TATM79: Föreläsning 2
Absolutbelopp, olikheter och binomialkoefficienter

Johan Thim*

22 augusti 2018

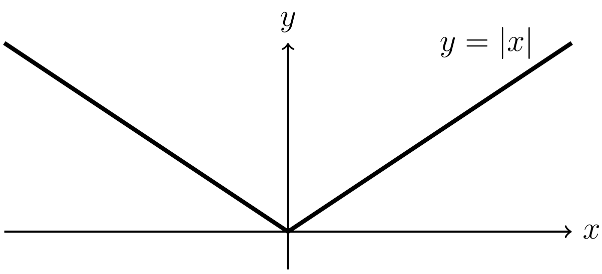
1 Absolutbelopp

Absolutbelopp

Definition. För varje reellt x definieras **absolutbeloppet** $|x|$ enligt

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Exempelvis har vi $|3| = 3$ och $|-4| = 4$. Beloppet tar alltså bort tecknet! Det är alltså en direkt konsekvens av definitionen att $|x| \geq 0$ för alla x. Dessutom kan vi uttrycka $\sqrt{x^2} = |x|$ (visa det!). Man kan så klart skissa upp hur beloppsfunktionen ser ut.



Strikt olikhet?

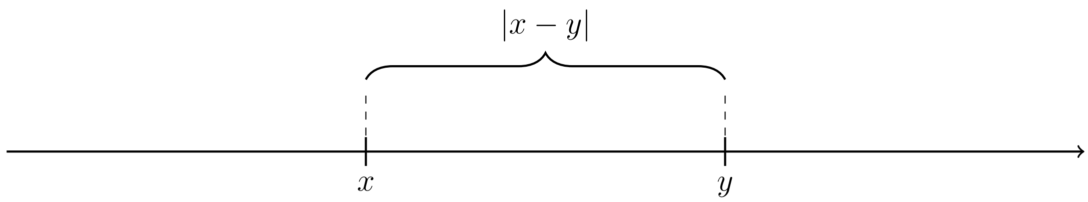
Observera att vi lika gärna hade kunnat definiera $|x|$ som x då $x > 0$ och $-x$ då $x \leq 0$, eller till och med x då $x \geq 0$ och $-x$ då $x \leq 0$. I den sista varianten har vi fallet $x = 0$ med två gånger, men $|0| = 0$ i båda fallen så detta orsakar ingen logisk kullerbytta. Däremot ser det kanske lite fult ut att definiera samma fall två gånger, men vi tillåter oss detta för att inte riskera att glömma bort något fall.

Ur definitionen följer det också att

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ y - x, & x \leq y. \end{cases}$$

Vi kan alltså tolka $|x - y|$ som avståndet (alltid icke-negativt) mellan punkterna x och y på den reella axeln. Specialfallet är $|x - 0| = |x|$ som alltså är avståndet från x till origo.

*johan.thim@liu.se



Likheter och olikheter

Om $d \geq 0$ är en konstant så gäller följande.

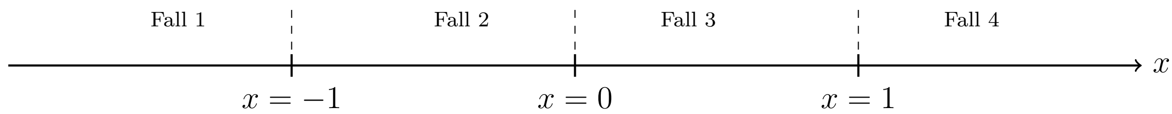
$$
\begin{aligned}
|x| = d \quad &\Leftrightarrow \quad x = \pm d \\
|x| \leq d \quad &\Leftrightarrow \quad -d \leq |x| \leq d \\
|x| \geq d \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq -d \text{ eller } x \geq d
\end{aligned}
$$

Hur löser vi då ekvationer och olikheter som innehåller absolutbelopp? Typiskt är att vi delar upp i olika fall, tillräckligt många för att vi ska kunna skriva uttrycken utan belopp i varje fall.

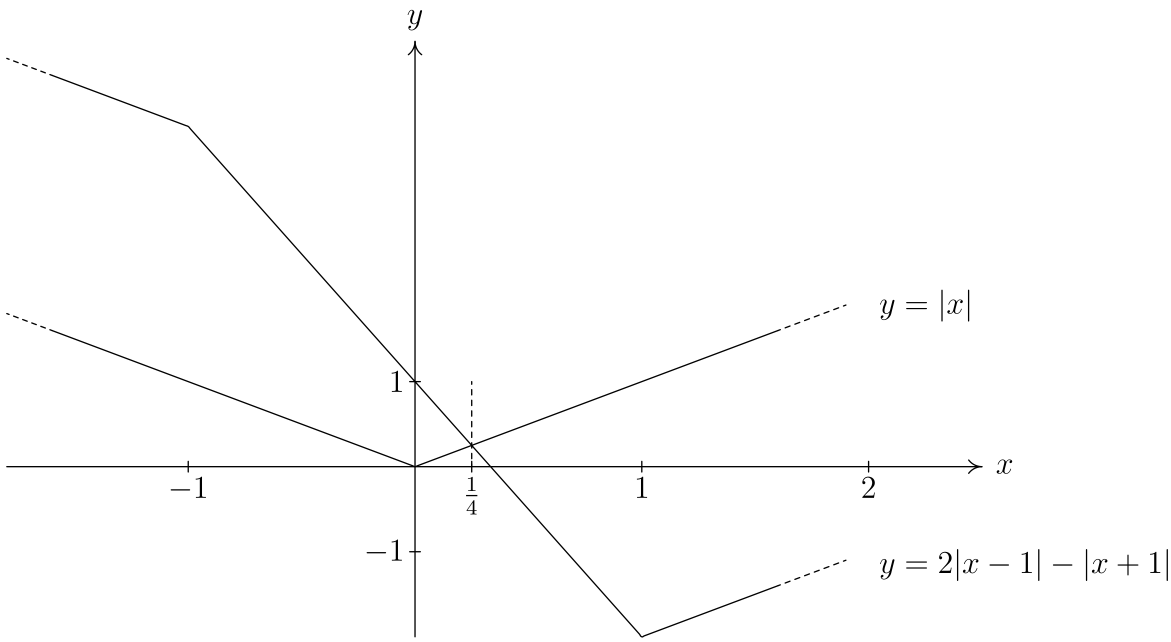
Exempel

Lös $|x| = 2|x-1| - |x+1|$.

Lösning.
Låt oss betrakta den reella tallinjen.



Intressanta punkter där beloppen kan växla tecken: $x = -1$ (då $x + 1$ växlar tecken), $x = 0$ (då x växlar tecken), och $x = 1$ då ($x - 1$ växlar tecken). Vi måste alltså dela upp i fyra olika fall. Figuren nedan skissar hur situationen ser ut grafiskt. Detta gör vi enklast genom att undersöka hur uttrycken ser ut i vart och ett av de fyra fallen.



Vi ser att uttrycken skär varandra i en enda punkt, som verkar ligga vid $x = 1/4$.
Vi ser ovan att det ofta blir ”hörn” i brytpunkterna. Detta är normalt. Vad som inte ska ske är att det blir hopp. Detta eftersom beloppsfunktionen är kontinuerlig — ett begrepp vi återkommer till senare.
Fall 1, $x < -1$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad -x = -2(x-1) + (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 3.$$

Går inte. Finns ingen lösning i detta intervall.
Fall 2, $-1 \leq x < 0$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad -x = -2(x-1) - (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Eftersom $\frac{1}{2} \notin [-1, 0[$ så är detta ingen lösning.
Fall 3, $0 \leq x < 1$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad x = -2(x-1) - (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}.$$

Eftersom $\frac{1}{4} \in [0, 1]$ så är detta en lösning.
Fall 4, $x \geq 1$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad x = 2(x-1) - (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -3.$$

Går inte. Finns ingen lösning i detta intervall.
Svar: $x = \frac{1}{4}$ är den enda lösningen.

2 Olikheter

Att lösa olikheter skiljer sig en del från att lösa likheter. I allmänhet brukar det vara svårare, och ett problem är att man måste vara försiktig med att förkorta bort saker. Vi betraktar ett exempel för att belysa hur vi angriper problemet.

Exempel

Lös olikheten $\frac{4}{x+1} \leq x - 2$.

Lösning. Tekniken vi rekommenderar är att flytta allt till ena sidan av olikheten, föra upp allt på gemensam nämnare, faktorisera, göra en teckentabell, och sist men inte minst kontrollera rimligheten. Således,

$$\begin{aligned} \frac{4}{x+1} \leq x-2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{4}{x+1} - (x-2) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4-(x-2)(x+1)}{x+1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{4-(x^2-x-2)}{x+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+x+6}{x+1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{-(x+2)(x-3)}{x+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)(x-3)}{x+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Observera tecknet i sista steget! Vi gör en teckentabell för det sista vänsterledet.

		-2		-1		3	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{(x+2)(x-3)}{x+1}$	$-$	0	$+$	☠	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $-2 \leq x < -1$ eller $x \geq 3$. Observera vart det blev strikt olikhet (varför?)!

Kontroll. Här kan vi till exempel plocka punkter i de olika intervallen som finns och se till att vårt påstående stämmer överens med det vi utgick från.

$$\begin{aligned}
x = -3: &\qquad \frac{4}{-3+1} = -2 > -5 \\
x = -\frac{3}{2}: &\qquad \frac{4}{-3/2+1} = -8 \leq -3/2 - 2 = -7/2 \\
x = 0: &\qquad \frac{4}{0+1} = 4 > 0 - 2 = -2 \\
x = 4: &\qquad \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5} < 4 - 2 = 2
\end{aligned}$$

Observera att denna kontroll inte *bevisar* att vi har gjort rätt (det kan fortfarande vara allvarliga fel vid faktorisering och identifiering av nollställen etc), men den visar ändå att svaret inte är orimligt. Ett vanligt fel på tentor och duggor är att man av någon anledning svarar med komplementintervallen. Detta ger alltid noll poäng oavsett anledning. Genom kontroll av typen ovan kan man enkelt undvika att svara med komplementintervallen.

Svar. $-2 \leq x < -1$ eller $x \geq 3$.

Olikheter och multiplikation

Se upp med att multiplicera olikheter med variabler som kan skifta tecken! Till exempel kan det vara lockande att förlänga olikheten i föregående exempel med $x+1$. Då skulle vi i så fall kunna undersöka

$$4 \leq (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 6 \geq 0.$$

Vi ser att nämnaren $x+1$ har försvunnit i jämförelse med ovan, och därmed kommer vår nya teckentabell att sakna den informationen. Punkten $x = -1$ är inte längre intressant och resten av tecknen riskerar att bli fel. Detta är så klart helt åt skogen. Den enda räddningen är att betrakta två fall: $x+1 \geq 0$ och $x+1 < 0$ och reda ut ett i taget. Detta skulle fungera, men i allmänhet brukar sådana lösningar innehålla andra fel så det brukar ofta bli noll poäng på en tenta ändå. Undvik alltså denna teknik!
Ännu enklare, visst är $2 < 4$? Alltså måste $2 \cdot 2 < 2 \cdot 4$, eller $4 < 8$. Inget konstigt här, det gick bra att multiplicera olikheten med 2. Men vad händer om vi multiplicerar med -2? Då skulle $-2 \cdot 2 < -2 \cdot 4$, eller $-4 < -8$. Detta stämmer så klart inte!

3 Kombinatorik och binomialkoefficienter

Fakultet

Definition. Om n är ett naturligt tal definierar vi $n!$ enligt

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2, \quad n \geq 1,$$

och $0! = 1$.

Vi startar alltså med något positivt heltal n och multiplicerar sedan ihop samtliga heltal mindre än eller lika med n ned till och med 2. Alltså blir $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 3 \cdot 2 = 6$, etc.

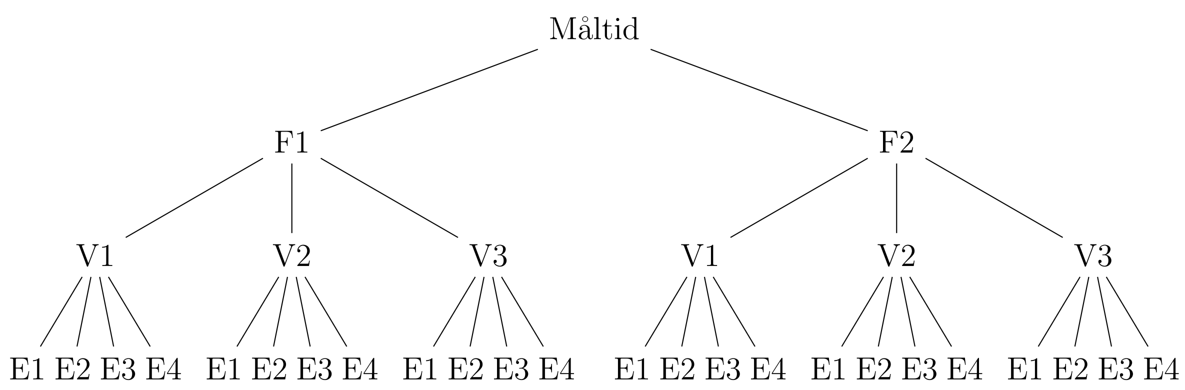
3.1 Kombinatorik

Multiplikationsprincipen: Om vi har en tvåstegsprocess av valmöjligheter, där vi i första steget har n_1 möjliga val och i det andra n_2 möjliga val, så finns det totalt sätt $n_1 \cdot n_2$ kombinationer. Det brukar illustreras med så kallade träddiagram där varje ”löv” på trädet representerar en möjlighet. Antalet löv blir precis produkten ovan.

Exempel

En tre-rätters meny har 2 förrätter, 3 varmrätter, och 4 efterätter. Hur många olika måltider kan man beställa om man vill ha förrätt, varmrätt och efterätt?
Enligt multiplikationsprincipen blir det $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ olika måltider.

Man kan illustrera multiplikationsprincipen med hjälp av träddiagram. I figuren nedan väljer vi på nivå 1 mellan två förrätter (F1 och F2). I nästa nivå väljer vi mellan 3 varmrätter (V1, V2 och V3). I det sista steget väljer vi mellan fyra efterrätter. Varje väg genom trädet ger en unik måltid. Hur många sådana vägar finns det? Det är bara att räkna ihop hur många ”löv” det finns på den sista nivån, vilket blir precis 24 st.



I detta exempel var det viktigt i vilken ordning de olika delarna i måltiden tas (en förrätt är en förätt och så vidare).

Ordning

Vad menar vi med att ordna objekt? Till exempel, hur svarar vi på frågan ”på hur många sätt kan vi ordna siffrorna 1,2 och 3?”

Vi kan helt enkelt skriva ut varianterna:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & \quad & 2 & 1 & 3 & \quad & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & \quad & 2 & 3 & 1 & \quad & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

och ser att det finns 6 möjliga ordningar.

Detta är ett exempel på följande sats ($3! = 6$).

Permutationer

Sats. Om vi har n stycken olika objekt kan dessa ordnas på $n!$ olika sätt. Vi säger att det finns $n!$ olika *permutationer*.

Hur kan vi se detta? En variant är att vi helt enkelt placerar ut våra n objekt i en viss ordning och funderar över hur många val vi har i varje steg på samma sätt som menykonstruktionen ovan!
Vi ställer upp en lista med plats och skriver ut på hur många objekt vi har kvar att välja på i varje steg.

Plats 1	Plats 2	Plats 3	$\cdots$	Plats $n-1$	Plats n
n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	2	1

Multiplicerar vi ihop enligt multiplikationsprincipen ser vi att det blir precis $n!$ kombinationer.

3.2 Binomialkoefficienter

Något lite krångligare? Vi utnyttjar multiplikationsprincipen för att reda ut följande scenario. Om vi har 10 dörrar och ska öppna 6 stycken, på hur många sätt kan vi göra detta om ordningen (dvs i vilken ordning vi öppnar dörrarna) inte spelar någon roll? Vi har tio dörrar och skall välja ut sex st som öppnas:

Dörr 1	Dörr 2	Dörr 3	Dörr 4	Dörr 5	Dörr 6
10	9	8	7	6	5

Dörr 1 kan vi välja på 10 olika sätt. När vi sedan väljer dörr 2 finns det bara 9 kvar att välja på. Och så vidare. Ordningen på dörrarna är nu fixerad, och vi får (från multiplikationsprincipen) att det finns

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$$

sådana val. Detta är alltså svaret om vi vill göra skillnad på i vilken ordning dörrarna öppnas. När de sex dörrarna är valda kan vi variera ordningen mellan dessa 6 på $6!$ olika sätt:

Dörr 1	Dörr 2	Dörr 3	Dörr 4	Dörr 5	Dörr 6
6	5	4	3	2	1

Vi kan nu ta bort ”multipla” dörrval (de kombinationer som bara skiljer sig åt med i vilken ordning sex st specifika dörrar ligger):

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \binom{10}{6}.$$

Detta uttryck kallas för en binomialkoefficient!

Binomialkoefficient

Definition. Om n och k är icke-negativa heltal så att $k \leq n$ så definieras *binomialkoefficienten* enligt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Exempel

Räkna ut $\binom{27}{25}$.

Detta gör vi direkt från definitionen:

$$\binom{27}{25} = \frac{27!}{25! \cdot 2!} = \frac{27 \cdot 26}{2} = 351.$$

Egenskaper för binomialkoefficienter

(i) $\binom{n}{k}$ är alltid heltal.

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(iii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ då $n \geq 2$ och $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Exempel

Vid *Camp Crystal Lake* härjar en våldsverkare iklädd en hockeymask, låt oss kalla honom Jason. Jason planerar att mörda tre ungdomar en natt och har nio tillhyggen att välja på. Om vi bortser från ordningen på morden (alltså vem som blir mördad först etc), hur många unika mordserier kan Jason åstadkomma för dessa tre ungdomar om han använder precis ett tillhygge på varje individ (utan upprepning)?

Lösningen är enkel om vi bara abstraherar bort all text. Vi väljer alltså ut 3 objekt från 9 utan ordning. Detta kan göras på $\binom{9}{3}$ olika sätt enligt ovan, och

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84.$$

Svar. 84 olika sätt.

4 Binomialsatsen

Ett minnestrick för att komma ihåg binomialkoefficienter (åtminstone för rimligt små n) är Pascals triangel:

Pascals triangel

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Denna konstruktion bygger på den rekursiva formeln $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ som gäller för vettiga val på n och k. Detta motsvarar alltså i triangeln ovan att varje siffra kan fås genom att summera de siffror som står närmast på raden ovanför. De möjliga k-värdena startar på 0 längst till vänster på varje rad med $\binom{n}{0}$. Sedan kommer $\binom{n}{1}$, följt av $\binom{n}{2}$, och så vidare, till slutligen $\binom{n}{n}$. Rad n har alltså $n+1$ siffror (kontrollera!); en siffra för varje möjligt värde på k. Till exempel så är $\binom{4}{3} = \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 + 1 = 4$; kolla på raderna för $n = 4$ och $n = 3$. På så sätt kan vi iterativt konstruera nästa rad om vi känner nuvarande rad.

Ibland skriver man Pascals triangel lite mer som en rätvinklig triangel i stället. Då blir det lite lättare att se hur k hänger ihop med allt:

Pascals (rätvinkliga) triangel

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$\cdots$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$							

En av de vanligaste tillämpningarna för binomialkoefficienter är binomialsatsen.

Binomialsatsen

Sats. Om n är ett ickenegativt heltal så gäller för alla x att

$$\begin{aligned}(x+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n.\end{aligned}$$

Bevis. Vi skriver ut parentesen:

$$(x+1)^n = \underbrace{(x+1)(x+1)\cdots(x+1)}_{n \text{ st}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Så hur bestämmer vi koefficienterna a_k? Om vi kikar närmare på produkten i mellanledet så ser vi att vi ur varje parentes kommer att välja ett x eller en etta när vi multiplicerar ihop allt. Om vi till exempel tittar på x^5 så ska vi alltså välja 5 stycken x och resten, dvs $n-5$ stycken ettor. Hur många sätt kan vi välja 5 objekt av n stycken utan ordning (ingen skillnad på olika x eller ettor)? Svaret är så klart binomialkoefficienten $\binom{n}{5}$, vilket då visar formeln i satsen ovan eftersom argumentet kan upprepas för varje k.

Exempel

$$\begin{aligned}(x+1)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k \\ &= \binom{5}{0} + \binom{5}{1} x + \binom{5}{2} x^2 + \binom{5}{3} x^3 + \binom{5}{4} x^4 + \binom{5}{5} x^5 \\ &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5\end{aligned}$$

Ofta ser man binomialsatsen på följande form:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

Detta kan visas med följande manipulation (såvida $b \neq 0$):

$$(a+b)^n = b^n \left(\frac{a}{b} + 1\right)^n = b^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a}{b}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

En typisk användning av binomialsatsen är att identifiera vad koefficienten före en viss term är i en summa av typen i föregående exempel.

Exempel

Bestäm koefficienterna före x^8 och x^9 i uttrycket $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^{10}$.

Vi använder binomialsatsen och skriver

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{2}{x}\right)^{10} &= \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}x^k\left(\frac{2}{x}\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}2^{10-k}x^{k-(10-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}2^{10-k}x^{2k-10}.\end{aligned}$$

Vi ser att x får exponenten 8 om och endast om $2k-10=8 \iff k=9$. Koefficienten blir alltså $\binom{10}{9}2^{10-9}=20$. När dyker då x^9 upp? Vi skulle behöva $2k-10=9$, eller $k=19/2$. Detta är inget heltal mellan 0 och 10 (de heltal vi summerar över). Således saknas termen x^9, koefficienten är alltså noll.

Svar. 20 respektive 0.