TATM79: Föreläsning 1
Notation, ekvationer, polynom och summor

Johan Thim*

22 augusti 2018

1 Vanliga symboler

Lite logik

- **Implikation**: $P \Rightarrow Q$. Detta betyder att om P är sant så är Q sant. Utläses P *medför* Q eller P *implicerar* Q. Exempel: $x > 4 \Rightarrow x^2 > 16$.

- **Ekvivalens**: $P \Leftrightarrow Q$. Detta betyder att P är sant om och endast om Q sant. Med andra ord: $P \Rightarrow Q$ och $Q \Rightarrow P$. Exempel: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$, dvs $x = 2$ eller $x = -2$.

Logiska utsagor!

Observera att P och Q är **logiska utsagor**. Det är alltså saker som kan vara sanna eller falska. Typiskt för oss är saker som att P till exempel är utsagan att $x = 7$. Detta kan vara sant eller falskt (x kan vara 7 eller något annat). Däremot kan **inte** P vara ett påstående i stil med *röd* eller π. Uttryck av typen $7 \Rightarrow 2$ är nonsens. Samma sak med $(x-1)^2 \Rightarrow x^2-2x+1$. Påståendet saknar logisk mening. Även om det i sista exemplet går att gissa vad det skulle betyda så kan man inte skriva så. Använd likhetstecknet när ni menar likhet!

Det finns även speciella mängder av tal (siffror alltså) som vi kommer att använda oss av.

N: De naturliga (hel)talen: $0, 1, 2, 3, \ldots$.

Z: Alla heltal: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Q: Alla rationella tal, dvs bråk $\dfrac{p}{q}$ där p och q är heltal och $q \neq 0$.

R: Alla reella tal. Inkluderar **Q** och även alla irrationella tal som $\sqrt{2}$, π, e, etc.

C: Alla komplexa tal $z = a + bi$ där $i^2 = -1$ och $a, b \in \mathbf{R}$.

Se även till att speciellt studera tallinjen och olikheter i boken!

2 Ekvationslösning

Oftast när vi försöker lösa en ekvation handlar det om att använda omskrivningar och förenklingar tillsammans med logik för att hitta **alla** lösningar till en given ekvation.

*johan.thim@liu.se

Exempel

$$\frac{2x-9}{5} = 4x \quad \Leftrightarrow \quad 2x-9 = 20x \quad \Leftrightarrow \quad -9 = 18x \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{9}{18} = -\frac{1}{2}$$

Kontroll: VL $= (2(-1/2)-9)/5 = -2$ och HL $= 4(-1/2) = -2$. Alltså är $x = -1/2$ en lösning, och eftersom vi har ekvivalenser i alla steg är detta den enda lösningen!

Kontrollen i exemplet är egentligen överflödig då vi räknat med ekvivalens hela vägen. Men, då det alltid finns en risk för slarvfel när man räknar försöker vi alltid att kontrollera våra svar. Det är också värt att lägga på minnet att vissa metoder vi kommer att använda **kräver** en kontroll för att verifiera att "lösningar" som hittas inte är falska.

Lite repetition av omskrivningar vi sett tidigare.

Vanliga omskrivningar

Kvadratregeln: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Konjugatregeln: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
Kvadratkomplettering: $x^2 + bx + c = (x + b/2)^2 - (b/2)^2 + c$.

Till exempel kan vi med konjugatregeln reda ut vad som gäller för två tal a och b om $a^2 = b^2$.

Exempel

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)(a-b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a+b = 0 \text{ eller } a-b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -b \text{ eller } a = b \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm b. \end{aligned}$$

Observera att om vi vet att, till exempel a och b är positiva, så är $a = b$.

Vi har här utnyttjat en mycket användbar princip som gäller för de mängder tal vi betraktar i denna kurs, nämligen att om $ab = 0$ så måste endera $a = 0$ eller $b = 0$. Det enda sättet att få noll ur en produkt är att en av faktorerna är noll.

Kvadratkomplettering är ett verktyg vi kommer att använda ofta. Det mest typiska är nog att helt enkelt lösa en andragradsekvation.

Exempel

Lös $x^2 + 6x + 1 = 0$.

Lösning.
Vi kvadratkompletterar och utnyttjar konjugatregeln:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 1 &= (x+3)^2 - 9 + 1 = (x+3)^2 - 8 = (x+3)^2 - (\sqrt{8})^2 \\ &= [\text{ konjugatregeln }] = (x+3-\sqrt{8})(x+3+\sqrt{8}). \end{aligned}$$

Alltså måste

$$x^2 + 6x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 - \sqrt{8} = 0 \text{ eller } x + 3 + \sqrt{8} = 0.$$

Tag för vana att summera resultatet i ett kortfattat men tydligt svar.

Svar: $x = -3 \pm \sqrt{8}$ är de enda lösningarna.

Exempel

Bestäm största och minsta värde av $1+x-x^2$.

Vi kvadratkompletterar:

$$1+x-x^2 = 1-(x^2-x) = 1-((x-1/2)^2-(1/2)^2) = \frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Här ser vi tydligt att uttrycket som störst blir $5/4$, vilket inträffar endast då $x=1/2$. Däremot kan uttrycket bli hur litet som helst (minsta värde saknas alltså)!

Kvadratroten

Definition. Om $a \geq 0$ så definierar vi $\sqrt{a}$ som det tal x så att

$$x=\sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2=a, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Det följer från definitionen att $\sqrt{a} \geq 0$ för alla $a \geq 0$.

Kvadratrötter och negativa tal?

- Inga negativa tal! Saker som $\sqrt{-4}$ är nonsens och inte något vi någonsin kommer att använda i denna kurs. Möjliga tolkningar i form av komplexa tal hanteras på annat sätt. Det finns kurser i komplex analys där detta problem studeras och problemet överlämnas dit.

- Vi får aldrig(!) något negativt från kvadratroten heller. Till exempel så är $\sqrt{9}=3$. Aldrig ± 3 eller något annat vansinne. Tecken före kvadratroten kommer alltid från något annat. Ofta handlar det då om en ekvation vi försöker lösa. Till exempel $x^2=9$, som har lösningarna $x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$. Tecknet här kommer alltså från ekvationen, inte kvadratroten!

Exempel

Lös $x-1=\sqrt{2x+1}$.

Alternativ 1. Vi räknar med implikationer och kan därmed kvadrera lite hur vi vill. Priset vi betalar för detta är att alla eventuella lösningar vi finner **måste** kontrolleras. Utan kontroll har vi inte visat något (och därmed riskerar vi noll poäng på den uppgiften på en tenta). Alltså,

$$\begin{aligned} x-1=\sqrt{2x+1} \quad &\Rightarrow \quad (x-1)^2 = 2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x+1=2x+1 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2-4x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \text{ eller } x=4. \end{aligned}$$

Nu måste vi testa och ser då att om $x=0$ så skulle

$$0-1=\sqrt{2\cdot 0+1}=1,$$

vilket inte går då $-1 \neq 1$. Om $x=4$ är VL $=4-1=3$ och HL $=\sqrt{2\cdot 4+1}=\sqrt{9}=3$. Detta är alltså en lösning!
Svar: Endast $x=4$ löser ekvationen.

Alternativ 2. Detta är lite bökigare. Två problem:

1. Vi måste ha $2x+1 \geq 0$, eller $x \geq -1/2$, för att kvadratroten skall vara definierad.

2. Vidare måste $x - 1 \geq 0$, eller $x \geq 1$, eftersom vi vet att kvadratroten alltid är icke-negativ.

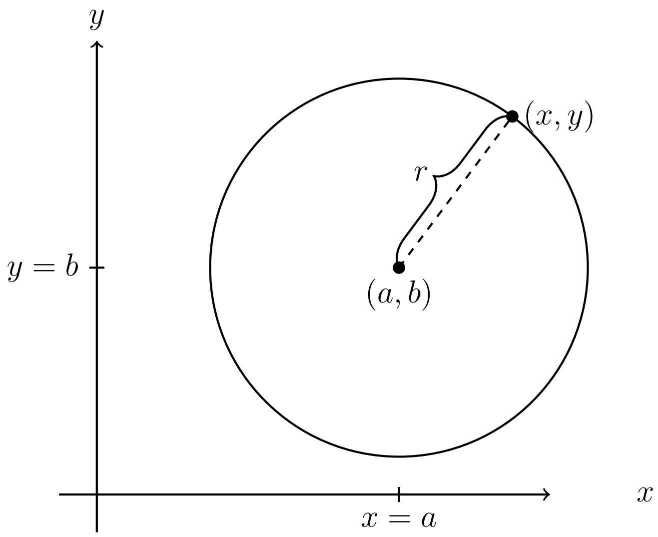
Dessa villkor ger att $x \geq 1$ (varför bara den?). Med detta villkor kan vi faktiskt räkna med ekvivalenser i varje steg (undersök detta!). Detta villkor visar även att den falska lösningen $x = 0$ ska tas bort.

3 Cirklar

Låt $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ vara en punkt i planet. Avståndet r från en annan punkt (x, y) till (a, b) ges som bekant av

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

enligt Pythagoras sats. Om vi ritar ut alla punkter (x, y) som har samma avstånd r till punkten (a, b) erhåller vi en cirkel.



Med kravet att $r \geq 0$ kan vi kvadrera ekvationen ovan med ekvivalens (uttrycket inne i roten är aldrig negativt) och erhåller då cirkelns ekvation:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

Cirkeln har radien r (ingen kvadrat) och centrum i punkten (a, b).

Exempel

Undersök om ekvationen $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0$ beskriver en cirkel, och bestäm i så fall dess radie och centrum.

Lösning. Tekniken är att kvadratkomplettera x-termer och y-termer var och en för sig och analysera resultatet:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

Alltså är detta mycket riktigt en cirkel. Centrum ligger i $(-1,\ 2)$ (observera tecknen och ordningen) och radien är $\sqrt{5}$ (observera att det är r^2 som är konstanten i högerledet).
Svar. Ja, det är en cirkel med centrum i $(-1,\ 2)$ och radie $\sqrt{5}$.

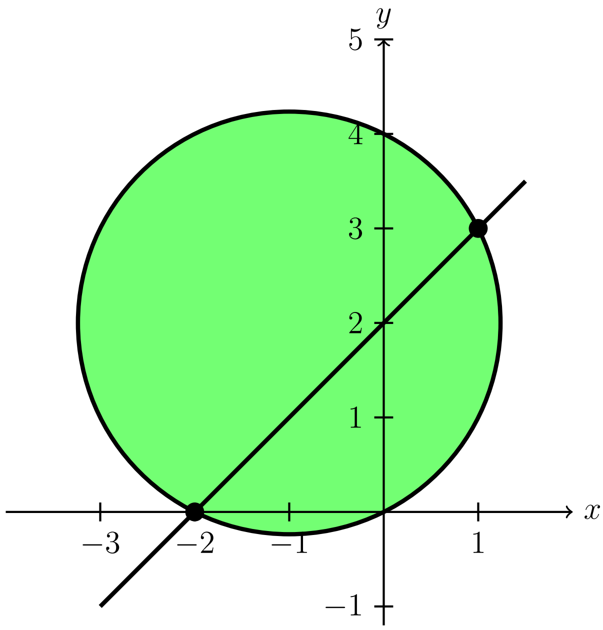
Exempel

Undersök var linjen $y = 2 + x$ skär cirkeln med centrum i $(-1,\ 2)$ och radie $\sqrt{5}$.

Lösning. Linjen skär cirkeln precis där linjens ekvation och cirkelns gäller samtidigt, så

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5, \\ y = 2 + x, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2x^2 + 2x - 4 = 0, \\ y = 2 + x, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (x-1)(x+2) = 0, \\ y = 2 + x. \end{cases}$$

Om $x = 1$ blir $y = 3$ och om $x = -2$ blir $y = 0$.
Svar. $(1,\ 3)$ och $(-2,\ 0)$



4 Polynom

Exempel

Lös ekvationen $x^3 = x$.

Lösning. Vi skulle kunna gissa fram lösningar. Till exempel $x = 1$ verkar fungera. Sen kan vi dessutom ganska direkt se att $x = -1$ löser ekvationen då $(-1)^3 = -1$. Är detta alla lösningar? Nej, lite mer analys visar att även $x = 0$ löser ekvationen. Hur vet vi då när vi är färdiga? Låt oss omformulera frågan:

$$\begin{aligned} x^3 = x \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(x-1)(x+1) = 0. \end{aligned}$$

Alltså är mycket riktigt $x = 0$ och $x = \pm 1$ de enda lösningarna. Det sista vänsterledet kallas för *faktoriseringen* av $x^3 - x$.

Polynom

Definition. Ett polynom $p(x)$ är ett uttryck av typen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

där $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är konstanter och n ett icke-negativt heltal. Om $a_n \neq 0$ säger vi att polynomet har *grad* n.

Exempel

- Exempel på polynom är x^2, 7, $1 + x + x^5$, $x^6 + 4x^3$, etc.
- Exempel på uttryck som **inte** är polynom: $x^{1/2}$, $\sin x$, x^{-3} etc.

Vanliga benämningar

Definition. Ett polynom $p(x)$ säges ha ett **nollställe** när $x = a$ om $p(a) = 0$. Speciellt för polynom kallas nollställen ofta för **rötter**. Ett polynom har alltså en rot $x = a$ om $x = a$ är ett nollställe. Vidare kallas konstanterna $a_0, a_1, \ldots, a_n$ för polynomets **koefficienter**.

4.1 Polynomdivision

Fungerar precis som för heltal.

Exempel

Förenkla i meningen att graden för täljaren i bråket skall vara lägre än graden för nämnaren:

$$\frac{x^3 - 4x + 1}{x - 3}.$$

Lösning. Vi ställer upp, till exempel, enligt följande.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & +3x & & +5 \\ \hline
x-3 & x^3 & & -4x & +1 \\
 & -x^3 & +3x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & 3x^2 & -4x & \\
 & & -3x^2 & +9x & \\ \cline{3-4}
 & & & 5x & +1 \\
 & & & -5x & +15 \\ \cline{4-5}
 & & & & 16
\end{array}$$

Proceduren fortsätter till dess att vi får kvar något som har lägre gradtal än nämnaren. I detta fall gick det inte jämnt upp utan vi fick en så kallad *rest*. Vad vi kan utläsa ur detta är att

$$\frac{x^3 - 4x + 1}{x - 3} = x^2 + 3x + 5 + \frac{16}{x - 3}.$$

Kontrollera att detta stämmer genom att skriva allt på samma nämnare! Ta för vana att göra detta efter varje polynomdivision. Det är lätt att få teckenfel!
Hade resten varit noll hade det inneburit att $x = 3$ hade varit ett nollställe till täljaren. Allmänt gäller att

$$p(x) = (x - a)q(x) + r,$$

där $p(x)$ har grad n, $q(x)$ har grad $n-1$, och r är en konstant (resten). Vi ser från denna representation att

$$p(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0.$$

Det vill säga, $x = a$ är ett nollställe till $p(x)$ (så $p(a) = 0$) om och endast om polynomdivisionen med $x - a$ går jämt upp (resten blir noll; $r = 0$). Detta är i princip det faktorssatsen säger.

Faktorssatsen

Sats. Följande två påståenden är ekvivalenta.

(i) Polynomet $p(x)$ innehåller faktorn $x - a$, det vill säga $p(x) = (x-a)q(x)$ för något polynom $q(x)$.

(ii) $x = a$ är ett nollställe till $p(x)$, det vill säga att $p(a) = 0$.

Vi betraktar ett exempel.

Exempel

Faktorisera polynomet $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 8x + 14$.

Lösning. Proceduren vi använder är följande. Först gissar vi en rot. Lämpligtvis testar vi heltal då uppgifterna som ges brukar vara konstruerade på det sättet. I ett allmänt fall får man helt enkelt låta en dator gissa. *Men*, det finns en teknik för att gissa systematiskt om man har heltalskoefficienter i polynomet; se slutet på föreläsningen. Vi testar $x = 0$, vilket inte fungerar (vi har en konstantterm så då kan $x = 0$ aldrig vara ett nollställe). Vi testar $x = \pm 1$ och ser att $x = -1$ faktiskt är ett nollställe.

Nästa steg är polynomdivision där vi delar bort den kända faktorn $x + 1$ (som motsvarar nollstället $x = -1$).

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 2x^2 & -6x & +14 \\ \hline
x+1 & 2x^3 - 4x^2 & +8x & +14 \\
 & -2x^3 - 2x^2 & & \\ \cline{2-2}
 & -6x^2 & +8x & \\
 & 6x^2 & +6x & \\ \cline{2-3}
 & & 14x & +14 \\
 & & -14x & -14 \\ \cline{3-4}
 & & & 0
\end{array}$$

Det gick jämt upp så $x = -1$ måste vara ett nollställe. Nu vet vi alltså att

$$p(x) = (x+1)(2x^2 - 6x + 14) + 0 = 2(x+1)((x-3)^2 + 5),$$

där vi har kvadratkompletterat den sista parentesen Är vi klara? Ja, det är vi faktiskt (om vi inte ska blanda in komplexa faktorer, vilket vi återkommer till senare). Anledningen till kvadratkompletteringen är att vi nu enkelt kan se att $(x-3)^2 + 5 \geq 5$ för alla x. Denna faktor blir alltså aldrig noll!

Svar: $p(x) = 2(x+1)((x-3)^2 + 5)$. Kontrollera genom att multiplicera ihop!

Exempel

Faktorisera polynomet $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Lösning. Samma teknik som ovan. Vi gissar och finner att $x = 1$ är en rot. Polynomdivision:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x + 1 \\
\hline
x - 1 & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\
 & -x^3 + x^2 \\
\hline
 & -2x^2 + 3x \\
 & 2x^2 - 2x \\
\hline
 & x - 1 \\
 & -x + 1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Alltså måste $p(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 1)$. Den sista faktorn är ett andragradsuttryck och det kan vi faktorisera med kvadratkomplettering: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Alltså är $p(x) = (x-1)^3$.
Svar: $p(x) = (x-1)^3$. Kontrollera genom att multiplicera ihop!

5 Summor

Vi ska nu diskutera ett bekvämt sätt att skriva summor på, speciellt i de fall då termerna som summeras har någon form av upprepande mönster.

En summa S brukar skrivas

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Symbolen $\sum$ betyder att vi ska summera termerna a_k då **summationsindexet** k startar i $k = 1$, sen ökar k ett steg i taget till dess att $k = n$ och vi har då summerat n stycken termer.

Det är inget speciellt att börja med $k = 1$, summor kan starta i vilken punkt som helst (det blir olika värden på summan så klart).

Exempel

$$\sum_{k=2}^{4}(k^2 + k) = (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + (4^2 + 4) = 38.$$

Observera att det inte förekommer något k i svaret! Summationsindexet (bokstaven vi använder för att beskriva hur termerna i summan varierar) försvinner **alltid**. Att vi använde bokstaven k är inte heller något speciellt. Faktiskt så är

$$\sum_{k=2}^{4}(k^2 + k) = \sum_{j=2}^{4}(j^2 + j).$$

Summor kan delas upp (de är ju summor!) och gemensamma faktorer i alla termer kan brytas ut. Alltså,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \text{och} \qquad \sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

där c är en konstant.
Däremot kan inte summor multipliceras enkelt (eller delas upp om det är en summa av produkter). Vad skulle till exempel gälla

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = ?$$

Antal termer i summan

Hur många termer innehåller summan $\sum_{k=-2}^{5}(2k+1)$? Vi börjar på $k = -2$ och slutar på $k = 5$. Alltså kommer k att anta värdena

$$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5,$$

vilket är 8 stycken. Vi kan räkna ut detta genom $5 - (-2) + 1$. Ofta missar man $+1$, så var försiktiga!

5.1 Aritmetiska summor

Aritmetisk summa

Definition. En summa där det är konstant skillnad mellan påföljande termer kallas *aritmetisk*.

I en aritmetisk summa gäller alltså att

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots$$

är en konstant.

Exempel

Beräkna summan $S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$.

Detta kan vi direkt göra i huvudet så klart, men vi illustrerar en generell teknik. Genom att summera två stycken likadana summor (och skriva det kreativt genom att reversera ordning på den ena) uppstår följande mönster:

$$\begin{array}{ccccccccccc} S & = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & 7 & + & 9 \\ S & = & 9 & + & 7 & + & 5 & + & 3 & + & 1 \\ \hline \\ 2S & = & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 \end{array}$$

Vi har alltså visat att $2S = 5 \cdot 10$ eller att $S = 25$. Generellt gäller för en **aritmetisk summa** alltid att

$$S = \frac{\text{första termen } + \text{ sista termen}}{2} \cdot \text{antal termer.}$$

5.2 Geometriska summor

Geometrisk summa

Definition. En summa där det är en konstant kvot mellan påföljande termer kallas *geometrisk*.

Detta innebär alltså att

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots$$

är konstant.

Exempel

Beräkna summan $S = 1 - 2 + 4 - 8 + 32$.

Detta kan vi återigen direkt göra i huvudet så klart, men vi illustrerar igen en generell teknik. Om vi multiplicerar summan med kvoten $q = -2$ och drar bort detta från ursprungssumman uppstår följande mönster.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S & = & 1 & - & 2 & + & 4 & - & 8 & + & 16 & & \\ -2S & = & & - & 2 & + & 4 & - & 8 & + & 16 & - & 32 \\ \hline S-(-2S) & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 32 \end{array}$$

Vi har alltså visat att $3S = 33$ eller att $S = 11$. Generellt gäller för en **geometrisk summa** att

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = \begin{cases} a \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ a(n+1), & q = 1. \end{cases}$$

Observera här att

$$\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1},$$

så båda varianterna ger samma svar.

5.3 Andra sorters summor?

Aritmetisk eller geometrisk?

Observera att de allra flesta summor varken är aritmetiska eller geometriska! Det är alltså inte fifty-fifty att chansa på tentan och hoppas på det bästa. Till exempel $\sum_{k=1}^{4} k^2$ är varken eller, men kan enkelt räknas ut ändå eftersom det bara är fyra termer.

Men om en summa innehåller för många termer för att beräknas för hand då? Vissa fall kan man ändå hantera, till exempel följande halvluriga variant (gammal tentauppgift!).

Exempel

Beräkna summan $\sum_{k=3}^{27}(3k + 3^k)$.

Lösning. Summan består av en aritmetisk del och en geometrisk del (kontrollera!). Vi delar således upp summan i två delar och beräknar enligt standardformler:

$$\sum_{k=3}^{27}(3k+3^k) = \sum_{k=3}^{27} 3k + \sum_{k=3}^{27} 3^k = \frac{3\cdot 3 + 3\cdot 27}{2}(27-3+1) + 3^3\sum_{k=0}^{24} 3^k$$
$$= 1125 + 3^3\frac{3^{25}-1}{3-1} = 1125 + \frac{27}{2}(3^{25}-1).$$

Svar: $1125 + \dfrac{27}{2}(3^{25}-1)$.