TATM79: Föreläsning 6
Logaritmer och exponentialfunktioner

Johan Thim*

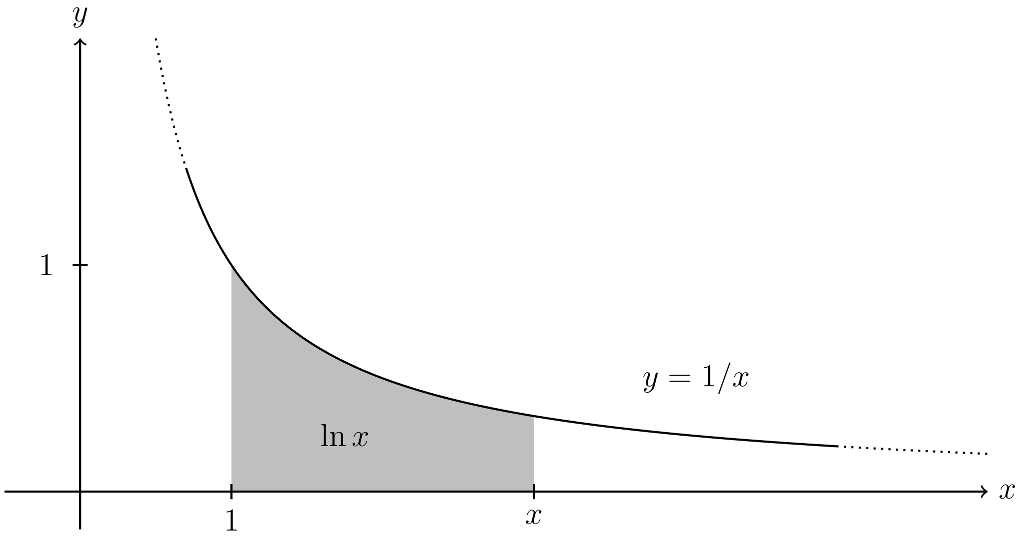
22 augusti 2018

1 Den naturliga logaritmen

Vi börjar med att introducera den naturliga logaritmen.

Definition. Den naturliga logaritmen $\ln x$ för $x > 0$ definieras som $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

Här ser vi att vi använder integralbegreppet utan att direkt ha definierat det innan. Vi återkommer till detta i envariabelanalysen när Riemann-integralen behandlas. Förhoppningsvis kommer vi ändå ihåg att man kan tolka en bestämd integral som arean under kurvan.



*johan.thim@liu.se

Egenskaper

Den naturliga logaritmen har bland annat följande egenskaper:

(i) $D_{\ln} =]0, \infty[$ och $V_{\ln} = \mathbf{R}$;

(ii) $\ln xy = \ln x + \ln y$ för $x, y > 0$;

(iii) $\ln x < x - 1$ för $x > 0$ och $x \neq 1$;

(iv) $\ln 1 = 0$;

(v) $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$ för $x, y > 0$;

(vi) $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$ för $x > 0$;

(vii) $\ln x^p = p \ln x$ för $x > 0$ och $p \in \mathbf{Z}$.

De första tre egenskaperna behöver visas från definitionen medan övriga egenskaper följer från dessa tre. Till exempel kan vi se att $\ln x = \ln(x \cdot 1) = \ln x + \ln 1$, så $\ln 1 = 0$ är nödvändigt. Vi kan även se detta direkt från definitionen via Riemann-integralen så klart. Vidare,

$$\ln x = \ln \left(\frac{x}{y} y \right) = \ln \frac{x}{y} + \ln y,$$

vilket bevisar (v). Egenskap (vi) är ett specialfall av (v) och (vii) kan visas genom att betrakta $x^p = x \cdot x \cdots x$ och utnyttja (ii) (och (vi) då $p < 0$). Observera att vi inte kan säga något om fallet då p ej är ett heltal i nuläget; vi återkommer strax till detta.

Dessa egenskaper kan också användas för att visa en användbar olikhet för att ”stänga in” logaritmen.

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1, \quad \text{för } x > 0 \text{ och } x \neq 1.$$

Vi kan även använda denna egenskap för att visa att $\ln x < 0$ då $0 < x < 1$ och $\ln x > 0$ då $x > 1$, även om detta också är tämligen klart från Riemann-integralen.

Övriga samband kan illustreras på liknande sett (övning!)

Den naturliga logaritmen ln är strängt växande.

Bevis. Låt $x_2 > x_1 > 0$. Då är $\dfrac{x_2}{x_1} > 1$, så

$$0 < \ln \frac{x_2}{x_1} = \ln x_2 - \ln x_1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x_1 < \ln x_2.$$

Alltså är ln strängt växande.

Exempel

Lös ekvationen $\ln(x+1) = \ln(5+x) - \ln(x+2)$ för $x \in \mathbf{R}$.

Lösning. För att alla ingående uttryck ska vara definierade krävs att $x+1 > 0$, $5+x > 0$, och $x+2 > 0$. Från detta ser vi att $x > -1$ krävs för att samtliga uttryck ska vara definierade. Antag att $x > -1$. Då gäller

$$\ln(x+1) = \ln(5+x) - \ln(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\big((x+1)(x+2)\big) = \ln(5+x),$$

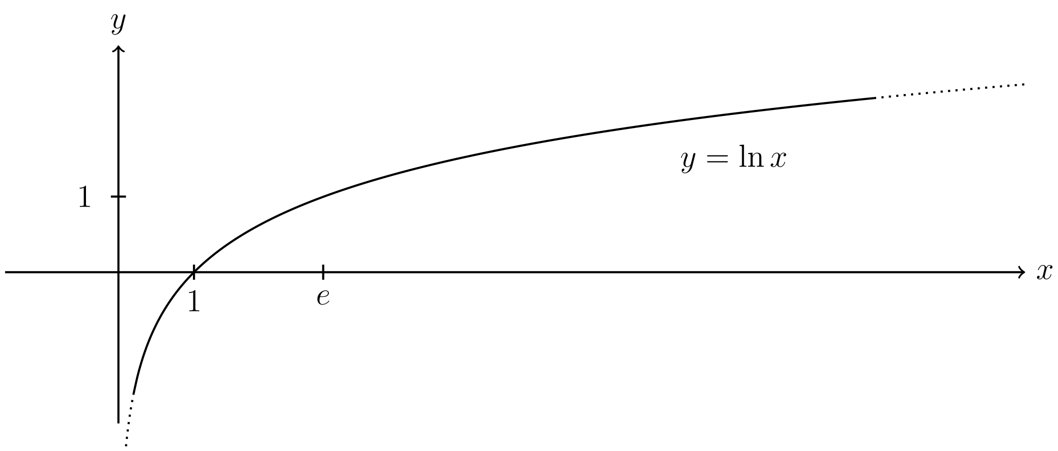
och eftersom ln är strängt växande gäller då att

$$(x+1)(x+2) = 5+x \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2x-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+3)=0.$$

Endast $x=1$ är en lösning då $x=-3$ ej uppfyller kravet $x > -1$.
Svar: $x=1$ enda lösningen.

Logaritmer och negativa tal?

Observera att vi endast har definierat $\ln x$ för $x > 0$. Men detta innebär absolut **inte** att $\ln x > 0$ för alla x. Om $0 < x < 1$ så är $\ln x < 0$. Det är skillnad på definitionsmängden och värdemängden!



Observera även att till exempel $\ln(xy)$ kan vara definierad även om $\ln x$ och $\ln y$ inte är det. Det räcker att produkten blir positiv, så exempelvis $x=-2$ och $y=-3$ skulle fungera. Detta kan ställa till det när vi löser ekvationer som innehåller logaritmer, så var försiktiga!

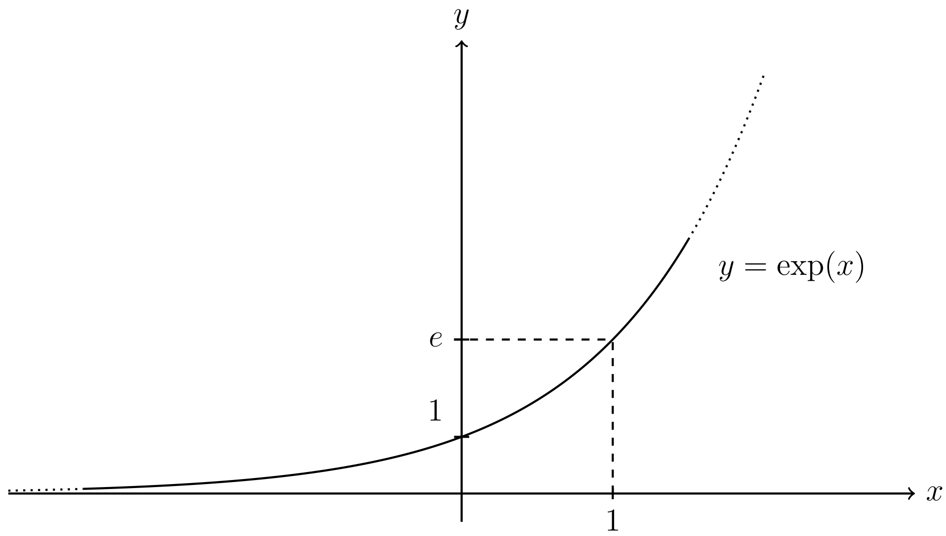
2 Exponentialfunktionen

Eftersom ln är strängt växande finns en invers som vi kallar exp, dvs

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp(y),$$

där $D_{\exp} = \mathbf{R}$ och $V_{\exp} =]0,\infty[$. Som vanligt (med inverser) gäller

$$\ln(\exp x) = x, \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{och} \quad \exp(\ln x) = x, \quad x > 0.$$



Om vi jämför graferna för ln och exp så kan man se att $\exp x$ är spegelbilden av $\ln x$ kring linjen $y = x$. Detta gäller generellt för inverser! Så hur hör nu funktionen exp ihop med talet e?

Talet e

Definition. Talet e definieras som $e = \exp(1)$.

Talet e är irrationellt, har närmevärdet $e \approx 2.718$ och uppfyller att $\ln e = 1$.
Om $p \in \mathbf{Z}$ så följer det av logaritmlagarna ovan att

$$\ln e^p = p \ln e = p \qquad \text{eller ekvivalent} \qquad \exp(p) = \exp(\ln e^p) = e^p.$$

Vi väljer därför att skriva $e^x = \exp(x)$. Det är alltså så här vi *definierar* talet e^x genom funktionen exp för alla x.

$\exp(x)$ och $\mathbf{e^x}$

Vi kommer att använda dessa uttryck helt utbytbart, de betyder alltså samma sak. När vi skriver e^x så syftar vi på funktionsvärdet $\exp(x)$. Notationen exp är lämplig ibland, speciellt när det är komplicerade argument. Till exempel kanske vissa tycker

$$\exp\left(1 + \sqrt{x\sqrt{x} - x^3 \sin x}\right)$$

är lättare att läsa än

$$e^{1+\sqrt{x\sqrt{x}-x^3\sin x}}.$$

Egenskaper

Funktionen som definieras av e^x har bland annat följande egenskaper:

(i) $e^0 = 1$ och $e^1 = e$;

(ii) $\ln e^x = x$ för $x \in \mathbf{R}$ och $e^{\ln x} = x$ för $x > 0$;

(iii) $e^{x+y} = e^x e^y$;

(iv) $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$;

(v) $(e^x)^p = e^{px}$ då $p \in \mathbf{Z}$.

Exempel

Lös ekvationen $e^x + 4e^{-x} = 4$.

Lösning. Det följer att

$$e^x + 4e^{-x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 4e^x + 4 = 0.$$

Låt $t = e^x$. Då måste $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$, vilket endast $t = 2$ uppfyller. Alltså är $e^x = 2$, eller ekvivalent, $x = \ln 2$.
Svar: $x = \ln 2$.
Något bökigare? Kanske som handlar om inversen till ett uttryck?

Exempel

Bestäm definitionsmängden och (om möjligt) inversen till $f(x) = \ln\left(\sqrt{7} - \ln(1+2x)\right)$.

Lösning. Vi börjar med att bestämma den största möjliga definitionsmängden. Kraven som måste gälla är att $1 + 2x > 0$ samt $\sqrt{7} - \ln(1+2x) > 0$. Alltså måste $x > -\frac{1}{2}$ och

$$\sqrt{7} - \ln(1+2x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{7}} > 1 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{7}} - 1\right) > x$$

eftersom ln är strängt växande. Således ges D_f av de $x \in \mathbf{R}$ så att

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{7}} - 1\right).$$

Låt $y \in \mathbf{R}$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = \ln(\sqrt{7} - \ln(1+2x)) \quad &\Rightarrow \quad \exp(y) = \sqrt{7} - \ln(1+2x) \\ &\Rightarrow \quad 1 + 2x = \exp(\sqrt{7} - \exp(y)) \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(\exp(\sqrt{7} - \exp(y)) - 1\right). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Eftersom vi bara har ett alternativ ges inversen av

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\left(\exp(\sqrt{7} - \exp(y)) - 1\right).$$

Svar: $D_f = \left\{x \in \mathbf{R} : -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{7}} - 1\right)\right\}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2}\left(\exp(\sqrt{7} - \exp(y)) - 1\right)$.
Vad hade hänt om vi fått flera möjligheter i ekvation $(*)$ ovan? Tänk på att vi ”bara” räknade med implikationer!

3 Potensfunktioner

Potensfunktioner

Definition. Vi definierar potensfunktionen x^α enligt $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ då $x > 0$ och $\alpha \in \mathbf{R}$, samt $x^\alpha = 0$ då $x = 0$ och $\alpha > 0$.

Detta är en rimlig definition. Till exempel vet vi att

$$x^p = (e^{\ln x})^p = e^{p \ln x}, \quad p \in \mathbf{Z},$$

vilket stämmer överens med definitionen ovan.
Eftersom potensfunktioner är definierade via exp-funktionen så gäller motsvarande regler. Till exempel så är

$$x^\alpha x^\beta = \exp(\alpha \ln x) \exp(\beta \ln x) = \exp(\alpha \ln x + \beta \ln x) = \exp((\alpha + \beta) \ln x) = x^{\alpha+\beta}, \quad x > 0.$$

Övriga regler kan visas på liknande sätt. Specifikt kan poängteras att

$$(e^\alpha)^\beta = \exp(\beta \ln e^\alpha) = \exp(\alpha\beta) = e^{\alpha\beta},$$

så kravet att $\beta \in \mathbf{Z}$ är inte längre nödvändigt med definitionen ovan, utan likheten gäller för alla $\beta \in \mathbf{R}$.

Exempel

Finn alla reella x så att $4^{x+1} - 2^{x+2} = 2^3$.

Lösning. Vi skriver om ekvationen för att se om vi kan finna en lämplig variabel:

$$4^{x+1} - 2^{x+2} = 4 \cdot 4^x - 2^2 \cdot 2^x = 4 \cdot 2^x \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x = 4t^2 - 4t,$$

där $t = 2^x$. Då är $t > 0$ och ekvationen kan alltså skrivas

$$4t^2 - 4t - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t+1)(t-2) = 0.$$

Här ser vi att $t = -1$ inte går (då $2^x = -1$ saknar lösning) och att $t = 2$ medför att $2^x = 2$, så $x = 1$.
Svar: $x = 1$.