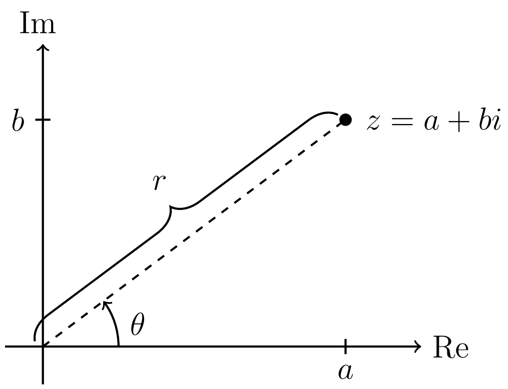
TATM79: Föreläsning 8
Komplexa exponentialfunktionen och binomiska ekvationer

Johan Thim*

22 augusti 2018

1 Komplexa tal på polär form

Ett komplex tal $z = a + bi$ kan som bekant betraktas som en punkt i komplexa talplanet med två koordinater (a, b). En annan variant för att beskriva z är att istället ange ett avstånd r till origo och en vinkel; vi kallar detta för polär form.



Lite geometri visar att

$$a = r\cos\theta \qquad \text{och} \qquad b = r\sin\theta,$$

så

$$z = a + bi = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Som bekant är $r = |z|$, men hur uttrycker vi θ?

Definition. Argumentet $\arg z$ för ett komplext tal z definieras som alla vinklar φ så att $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Observera att $\arg z$ är en flervärd funktion! Lite bökigt att hantera ordentligt alltså. När vi säger "argumentet för z" menar vi oftast *något* värde på φ så att $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

*johan.thim@liu.se

1.1 Den komplexa exponentialfunktionen

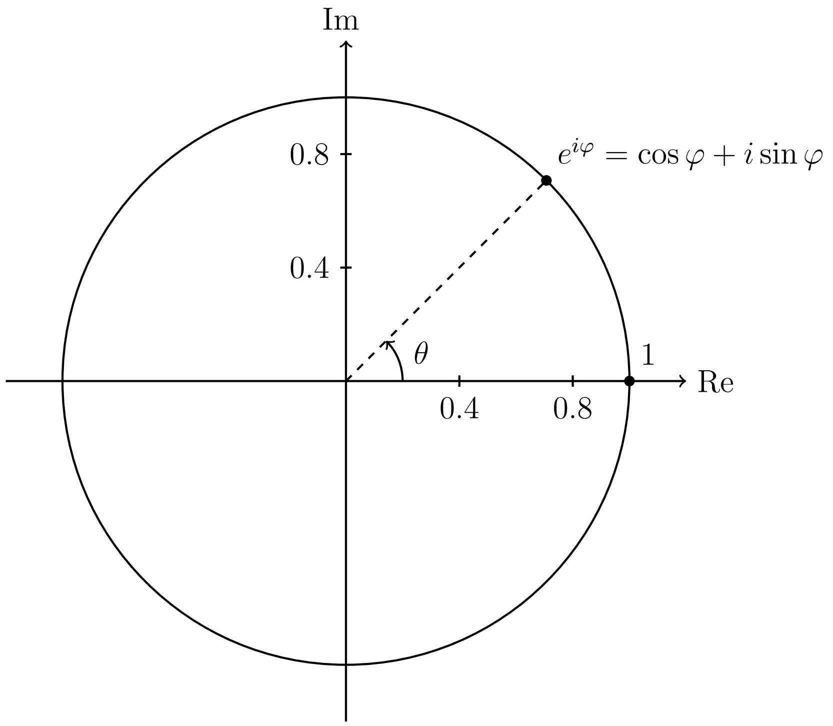
Tidigare har vi betraktat funktion exp för reella argument. Kan vi utvidga definitionen till komplexa tal? Följande definition visar att detta är möjligt.

Definition. För alla $\varphi \in \mathbf{R}$ så definierar vi $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Vi observerar att $e^{i\varphi}$ är ett tal på enhetscirkeln ty

$$|e^{i\varphi}| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$$

enligt trigonometriska ettan. Vi kan alltså betrakta $e^{i\varphi}$ som en punkt på cirkeln $|z| = 1$:



Det visar sig att de flesta ”regler” som gäller för den vanliga exponentialfunktionen fortfarande är sanna.

(i) $\dfrac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$;

(ii) $e^{i\varphi}e^{i\theta} = e^{i(\varphi+\theta)}$;

(iii) $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ för $n \in \mathbf{Z}$ (obs **endast heltal**);

Punkt (iii) kallas de Moivres formel. Dessa likheter visas helt enkelt genom att använda definitionen av $e^{i\varphi}$. Vi kikar närmare på (i):

$$\frac{1}{e^{i\varphi}} = \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}.$$

Exempel

Använd den komplexa exponentialfunktionen för att visa additionsformlerna för sinus och cosinus.

Lösning. Detta är ett ganska elegant sätt att ta fram additionsformlerna på. Vi betraktar följande samband mellan reella u och v:

$$\begin{aligned} e^{i(u+v)} &= e^{iu}e^{iv} = (\cos u + i\sin u)(\cos v + i \sin v) \\ &= \cos u \cos v - \sin u \sin v + i(\sin u \cos v + \cos u \sin v). \end{aligned}$$

Eftersom $e^{i(u+v)} = \cos(u+v) + i\sin(u+v)$ måste då

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

och

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

eftersom realdelen och imaginärdelen måste stämma överens. Observera att argumentet dock blir cirkulärt om man visat punkt (ii) ovan med hjälp av additionsformlerna.

Ibland kan det underlätta att betrakta en så kallad ”komplex form” av ett uttryck. Om vi har något som innehåller $\sin x$ eller $\cos x$ kan ju dessa betraktas som imaginär- eller realdel av e^{ix}. Vi visar med ett exempel.

Exempel

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \operatorname{Im}\left(e^{i3x}\right) = \operatorname{Im}\left((e^{ix})^3\right) = \operatorname{Im}\left((\cos x + i \sin x)^3\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\cos^3 x + 3i\cos^2 x \sin x + 3i^2 \cos x \sin^2 x + i^3 \sin^3 x\right) \\ &= 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x. \end{aligned}$$

1.2 Eulers formler

Om vi löser ut $\cos\varphi$ och $\sin\varphi$ ur de ekvationer vi får från definitionen av $e^{i\varphi}$ och $e^{-i\varphi}$ så ser vi att

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} \\ 2i\sin\varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} \end{cases}$$

Vi skriver ofta sambanden som

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \text{och} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Dessa brukar kallas för Eulers formler och är mycket användbara. Bara med hjälp av trigonometriska ettan och Eulers formler kan man ofta härleda de flesta trigonometriska samband vi stöter på, även om det inte alltid blir så enkla kalkyler.

Exempel

Undersök vilka x som uppfyller $4\sin 2x \sin 4x - 8\sin x \sin 2x \cos 3x = 1$ genom att skriva om vänsterledet som en summa av sin / cos-termer och lösa ekvationen som uppstår.

Lösning. Vi använder Eulers formler och finner att

$$\begin{aligned}\sin x \sin 2x \cos 3x &= \frac{1}{-8}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right) \\ &= \frac{1}{-8}\left(e^{6ix} + 2 + e^{-6ix} - e^{2ix} - e^{-2ix} - e^{4ix} - e^{-4ix}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(1 + \cos 6x - \cos 2x - \cos 4x\right)\end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned}\sin 2x \sin 4x &= \frac{1}{-4}\left(e^{6ix} + e^{-6ix} - e^{2ix} - e^{-2ix}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\cos 6x - \cos 2x\right).\end{aligned}$$

Med dessa samband kan vi skriva om ekvationen i fråga enligt

$$-2\cos 6x + 2\cos 2x + 2 + 2\cos 6x - 2\cos 2x - 2\cos 4x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 4x = \frac{1}{2},$$

så $4x = \pm\pi/3 + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\pi/12 + \pi n/2$, där $n \in \mathbf{Z}$.

Svar: $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2 Binomiska ekvationer

Uttrycket binom innebär ett polynom med två termer, så vi betraktar uttryck av typen $z^n - w$, där $z, w \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$, samt w och n är kända storheter. Hur löser vi ut z ur en ekvation av typen $z^n = w$? Tanken är att vi arbetar med det hela på polär form, så:

(i) Skriv z och w på polär form: $z = re^{i\varphi}$ och $w = \rho e^{i\theta}$. Här kommer ρ och θ att vara kända, ρ och $r > 0$, samt $\varphi, \theta \in \mathbf{R}$.

(ii) Eftersom $z = re^{i\varphi}$ så är $z^n = r^n e^{in\varphi}$ och vi försöker alltså lösa ekvationen $r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$.

(iii) Isolera absolutbeloppet och argumentet i ekvationen. Vi löser

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}.$$

Absolutbeloppet:

$$|r^n e^{in\varphi}| = |\rho e^{i\theta}| \quad \Leftrightarrow \quad r^n = \rho \quad \Leftrightarrow \quad r = \rho^{1/n},$$

där vi endast har en lösning (den positiva) $r = \rho^{1/n}$ som är definierad ty $\rho > 0$.

Argumentet:

$$\arg(r^n e^{in\varphi}) = \arg(\rho e^{i\theta}) \quad \Leftrightarrow \quad n\varphi = \theta + 2\pi k \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

där vi erhåller flera möjligheter eftersom $\arg z$ är en flervärd funktion.

(iv) Lista upp vilka lösningar vi erhåller. Observera att det räcker med n stycken eftersom det bara finns n rötter till ekvationen! Vilka? Bara vi tar en följd med n värden, till exempel $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, så får vi med allt. Skissa in lösningarna i en cirkel. När vi tagit n stycken i följd kommer vi tillbaka till den punkten vi startade i.

Exempel

Finn alla komplexa lösningar till $z^6 + 729 = 0$.
Ange eventuella lösningar på formen $z = a + ib$, a, $b \in \mathbf{R}$.

Lösning. Vi börjar med att skriva -729 på polär form:

$$-729 = 729e^{i\pi} = 3^6 e^{i\pi}.$$

Låt $z = re^{i\varphi}$, där $r > 0$. Då måste $z^6 = r^6 e^{6i\varphi} = 3^6 e^{i\pi}$, så

$$z^6 = -729 \quad \Leftrightarrow \quad r^6 e^{i6\theta} = 3^6 e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^6 = 3^6, \ r \geq 0, \\ 6\theta = \pi + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

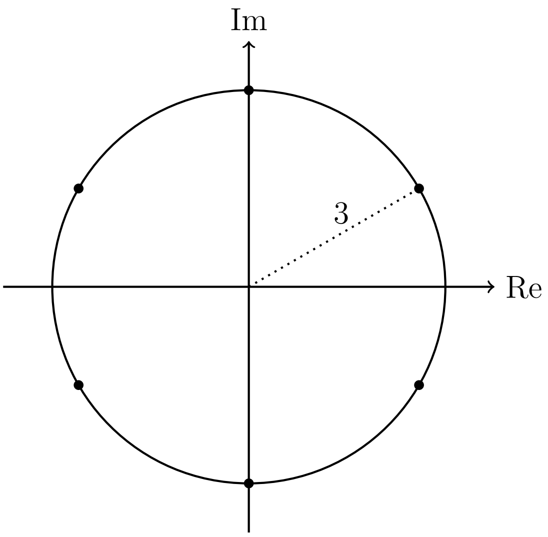
Alltså är $r^6 = 3^6$ och $6\varphi = \pi + 2\pi n$ där n är heltal (absolutbeloppet och argumenten måste stämma överens). Detta ger att $r = 3$ och att $\varphi = \pi/6 + n\pi/3$. Våra lösningar blir nu

$$z = 3e^{i(\pi/6 + n\pi/3)} = 3e^{i(1+2n)\pi/6}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 6$ får vi samma komplexa tal som när $n = 0$). Observera dock att för ekvivalensen ovan **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig. Om vi förenklar dessa får vi lösningarna

$$z = \pm 3i, \qquad z = \pm\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), \qquad z = \pm\frac{3}{2}(\sqrt{3} - i).$$

Svar: $z = \pm 3i,\ \pm\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i),\ \pm\frac{3}{2}(\sqrt{3} - i)$.
Lösningarna ligger **alltid** jämnt fördelade på en cirkel i komplexa talplanet.



Uttryck i stil med $w^{1/n}$ (med Im $w \neq 0$) har ingen mening i denna kurs. Om $n = 2$ till exempel skulle det innebära att vi tar kvadratroten ur ett komplex tal. Hur skulle det definieras? Vi lämnar sådana övningar till en kurs i komplex analys.

3 Addition av arcus-funktioner: komplex hjälpmetod

Exempel

Förenkla $\arctan 2 + \arctan 3$.

Lösning: Låt $z_1 = 1 + 2i$ och $z_2 = 1 + 3i$. Låt v_1 vara vinkeln som z_1 bildar mot positiva real-axeln, och v_2 vinkeln z_2 bildar mot positiva real-axeln. Det följer att

$$\tan v_1 = \frac{2}{1} = 2 \qquad \text{och} \qquad \tan v_2 = \frac{3}{1} = 3.$$

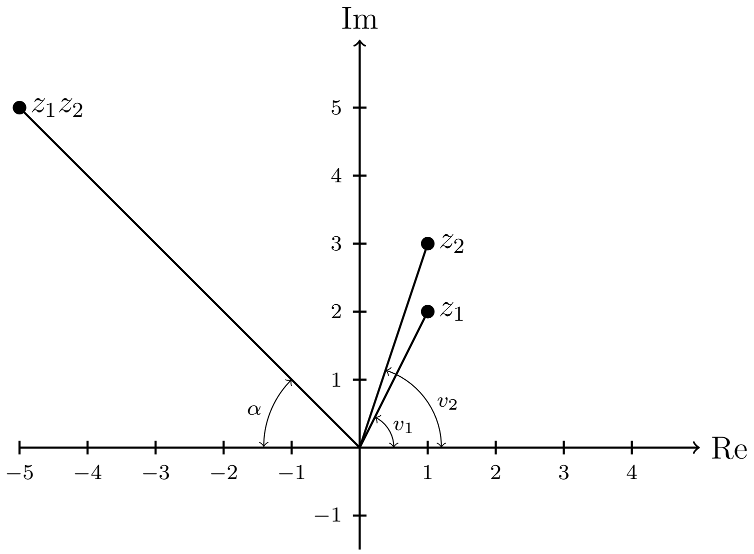
En lösning till respektive ekvation fås genom $v_1 = \arctan 2$ och $v_2 = \arctan 3$. Dessa vinklar ligger i första kvadranten och är de vi söker. Om vi nu skriver z_1 och z_2 på polär form,

$$z_1 = \sqrt{5}e^{i \arctan 2} \qquad \text{och} \qquad z_2 = \sqrt{10}e^{i \arctan 3},$$

ser vi att $z_1 z_2 = \sqrt{50}e^{i(\arctan 2 + \arctan 3)}$. Det följer alltså att

$$\arg(z_1 z_2) = \arctan 2 + \arctan 3 + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Men, vi vet också att $z_1 z_2 = (1 + 2i)(1 + 3i) = -5 + 5i$. Vi har följande illustration:



Vi ser att $\tan \alpha = 5/5 = 1$, så $\alpha = \arctan 1 = \pi/4$. Alltså blir $v_3 = \pi - \arctan 1 = 3\pi/4$ vinkeln mellan $z_1 z_2$ och (positiva) real-axeln, där $z_1 z_2 = \sqrt{50}e^{iv_3}$. Observera att vi inte kan skriva $\arctan(-1)$ eftersom den vinkeln ligger i 4:e kvadranten ($= -\pi/4$). Detta medför att

$$\arg(z_1 z_2) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Ekvationerna (1) och (2) implicerar att

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{3}$$

Heltalet n kommer från $n = k - m$, som kan anta vilket heltal som helst. För att kunna välja det n som är nödvändigt (det finns bara ett korrekt svar) så måste vi uppskatta hur stort talet $\arctan 2 + \arctan 3$ är. Funktionen $\arctan x$ är strängt växande, så

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 < \arctan 2 < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}.$$

Vi kan alltså se att $\pi/4 + \pi/4 < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi$, eller

$$\frac{\pi}{2} < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi.$$

Alltså måste vi välja $n = 0$ i (3).

Svar: $\arctan 2 + \arctan 3 = \dfrac{3\pi}{4}$. **OBS: Ett svar!**