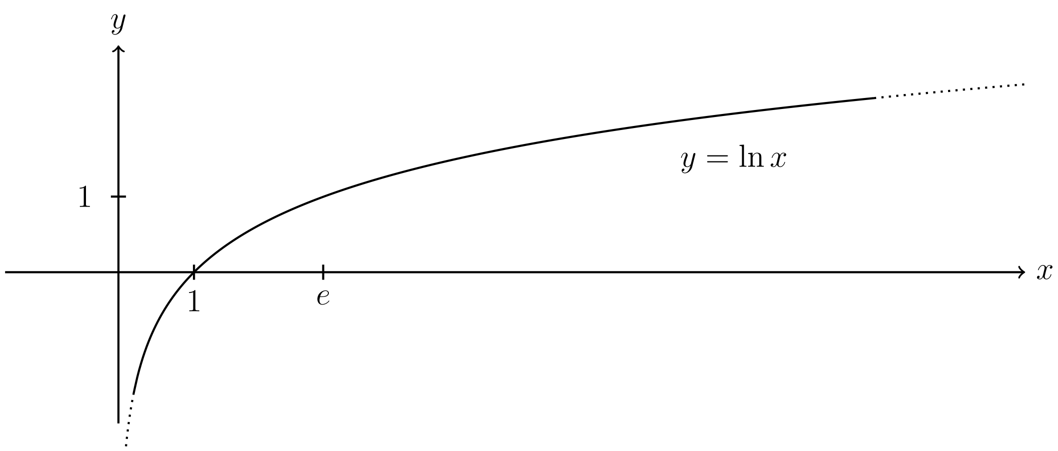
$$\ln(x+1) = \ln(5+x) - \ln(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\big((x+1)(x+2)\big) = \ln(5+x),$$

och eftersom ln är strängt växande gäller då att

$$(x+1)(x+2) = 5+x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+3) = 0.$$

Endast $x = 1$ är en lösning då $x = -3$ ej uppfyller kravet $x > -1$.
Svar. $x = 1$ enda lösningen.

> **Logaritmer och negativa tal?**
>
> Observera att vi endast har definierat $\ln x$ för $x > 0$. Men detta innebär **inte** att $\ln x > 0$ för alla x. Om $0 < x < 1$ så är $\ln x < 0$. Det är skillnad på definitionsmängden och värdemängden!



Observera även att till exempel $\ln(xy)$ kan vara definierad även om $\ln x$ och $\ln y$ inte är det. Det räcker att produkten blir positiv, så exempelvis $x = -2$ och $y = -3$ skulle fungera. Detta kan ställa till det när vi löser ekvationer som innehåller logaritmer, så var försiktiga!

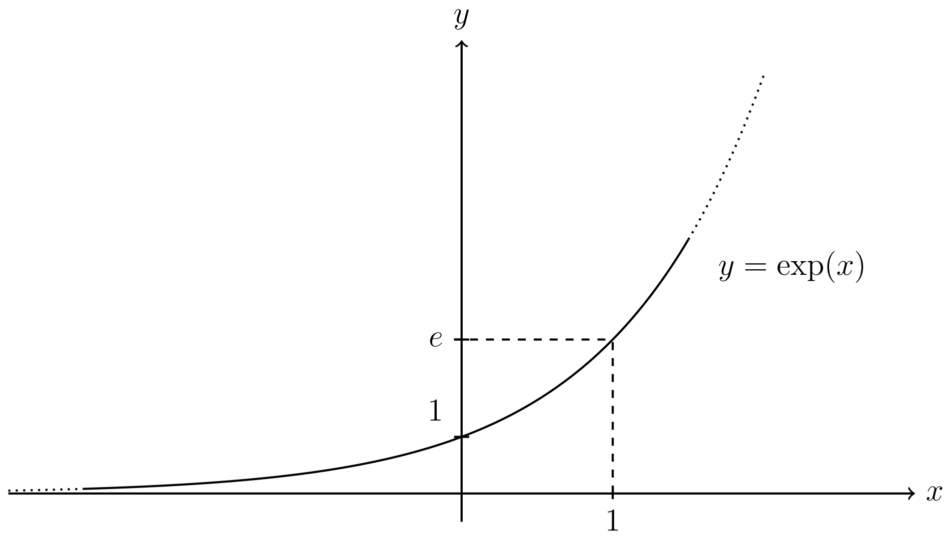
2 Exponentialfunktionen

Eftersom ln är strängt växande finns en invers som vi kallar exp, dvs

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp(y),$$

där $D_{\exp} = \mathbf{R}$ och $V_{\exp} =]0, \infty[$. Som vanligt (med inverser) gäller

$$\ln(\exp x) = x, \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{och} \quad \exp(\ln x) = x, \quad x > 0.$$



Om vi jämför graferna för ln och exp så kan man se att $\exp x$ är spegelbilden av $\ln x$ kring linjen $y = x$. Detta gäller generellt för inverser! Så hur hör nu funktionen exp ihop med talet e?

Talet e

Definition. Talet e definieras som $e = \exp(1)$.

Talet e är irrationellt, har närmevärdet $e \approx 2.718$ och uppfyller att $\ln e = 1$.
Om $p \in \mathbf{Z}$ så följer det av logaritmlagarna ovan att

$$\ln e^p = p \ln e = p \qquad \text{eller ekvivalent} \qquad \exp(p) = \exp(\ln e^p) = e^p.$$

Vi väljer därför att skriva $e^x = \exp(x)$. Det är alltså så här vi *definierar* talet e^x genom funktionen exp för alla x.

$\exp(x)$ och e^x

Vi kommer att använda dessa uttryck helt utbytbart, de betyder alltså samma sak. När vi skriver e^x så syftar vi på funktionsvärdet $\exp(x)$. Notationen exp är lämplig ibland, speciellt när det är komplicerade argument. Till exempel kanske vissa tycker $\exp\left(1 + \sqrt{x\sqrt{x} - x^3 \sin x}\right)$ lättare att läsa än $e^{1+\sqrt{x\sqrt{x}-x^3\sin x}}$.

Egenskaper

Funktionen som definieras av e^x har bland annat följande egenskaper:

(i) $e^0 = 1$ och $e^1 = e$;

(ii) $\ln e^x = x$ för $x \in \mathbf{R}$ och $e^{\ln x} = x$ för $x > 0$;

(iii) $e^{x+y} = e^x e^y$;

(iv) $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$;

(v) $(e^x)^p = e^{px}$ då $p \in \mathbf{Z}$.

Exempel

Lös ekvationen $e^x + 4e^{-x} = 4$.

Lösning. Det följer att

$$e^x + 4e^{-x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 4e^x + 4 = 0.$$

Låt $t = e^x$. Då måste $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$, vilket endast $t = 2$ uppfyller. Alltså är $e^x = 2$, eller ekvivalent, $x = \ln 2$.
Svar: $x = \ln 2$.
Något bökigare? Kanske som handlar om inversen till ett uttryck?

Exempel

Bestäm definitionsmängden och (om möjligt) inversen till $f(x) = \ln\left(\sqrt{7} - \ln(1+2x)\right)$.

Lösning. Vi börjar med att bestämma den största möjliga definitionsmängden. Kraven som måste gälla är att $1 + 2x > 0$ samt $\sqrt{7} - \ln(1+2x) > 0$. Alltså måste $x > -\frac{1}{2}$ och

$$\sqrt{7} - \ln(1+2x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{7}} > 1 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{7}} - 1\right) > x$$

eftersom ln är strängt växande. Således ges D_f av de $x \in \mathbf{R}$ så att

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{7}} - 1\right).$$

Låt $y \in \mathbf{R}$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = \ln(\sqrt{7} - \ln(1+2x)) \quad &\Rightarrow \quad \exp(y) = \sqrt{7} - \ln(1+2x) \\ &\Rightarrow \quad 1 + 2x = \exp(\sqrt{7} - \exp(y)) \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(\exp(\sqrt{7} - \exp(y)) - 1\right). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Eftersom vi bara har ett alternativ ges inversen av

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\exp(\sqrt{7} - \exp(x)) - 1\right).$$

Svar: $D_f = \left\{x \in \mathbf{R} : -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{7}} - 1\right)\right\}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(\exp(\sqrt{7} - \exp(x)) - 1\right)$.
Vad hade hänt om vi fått flera möjligheter i ekvation $(*)$ ovan? Tänk på att vi "bara" räknade med implikationer!

3 Potensfunktioner

Potensfunktioner

Definition. Vi definierar potensfunktionen x^α enligt $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ då $x > 0$ och $\alpha \in \mathbf{R}$, samt $x^\alpha = 0$ då $x = 0$ och $\alpha > 0$.

Detta är en rimlig definition. Till exempel vet vi att

$$x^p = (e^{\ln x})^p = e^{p \ln x}, \quad p \in \mathbf{Z},$$

vilket stämmer överens med definitionen ovan.
Eftersom potensfunktioner är definierade via exp-funktionen så gäller motsvarande regler. Till exempel så är

$$x^\alpha x^\beta = \exp(\alpha \ln x) \exp(\beta \ln x) = \exp(\alpha \ln x + \beta \ln x) = \exp((\alpha + \beta) \ln x) = x^{\alpha+\beta}, \quad x > 0.$$

Övriga regler kan visas på liknande sätt.

Exempel

Finn alla reella x så att $4^{x+1} - 2^{x+2} = 2^3$.

Lösning. Vi skriver om ekvationen för att se om vi kan finna en lämplig variabel:

$$4^{x+1} - 2^{x+2} = 4 \cdot 4^x - 2^2 \cdot 2^x = 4 \cdot 2^x \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x = 4t^2 - 4t,$$

där $t = 2^x$. Då är $t > 0$ och ekvationen kan alltså skrivas

$$4t^2 - 4t - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t + 1)(t - 2) = 0.$$

Här ser vi att $t = -1$ inte går (då $2^x = -1$ saknar lösning) och att $t = 2$ medför att $2^x = 2$, så $x = 1$.
Svar: $x = 1$.

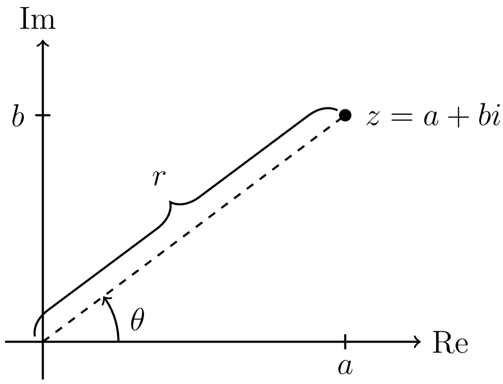
TATM79: Föreläsning 7
Komplexa exponentialfunktionen och binomiska ekvationer

Johan Thim*

9 september 2015

1 Komplexa tal på polär form

Ett komplex tal $z = a + bi$ kan som bekant betraktas som en punkt i komplexa talplanet med två koordinater (a, b). En annan variant för att beskriva z är att istället ange ett avstånd r till origo och en vinkel; vi kallar detta för polär form.



Lite geometri visar att

$$a = r\cos\theta \qquad \text{och} \qquad b = r\sin\theta,$$

så

$$z = a + bi = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Som bekant är $r = |z|$, men hur uttrycker vi θ?

Definition. Argumentet $\arg z$ för ett komplext tal z definieras som en vinkel φ så att $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Observera att $\arg z$ är en flervärd funktion! Lite bökigt att hantera ordentligt alltså. När vi säger ”argumentet för z” menar vi oftast *något* värde på φ så att $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

*johan.thim@liu.se

1.1 Den komplexa exponentialfunktionen

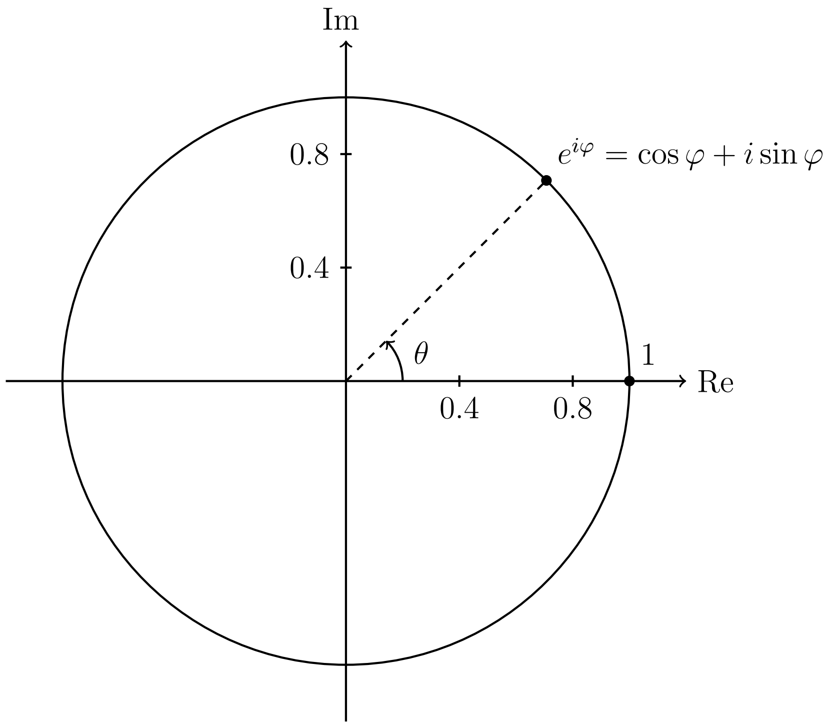
Tidigare har vi betraktat funktion exp för reella argument. Kan vi utvidga definitionen till komplexa tal? Följande definition visar att detta är möjligt.

Definition. För alla $\varphi \in \mathbf{R}$ så definierar vi $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Vi observerar att $e^{i\varphi}$ är ett tal på enhetscirkeln ty

$$|e^{i\varphi}| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$$

enligt trigonometriska ettan. Vi kan alltså betrakta $e^{i\varphi}$ som en punkt på cirkeln $|z| = 1$:



Det visar sig att de flesta ”regler” som gäller för den vanliga exponentialfunktionen fortfarande är sanna.

(i) $\dfrac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$;

(ii) $e^{i\varphi}e^{i\theta} = e^{i(\varphi+\theta)}$;

(iii) $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ för $n \in \mathbf{Z}$ (obs endast heltal);

Punkt (iii) kallas de Moivres formel. Dessa likheter visas helt enkelt genom att använda definitionen av $e^{i\varphi}$. Vi kikar närmare på (i):

$$\frac{1}{e^{i\varphi}} = \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}.$$

Exempel

Använd den komplexa exponentialfunktionen för att visa additionsformlerna för sinus och cosinus.

Lösning. Detta är ett ganska elegant sätt att ta fram additionsformlerna på. Vi betraktar följande samband mellan reella u och v:

$$\begin{aligned} e^{i(u+v)} &= e^{iu}e^{iv} = (\cos u + i\sin u)(\cos v + i\sin v) \\ &= \cos u\cos v - \sin u\sin v + i(\sin u\cos v + \cos u\sin v). \end{aligned}$$

Eftersom $e^{i(u+v)} = \cos(u+v) + i\sin(u+v)$ måste då

$$\cos(u+v) = \cos u\cos v - \sin u\sin v$$

och

$$\sin(u+v) = \sin u\cos v + \cos u\sin v$$

eftersom realdelen och imaginärdelen måste stämma överens. Observera att argumentet dock blir linjärt om man visat punkt (ii) ovan med hjälp av additionsformlerna.

Ibland kan det underlätta att betrakta en så kallad ”komplex form” av ett uttryck. Om vi har något som innehåller $\sin x$ eller $\cos x$ kan ju dessa betraktas som imaginär- eller realdel av e^{ix}. Vi visar med ett exempel.

Exempel

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \operatorname{Im}\left(e^{i3x}\right) = \operatorname{Im}\left((e^{ix})^3\right) = \operatorname{Im}\left((\cos x + i\sin x)^3\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x + 3i^2\cos x\sin^2 x + i^3\sin^3 x\right) \\ &= 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x. \end{aligned}$$

1.2 Eulers formler

Om vi löser ut $\cos\varphi$ och $\sin\varphi$ ur de ekvationer vi får från definitionen av $e^{i\varphi}$ och $e^{-i\varphi}$ så ser vi att

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} \\ 2i\sin\varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} \end{cases}$$

Vi skriver ofta sammbanden

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \text{och} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Dessa brukar kallas för Eulers formler och är mycket användbara. Bara med hjälp av trigonometriska ettan och Eulers formler kan man ofta härleda de flesta trignometriska samband vi stöter på, även om det inte alltid blir så enkla kalkyler.

Exempel

Undersök vilka x som uppfyller $4\sin 2x \sin 4x - 8\sin x \sin 2x \cos 3x = 1$ genom att skriva om vänsterledet som en summa av sin / cos-termer och lösa ekvationen som uppstår.

Lösning. Vi använder Eulers formler och finner att

$$\begin{aligned}\sin x \sin 2x \cos 3x &= \frac{1}{-8}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right) \\ &= \frac{1}{-8}\left(e^{6ix} + 2 + e^{-6ix} - e^{2ix} - e^{-2ix} - e^{4ix} - e^{-4ix}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(1 + \cos 6x - \cos 2x - \cos 4x\right)\end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned}\sin 2x \sin 4x &= \frac{1}{-4}\left(e^{6ix} + e^{-6ix} - e^{2ix} - e^{-2ix}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\cos 6x - \cos 2x\right).\end{aligned}$$

Med dessa sammband kan vi skriva om ekvationen i fråga enligt

$$-2\cos 6x + 2\cos 2x + 2 + 2\cos 6x - 2\cos 2x - 2\cos 4x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 4x = \frac{1}{2},$$

så $4x = \pm\pi/3 + 2\pi n$ eller $x = \pm\pi/12 + \pi n/2$ där $n \in \mathbf{Z}$.
Svar: $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2 Binomiska ekvationer

Uttrycket binom innebär ett polynom med två termer, så vi betraktar uttryck av typen $z^n - w$, där $z, w \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$, samt w och n är kända storheter. Hur löser vi ut z ur en ekvation av typen $z^n = w$? Tanken är att vi arbetar med det hela på polär form, så:

(i) Skriv z och w på polär form: $z = re^{i\varphi}$ och $w = \rho e^{i\theta}$. Här kommer ρ och θ att vara kända, ρ och $r > 0$, samt $\varphi, \theta \in \mathbf{R}$.

(ii) Eftersom $z = re^{i\varphi}$ så är $z^n = r^n e^{in\varphi}$ och vi försöker alltså lösa ekvationen $r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$.

(iii) Isolera absolutbeloppet och argumentet i ekvationen. Vi löser

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}.$$

Absolutbeloppet:

$$|r^n e^{in\varphi}| = |\rho e^{i\theta}| \quad \Leftrightarrow \quad r^n = \rho \quad \Leftrightarrow \quad r = \rho^{1/n},$$

där vi endast har en lösning (den positiva) $r = \rho^{1/n}$ som är definierad ty $\rho > 0$.

Argumentet:

$$\arg(r^n e^{in\varphi}) = \arg(\rho e^{i\theta}) \quad \Leftrightarrow \quad n\varphi = \theta + 2\pi k \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

där vi erhåller flera möjligheter eftersom $\arg z$ är en flervärd funktion.

(iv) Lista upp vilka lösningar vi erhåller. Observera att det räcker med n stycken eftersom det bara finns n rötter till ekvationen! Vilka? Bara vi tar en följd med n värden, till exempel $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, så får vi med allt. Skissa in lösningarna i en cirkel. När vi tagit n stycken i följd kommer vi tillbaka till den punkten vi startade i.

Exempel

Finn alla komplexa lösningar till $z^6 + 729 = 0$.
Ange eventuella lösningar på formen $z = a + ib$, a, $b \in \mathbf{R}$.

Lösning. Vi börjar med att skriva -729 på polär form:

$$-729 = 729e^{i\pi} = 3^6 e^{i\pi}.$$

Låt $z = re^{i\varphi}$, där $r > 0$. Då måste $z^6 = r^6 e^{6i\varphi} = 3^6 e^{i\pi}$, så $r^6 = 3^6$ och $6\varphi = \pi + 2\pi n$ där n är heltal (absolutbeloppet och argumenten måste stämma överens). Detta ger att $r = 3$ och att $\varphi = \pi/6 + n\pi/3$. Våra lösningar blir nu

$$z = 3e^{i(\pi/6+n\pi/3)} = 3e^{i(1+2n)\pi/6}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Om vi förenklar dessa får vi lösningarna

$$z = \pm 3i, \qquad z = \pm\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), \qquad z = \pm\frac{3}{2}(\sqrt{3} - i).$$

Svar: $z = \pm 3i,\ \pm\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i),\ \pm\frac{3}{2}(\sqrt{3} - i)$.

Uttryck i stil med $w^{1/n}$ (med $\operatorname{Im} w \neq 0$) har ingen mening i denna kurs. Om $n = 2$ till exempel skulle det innebära att vi tar kvadratroten ur ett komplex tal. Hur skulle det definieras? Vi lämnar sådana övningar till en kurs i komplex analys.

3 Fasvinkelomskrivning

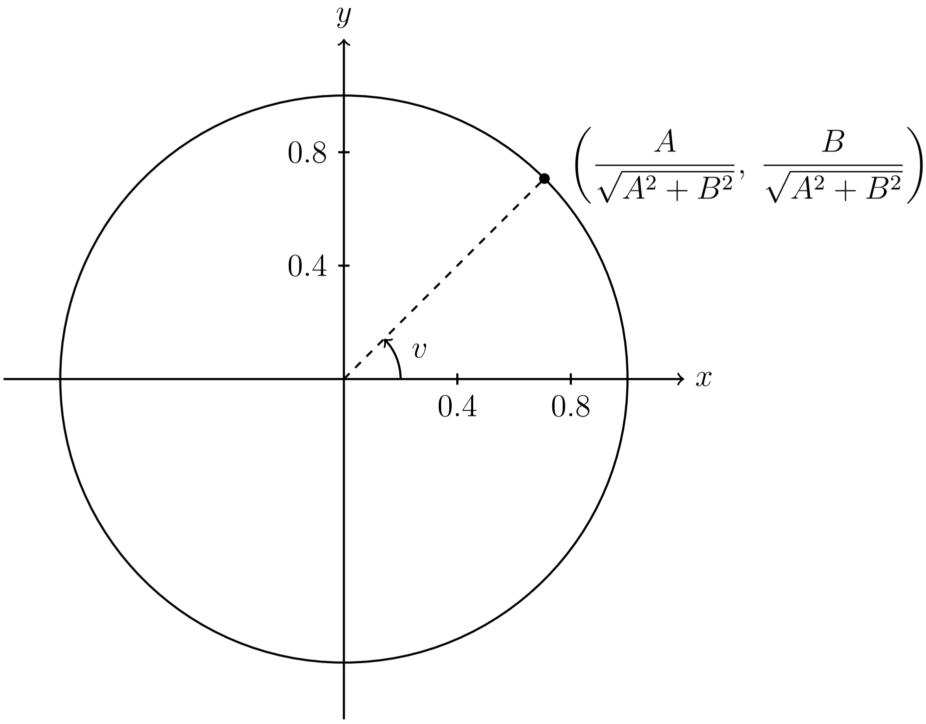
Summor (linjärkbominationer) av sinus och cosinus med samma frekvens kan skrivas som en enda term. Vi skriver om så att vi kan använda additionsformeln för sinus (går lika bra att göra motsvarande för cosinus om så önskas). Vi bryter ut så att koefficienterna framför $\sin x$ och $\cos x$ utgör koordinater för en punkt på enhetscirkeln:

$$\begin{aligned} A\sin x + B\cos x &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos v \sin x + \sin v \cos x) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\sin(x+v), \end{aligned}$$

där v är en vinkel så att

$$\cos v = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \text{och} \qquad \sin v = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Det finns alltid oändligt många sådana val, men oftast räcker det för oss att hitta ett.



Vi introducerar också att $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ för att underlätta notationen.

Exempel

Lös ekvationen $\sqrt{3}\sin 2x - 3\cos 2x = \sqrt{6}$ för $x \in \mathbf{R}$.

Lösning.
Vi använder oss av hjälpvinkelmetoden och skriver om vänsterledet som $C\sin(2x + v)$. Då ska alltså, enligt additionsformeln för sinus,

$$\sqrt{3}\sin 2x - 3\cos 2x = C\left(\sin 2x \cos v + \cos 2x \sin v\right) = C\sin(2x + v).$$

Genom att, till exempel, låta $x = 0$ och $x = \pi/4$, erhåller vi sambanden

$$\begin{cases} C\sin v &= -3 \\ C\cos v &= \sqrt{3} \end{cases}$$

För att bestämma C kvadrerar vi dessa ekvationer och summerar för att finna att

$$C^2 = C^2(\sin^2 v + \cos^2 v) = 12.$$

Alltså är $C = \sqrt{12}$ ett lämpligt val, och vi finner v genom att lösa

$$\begin{cases} \cos v &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2} \\ \sin v &= -\frac{3}{\sqrt{12}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Vi väljer $v = -\pi/3$. Vi ska nu lösa ekvationen

$$\sqrt{12}\sin(2x + v) = \sqrt{6} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x + v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + v = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi, \\ 2x + v = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi. \end{cases}$$

Vi erhåller alltså lösningarna

$$x = \frac{7\pi}{24} + n\pi \qquad \text{och} \qquad x = \frac{13\pi}{24} + n\pi$$

för $n \in \mathbf{Z}$.
Svar: $x = \dfrac{7\pi}{24} + n\pi$ och $x = \dfrac{13\pi}{24} + n\pi$ för $n \in \mathbf{Z}$.

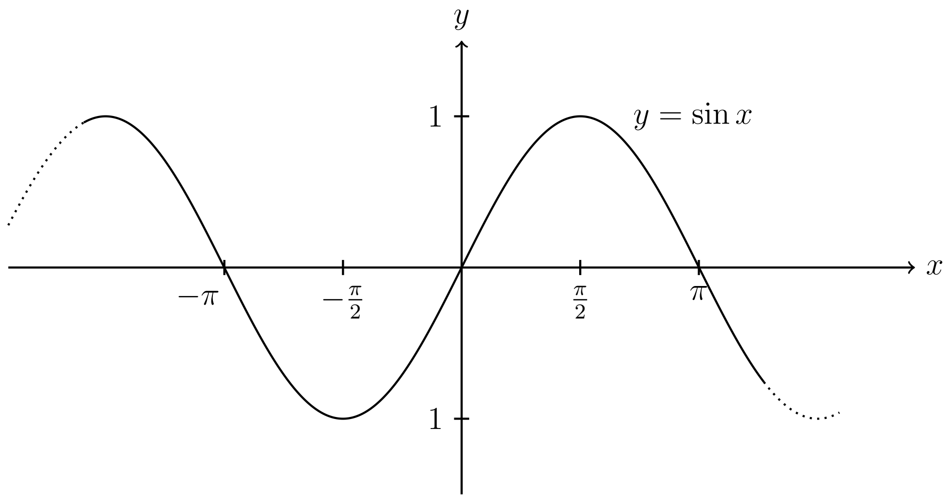
TATM79: Föreläsning 8
Arcusfunktioner

Johan Thim[*]

16 augusti 2015

1 Inverser till trigonometriska funktioner

Om vi ritar upp funktionen $y = \sin x$ ser vi följande:



Självklart går det inte att hitta en invers till $\sin x$ för alla $x \in \mathbf{R}$. Det finns ju uppenbarligen oändligt många möjliga val för x för varje y mellan -1 och 1. Men om vi väljer ut en mindre definitionsmängd då?

Till exempel är $y = \sin x$ inverterbar då $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ eftersom sinus är strängt växande på det intervallet (se figuren, viss argumentation nödvändig för att visa det mer explicit).

arcsin

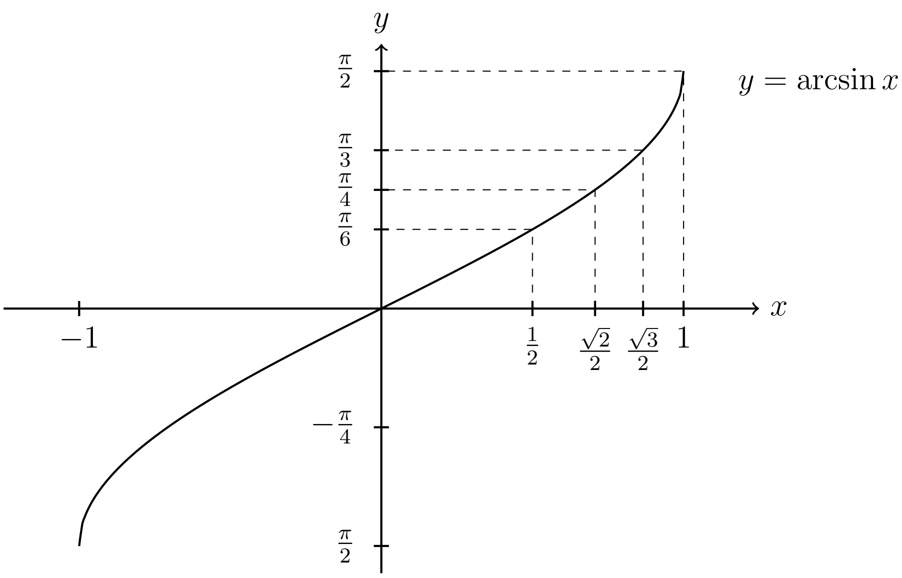
Definition. $y = \arcsin x$ är det tal y så att $\sin y = x$ och $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Vi noterar att $D_{\text{arcsin}} = [-1, 1]$ och att $V_{\text{arcsin}} = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Observera även följande:

$$\begin{aligned} \sin \arcsin x &= x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \arcsin \sin x &= x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

[*] johan.thim@liu.se

Till exempel, om $x > \pi/2$ eller $x < -\pi/2$ gäller alltså inte $\arcsin \sin x = x$. Var försiktig med detta!



Exempel

Lös ekvationen $\sin x = \dfrac{2}{5}$ där $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.

Lösning. Vi ser att $2/5$ inte kommer från en standardvinkel, så **en** lösning till ekvationen $\sin x = 2/5$ ges av $x = \arcsin 2/5$. Hur hittar vi alla lösningar? Precis som vi gjort tidigare! Vi vet att

$$\sin x = \frac{2}{5} = \sin \arcsin \frac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin \frac{2}{5} + 2n\pi \text{ eller } x = \pi - \arcsin \frac{2}{5} + 2n\pi.$$

Detta är alltså samtliga lösningar. Vilka uppfyller kravet i formuleringen? Vi behöver ha en uppfattning om hur stor $\arcsin \dfrac{2}{5}$ är. Ur figuren ovan kan vi se att $0 < \arcsin \dfrac{2}{5} < \dfrac{\pi}{4}$ eftersom $0 < \dfrac{2}{5} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Fall 1. Om $x = \arcsin \dfrac{2}{5} + 2n\pi$ så ser vi direkt att $n \leq 0$ inte fungerar. Om $n = 1$ blir uttrycket för stort, så här hittar vi inga lösningar i rätt intervall.

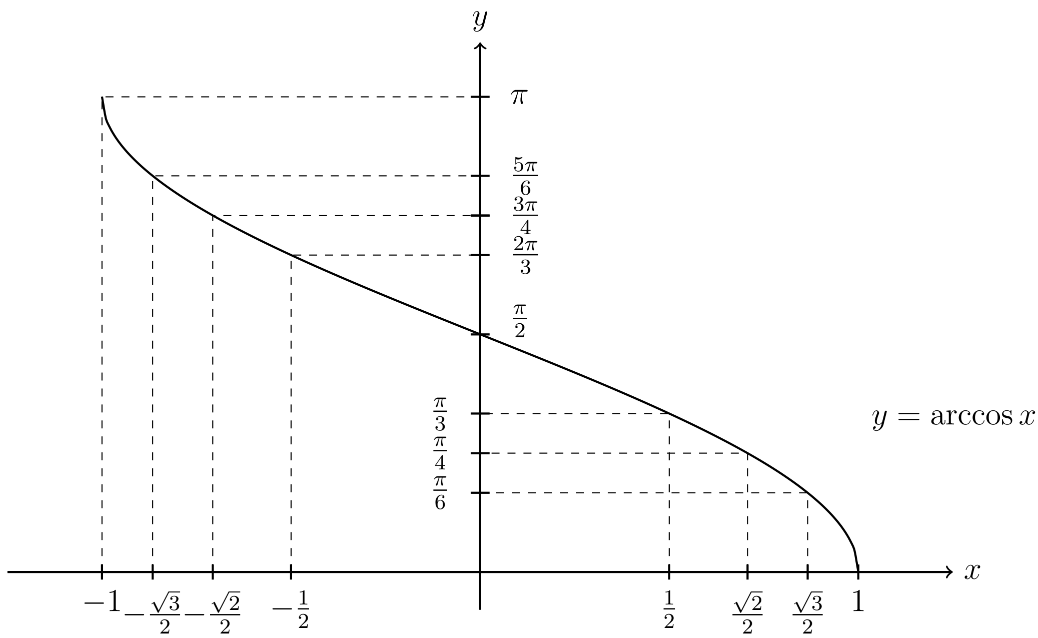
Fall 2. Om $x = \pi - \arcsin \dfrac{2}{5} + 2n\pi$ så ser vi direkt att $n \neq 0$ gör x för stor respektive för liten. Men $n = 0$ fungerar, då måste $3\pi/4 < x < \pi$ vilket uppfyller villkoret i uppgiften.

Svar: $x = \pi - \arcsin \dfrac{2}{5}$.

arccos

Definition. $y = \arccos x$ är det tal y så att $\cos y = x$ och $0 \leq y \leq \pi$.

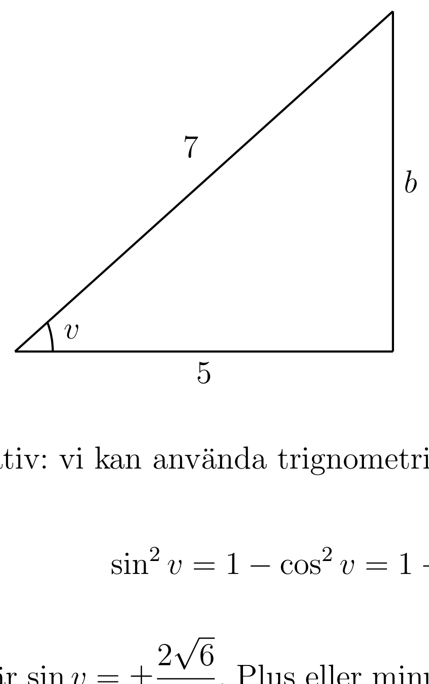
Vi noterar att $D_{\text{arcsin}} = [-1, 1]$ och att $V_{\text{arcsin}} = [0, \pi]$.



Exempel

Förenkla $\sin \arccos \dfrac{5}{7}$.

Lösning. Låt $v = \arccos \dfrac{5}{7}$. Eftersom $0 < 5/7 < 1$ så måste $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$ (titta i figuren ovan!). Vi kan alltså använda en rätvinklig triangel.



Pythagoras implicerar att

$$b = \sqrt{7^2 - 5^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6},$$

och därmed erhåller vi att

$$\sin v = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

Alternativ: vi kan använda trignometriska ettan. Låt $v = \arccos \dfrac{5}{7}$. Då är

$$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v = 1 - \left(\cos \arccos \frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}.$$

Alltså är $\sin v = \pm \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$. Plus eller minus? Eftersom $0 < v < \pi/2$ så måste sinus vara positiv (titta i enhetscirkeln!).

Svar: $\sin \arccos \dfrac{5}{7} = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.

Ett lite krångligare exempel? Visst! Detta är en gammal duggauppfit (där det dök upp ganska många kreativa svar).

Exempel

Förenkla $\dfrac{\arcsin(\sin 3)}{\arccos(\cos 7)}$.

Lösning. Vi börjar med nämnaren:

$$v_1 = \arccos(\cos 7) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos v_1 = \cos 7, \\ 0 \le v_1 \le \pi, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_1 = \pm 7 + 2\pi n, \\ 0 \le v_1 \le \pi, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = 7 - 2\pi.$$

På samma sätt kan täljaren skrivas

$$v_2 = \arcsin(\sin 3) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \sin v_2 = \sin 3, \\ -\pi/2 \le v_2 \le \pi/2, \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} v_2 = 3 + 2\pi n \text{ eller } v_2 = \pi - 3 + 2\pi n, \\ -\pi/2 \le v_2 \le \pi/2, \end{cases}$$

vilket är ekvivalent med att $v_2 = \pi - 3$. Följaktligen får vi

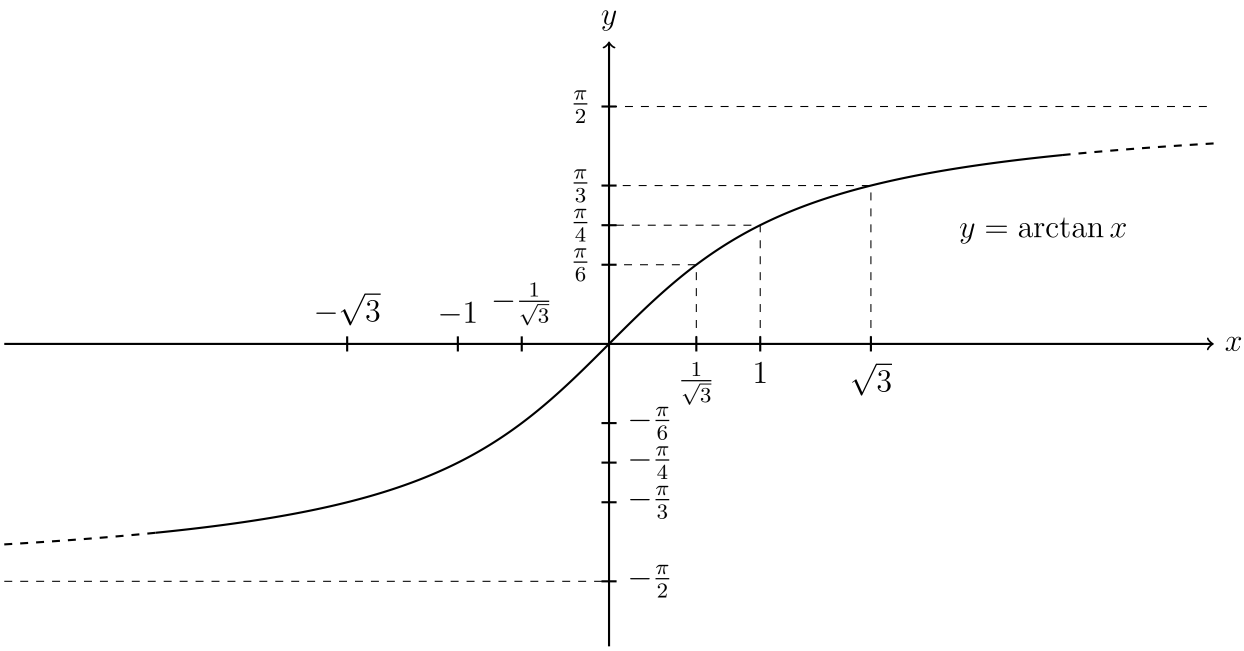
$$\frac{\arcsin(\sin 3)}{\arccos(\cos 7)} = \frac{\pi - 3}{7 - 2\pi}.$$

Svar: $\dfrac{\pi - 3}{7 - 2\pi}$.

arctan

Definition. $y = \arctan x$ är det tal y så att $\tan y = x$ och $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.

Vi noterar att $D_{\arctan} = \mathbf{R}$ och att $V_{\arctan} = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.



Exempel

Förenkla $\arctan(2) + \arccos\big(-\dfrac{4}{5}\big)$.

Lösning. Låt $v = \arctan 2 + \arccos(-4/5)$. Eftersom

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$

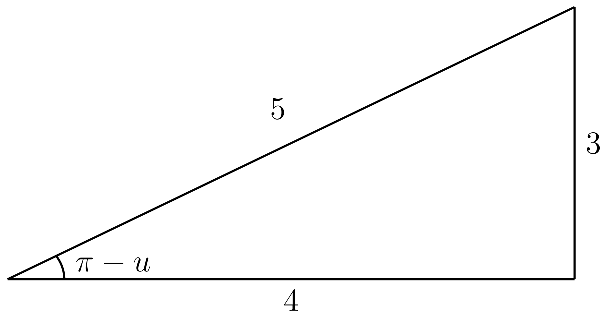
kan vi skriva

$$\tan v = \frac{\tan(\arctan 2) + \tan(\arccos(-4/5))}{1 - \tan(\arctan 2)\tan(\arccos(-4/5))}.$$

Vi ser att $\tan(\arctan 2) = 2$, men $\tan(\arccos(-4/5))$ är lite värre. Låt $u = \arccos(-4/5)$. Då är $\cos u = -4/5$ och $0 \leq u \leq \pi$. Minustecknet är lite obehagligt, så vi skriver

$$\cos u = -\frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\pi - u) = \frac{4}{5}.$$

En rätvinklig triangel med katetlängderna 4 och 3 ger att $\tan(\pi - u) = \dfrac{3}{4}$, så $\tan(u) = -\dfrac{3}{4}$ (kan man se t ex från additionsformeln ovan).



Vi kan nu räkna ut $\tan v$:

$$\tan v = \frac{2 - \frac{3}{4}}{1 - 2(-\frac{3}{4})} = \frac{1}{2}.$$

Alltså måste $v = \arctan(1/2) + n\pi$ för något heltal n. Vi uppskattar storleken på ingående arcusfunktioner:

$$0 < \arctan\frac{1}{2} < \arctan 1 = \frac{\pi}{4} < \arctan 2 < \frac{\pi}{2},$$
$$\frac{2\pi}{3} = \arccos\big(-\frac{1}{2}\big) < \arccos\big(-\frac{4}{5}\big) < \arccos(-1) = \pi.$$

Här har vi använt att arctan är växande, arccos är avtagande och kända standardvinklar. Alltså är

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} < v < \pi + \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11\pi}{12} < v < \frac{3\pi}{2}.$$

Eftersom $0 < \arctan(1/2) < \pi/4$ så följer det att $n = 1$ är nödvändigt. Alltså blir den sökta vinkeln $v = \pi + \arctan(1/2)$. Med hjälp av en miniräknare eller dator kan man så klart enkelt få fram närevärden och genom det bestämma n.

Svar: $\pi + \arctan\dfrac{1}{2}$.

2 Addition av arcus-funktioner: komplex hjälpmetod

Exempel

Förenkla $\arctan 2 + \arctan 3$.

Lösning: Låt $z_1 = 1 + 2i$ och $z_2 = 1 + 3i$. Låt v_1 vara vinkeln som z_1 bildar mot positiva real-axeln, och v_2 vinkeln z_2 bildar mot positiva real-axeln. Det följer att

$$\tan v_1 = \frac{2}{1} = 2 \qquad \text{och} \qquad \tan v_2 = \frac{3}{1} = 3.$$

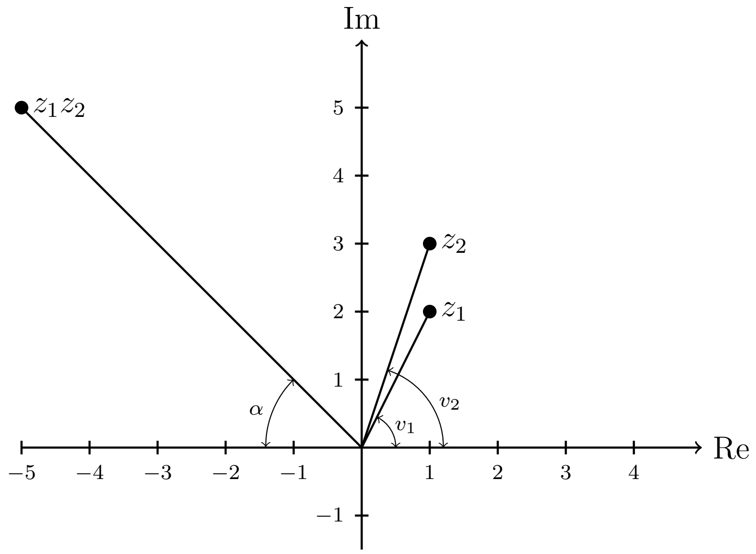
En lösning till respektive ekvation fås genom $v_1 = \arctan 2$ och $v_2 = \arctan 3$. Dessa vinklar ligger i första kvadranten och är de vi söker. Om vi nu skriver z_1 och z_2 på polär form,

$$z_1 = \sqrt{5}e^{i\arctan 2} \qquad \text{och} \qquad z_2 = \sqrt{10}e^{i\arctan 3},$$

ser vi att $z_1 z_2 = \sqrt{50}e^{i(\arctan 2 + \arctan 3)}$. Det följer alltså att

$$\arg(z_1 z_2) = \arctan 2 + \arctan 3 + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Men, vi vet också att $z_1 z_2 = (1 + 2i)(1 + 3i) = -5 + 5i$. Vi har följande illustration:



Vi ser att $\tan\alpha = 5/5 = 1$, så $\alpha = \arctan 1 = \pi/4$. Alltså blir $v_3 = \pi - \arctan 1 = 3\pi/4$ vinkeln mellan $z_1 z_2$ och (positiva) real-axeln. Observera att vi inte kan skriva $\arctan(-1)$ eftersom den vinkeln ligger i 4:e kvadranten ($= -\pi/4$). Detta medför att

$$\arg(z_1 z_2) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Ekvationerna (1) och (2) implicerar att

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{3}$$

Heltalet n kommer från $n = k - m$, som kan anta vilket heltal som helst. För att kunna välja det n som är nödvändigt (det finns bara ett korrekt svar) så måste vi uppskatta hur stort talet $\arctan 2 + \arctan 3$ är. Funktionen $\arctan x$ är växande, så

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 < \arctan 2 < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}.$$

Vi kan alltså se att $\pi/4 + \pi/4 < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi$, eller

$$\frac{\pi}{2} < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi.$$

Alltså måste vi välja $n = 0$ i (3).

Svar: $\arctan 2 + \arctan 3 = \dfrac{3\pi}{4}$. **OBS: Ett svar!**