TATM79: Föreläsning 4
Funktioner

Johan Thim*

22 augusti 2018

1 Funktioner

Vad är egentligen en funktion?

Definition. En funktion f är en regel som till varje punkt x i en definitionsmängd D_f tilldelar precis ett y enligt sambandet $y = f(x)$.

Denna definition kan göras lite mer ordentlig med så kallade relationer på mängder, men vi överlämnar detta till senare kurser. Observera här att vi inte sagt något om att definitionen bara gäller reella tal. Eller ens tal överhuvudtaget! Det kunde lika gärna handla om apelsiner eller solar ute i rymden. För vår del (i denna kurs) kommer vi i princip bara att betrakta reellvärda funktioner (där $y \in \mathbf{R}$ alltså), och oftast är även $x \in \mathbf{R}$ (eller någon delmängd). Ett undantag är faktiskt polynomen $p(z)$ som vi diskuterade ovan, där $z \in \mathbf{C}$ generellt sätt.

Funktion och funktionsvärde

Observera att det är f som är funktionen. Uttrycket $f(x)$ är det värde funktionen antar i punkten $x \in D_f$. Det är alltså ganska slarvigt att skriva uttryck i stil med "funktionen $f(x)$", men vi tillåter oss göra det ibland.

Värdemängd

Definition. En funktions värdemängd V_f definieras som alla möjliga y-värden vi kan få ur sambandet $y = f(x)$,

$$V_f = \{y = f(x) : x \in D_f\}.$$

Generellt sett kan värdemängden vara svår att bestämma för en generell funktion. Vissa verktyg kommer att introduceras i envariabelanalysen, men för oss just nu är vi begränsade till ganska enkla funktioner. Till exempel vissa enkla polynom kan vi enkelt rita upp och se vad värdemängden blir.

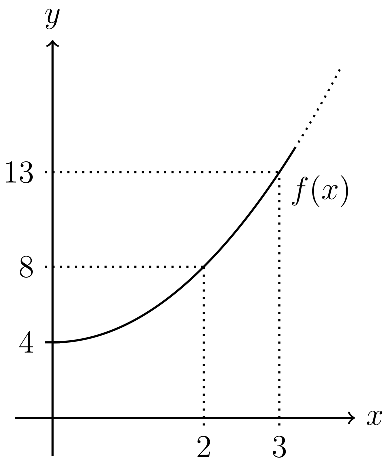
Exempel

Låt $f(x) = 4 + x^2$ för $x \geq 0$. Bestäm V_f och rita upp funktionen.

Skissa upp funktionen kan vi till exempel göra med en klassisk värdetabell för att få en

*johan.thim@liu.se

uppfattning. Sen är det ett polynom så det beter sig ganska snällt.



x	$y = 4 + x^2$
0	4
1	5
2	8
3	13
4	20
...	...

Det som är bra med en bild här är att vi direkt kan se att varje y-värde större än eller lika med 4 kan träffas av (precis ett) x-värde. Till exempel så blir $y = 5$ precis då $5 = 4 + x^2$, dvs då $x^2 = 1$. Eftersom D_f ges av villkoret $x \geq 0$ så är det bara $x = 1$ som passar.
Svar. $V_f = [4, \infty[$.

Figuren ovan brukar kallas **grafen** för funktionen f. Formellt så är grafen en mängd av punkter (x, y) där $y = f(x)$ som beskriver hur definitionsmängd och värdemängd hänger ihop, men för vår del räcker det med att betrakta grafen som en ritad figur där vi ser hur x och y-värden hänger ihop.

Exempel

Låt $f(x) = \sqrt{3 - x^2 - 2x}$. Bestäm D_f och V_f.

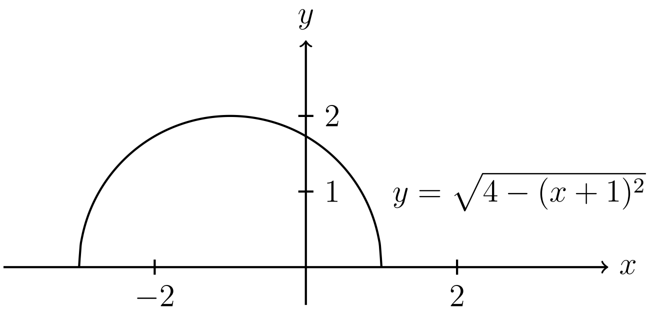
Borde inte D_f vara angiven? Inte nödvändigtvis. Om inget står brukar vi anta att D_f är största möjliga mängd där f är naturligt definierad. I detta fall är detta när kvadratroten är definierad. Hur reder vi ut när detta sker? Vi börjar med att analysera det som står i rottecknet. Det är ett polynom av grad två, så en vettig start är att kvadratkomplettera:

$$3 - x^2 - 2x = 3 - (x^2 + 2x) = 3 - ((x + 1)^2 - 1) = 4 - (x + 1)^2.$$

Eftersom kvadratorten bara är definierad för icke-negativa argument så måste $4-(x+1)^2 \geq 0$. Faktoriseringen och en teckentabell visar att $-3 \leq x \leq 1$ är nödvändigt. Så vilka y-värden kan vi få ut? Vi försöker lösa ekvationen $y = f(x)$:

$$y = \sqrt{4 - (x + 1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 = 4 - (x + 1)^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Detta är inget annat än ekvationen för övre delen av en cirkel med radie 2 och centrum i $(-1, 0)$. Största möjliga värde är alltså 2 (när $x = -1$) och minsta möjliga värde är 0 (när $x = -3$ eller $x = 1$). En figur där det mesta vi precis räknat ut kan utläsas direkt (men man måste så klart få upp figuren på något sätt också).

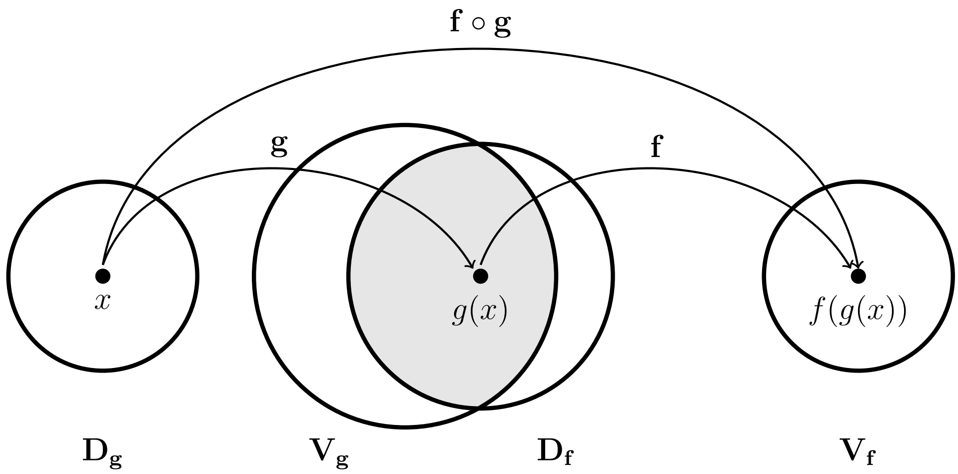


Svar. $D_f = [-3, 1]$ och $V_f = [0, 2]$.

Vad händer om vi sätter ihop två funktioner?

Sammansättning

Definition. Sammansättning $f \circ g$ av två funktioner f och g definieras av sambandet $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ där detta uttryck har mening.



Observera här att för $f \circ g$ blir definitionsmängden

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}.$$

Det följer alltså att $D_{f \circ g} \subset D_g$, men i allmänhet gäller att $V_g \neq D_f$. Var således försiktiga vid hanterandet av sammansättningar.

Exempel

Låt $g(x) = 1 - x^2$ och $f(x) = \sqrt{x}$. Jämför $f \circ g$ och $g \circ f$.

Ser vi på f och g separat så är $D_f = [0, \infty[$ och $D_g = \mathbf{R}$. Om vi betraktar $f \circ g$ så måste $1 - x^2 \geq 0$, eller ekvivalent, $-1 \leq x \leq 1$. Så,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{för } -1 \leq x \leq 1,$$

och

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x \quad \text{för } x \geq 0.$$

Observera att vi får både olika sammansatta uttryck och olika definitionsmängder för $f \circ g$ och $g \circ f$. Ordningen är alltså mycket viktig både för värdet och definitionsmängd för den sammansatta funktionen!

2 Monotonicitet

Monotonicitet

Definition. En funktion kallas

(i) **växande** om $x_1 \leq x_2$ medför att $f(x_1) \leq f(x_2)$;

(ii) **strängt växande** om $x_1 < x_2$ medför att $f(x_1) < f(x_2)$;

(iii) **avtagande** om $x_1 \leq x_2$ medför att $f(x_1) \geq f(x_2)$;

(iv) **strängt avtagande** om $x_1 < x_2$ medför att $f(x_1) > f(x_2)$;

(v) **monoton** om f är växande eller avtagande;

(vi) **strängt monoton** om f är strängt växande eller strängt avtagande.

Avtagande eller icke-växande?

I litteraturen är uttrycket avtagande/växande inte entydigt bestämt. I vissa fall (som vi definierat det) innebär till exempel avtagande att vi endast har $\leq$, så en konstant funktion uppfyller detta villkor. Verkar det vettigt att kalla en konstant funktion för både växande och avtagande? Det är en definitionsfråga. Ett vettigare uttryck är egentligen icke-växande. Var försiktig om ni läser andra böcker!

Så hur visar man att något är, till exempel, strängt växande? I envariabelanalyskursen kommer ni att lära er andra metoder, men i detta fall är vi tvungna att visa att olikheten i föregående definition är uppfylld. Vi betraktar ett exempel.

Exempel

Visa att $f(x) = x^3$ är strängt växande.

Lösning. Vi undersöker $f(x_2) - f(x_1)$ och visar att detta uttryck är strikt större än noll om $x_1 < x_2$. Vi ser att $x_1 - x_2$ borde vara en faktor så vi försöker faktorisera:

$$\begin{aligned} x_2^3 - x_1^3 &= (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) \\ &= (x_2 - x_1)((x_1 - x_1/2)^2 + 3x_1/2)^2) > 0 \end{aligned}$$

ty $(x_1 - x_2/2)^2 + 3x_1^2/2 > 0$ och $x_2 > x_1$.

3 Inverterbarhet

Injektivitet

Definition. En funktion f kallas **injektiv** (eller **ett-till-ett**) om det till varje $x \in D_f$ finns precis ett $y \in V_f$ så att $y = f(x)$. Eller ekvivalent:

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Invers

Definition. Om f är injektiv så har f en invers f^{-1} så att

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

Hur hittar vi då inversen (om den finns)? Vi löser helt enkelt ut x ur ekvationen $y = f(x)$.

Exempel

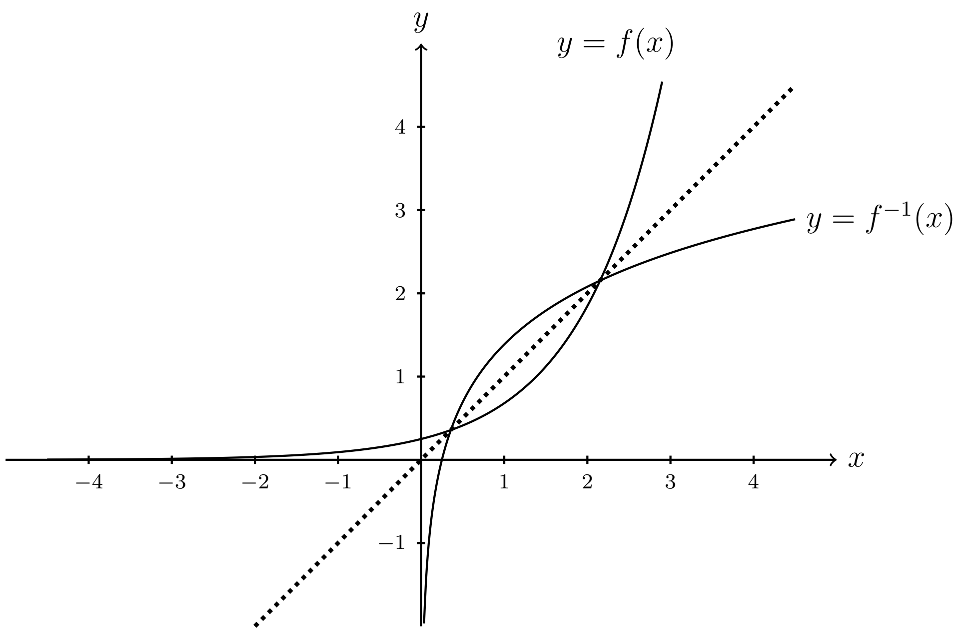
Finn inversen, om den finns, till $f(x) = \sqrt{4-(x+1)^2}$ för $x \geq -1$.

Lösning. Vi försöker helt enkelt att lösa ut x ur ekvationen $y = f(x)$:

$$y = \sqrt{4-(x+1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 = 4-(x+1)^2, \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4, \\ y \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -1 + \sqrt{4-y^2}$$

Eftersom vi bara får ett svar så finns inversen. Skulle vi erhålla något i stil med $x = \pm\cdots$ så det finns flera möjligheter så finns det ingen invers (om inte någon möjlighet faller bort).
Svar. $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{4-x^2}$.

Grafiskt går det att representera inversen som speglingen av kurvan $y = f(x)$ i linjen $y = x$.



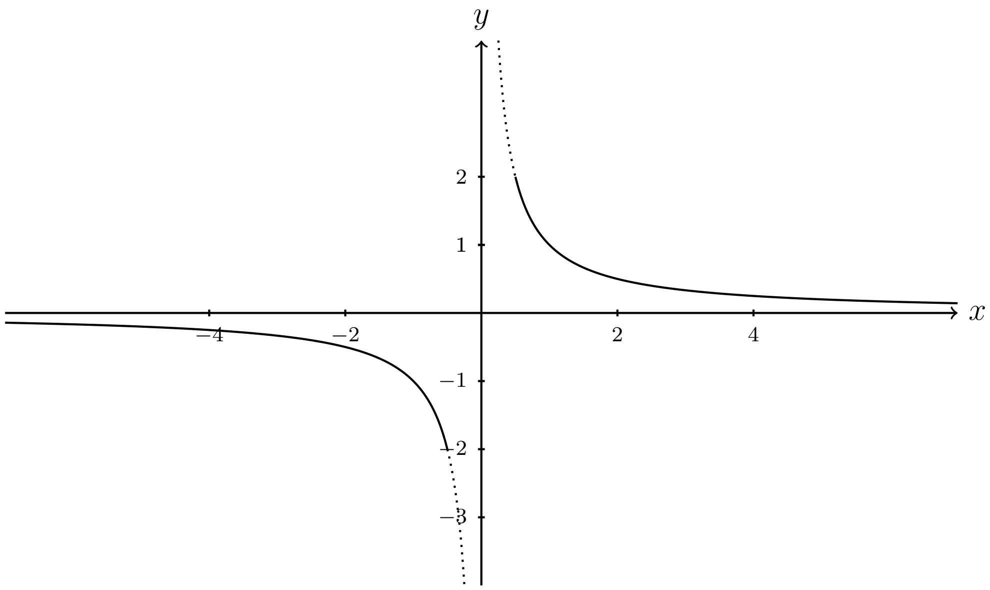
Exempel

Låt $f(x) = 4 + x^2$ där $D_f = \mathbf{R}$. Undersök om f är injektiv.

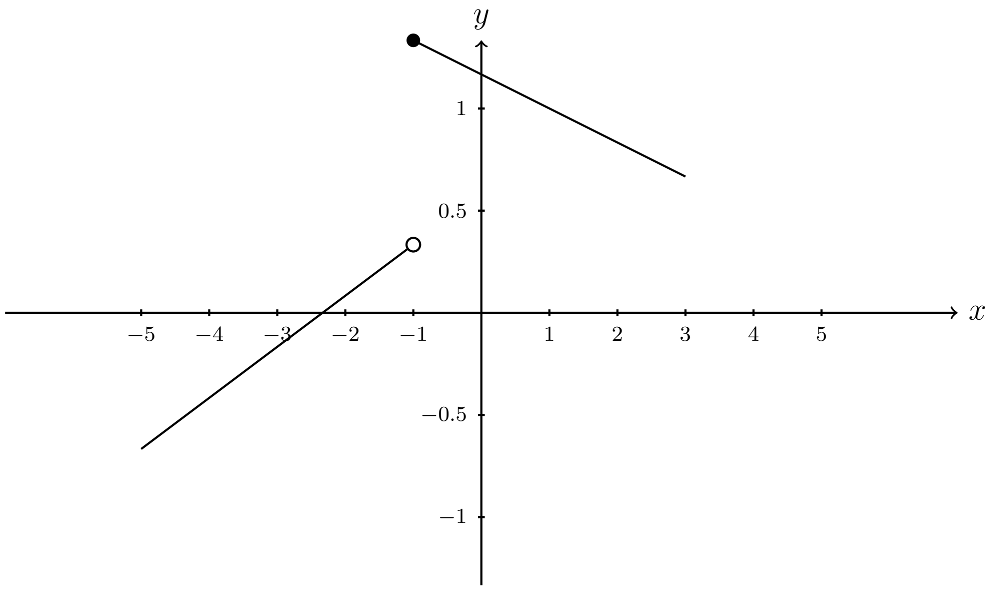
Lösning. Nej, f kan inte vara injektiv. Kvadraten är ett vanligt tecken på att en funktion inte är injektiv om D_f innehåller viss symmetri kring nollan. Specifikt, till exempel $f(-1) = 4 + (-1)^2 = 4 + (1)^2 = f(1)$. Alltså är f inte injektiv.

Sats. En strängt monoton funktion är alltid inverterbar.

Märk väl att satsen ovan endast är en implikation. En inverterbar funktion behöver inte vara strängt monoton. Ett enkelt exempel är funktionen $n(x) = \dfrac{1}{x}$ med $D_n = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$. Figuren nedan visar utseendet.



Uppenbarligen gäller inte att om $x_1 < x_2$ med $x_1, x_2 \in D_n$ så är $n(x_1) > n(x_2)$ i fallet då $x_1 < 0$ och $x_2 > 0$. Men lokalt kring varje punkt $x \in D_n$ gäller så klart att n är strängt avtagande. Problemet uppstår i ”punkteringen” av definitionsmängden där funktionen tillåts hoppa ordentligt. Fusk? Kan vi hitta exempel på ett sammanhängande intervall? Ett sätt att konstruera ett sådant exempel är att skarva ihop två funktioner — en växande och en avtagande — så det uppstår ett ”hopp” som separerar graferna. Ta till exempel följande funktion h med definitionsmängd $D_h = [-5, 3]$.



Det är tydligt att varje y-värde i värdemängden motsvarar precis ett x-värde i definitionsmängden, så funktionen är inverterbar. Däremot är den så klart varken strängt växande eller avtagande.
Nu kanske man kan tycka att h ändå i princip är monoton eftersom den är det på olika delintervall, så den går att dela upp i två delar där h är endera strängt avtagande eller strängt växande. Skulle den slutsatsen gälla generellt? Går det alltid att dela upp i mindre intervall där funktionen är strängt växande eller avtagande? Svaret är nej. Betrakta till exempel följande roliga funktion:

$$d(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q}, \\ 1 - x, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Funktionen d definieras alltså enligt $d(x) = x$ om x är rationell och $d(x) = 1 - x$ om x är irrationell. På intervallet $]0, 1[$ är d uppenbarligen inverterbar ty $d^{-1}(x) = d(x)$, men det finns inget delintervall där d är växande eller avtagande. Att ge sig in på att rita upp funktionen blir dock problematiskt (varför?).
När begreppet kontinuitet introduceras i envariabelanalysen får ni svaret på frågan om en *kontinuerlig* funktion definierad på ett intervall kan vara inverterbar utan att vara strängt växande eller avtagande på definitionsintervallet.

4 Udda och jämna funktioner

Udda och jämn funktion

Definition. En funktion f är **udda** om $f(-x) = -f(x)$ för alla x. En funktion f är **jämn** om $f(-x) = f(x)$ för alla x.

Exempel

(i) Funktionerna 1, $4 + x^2$, $\cos x$, $\ldots$, är jämna.

(ii) Funktionerna x, x^3, $\sin x$, $1/x$, $\ldots$, är udda.

Observera att en funktion f varken behöver vara udda eller jämn. De flesta funktioner är varken eller. Till exempel $f(x) = 1 + x + x^2$. Rita figur! Däremot går det alltid att dela upp en funktion i en summa av en udda och en jämn funktion:

$$f(x) = f_u(x) + f_j(x),$$

där till exempel $f_u(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ och $f_j(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$. Ibland kan det vara mycket användbart att bryta ned en funktion på detta sätt.
Notera även att en jämn funktion inte kan vara injektiv om både x och $-x$ tillhör definitionsmängden för något $x \neq 0$.