LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Hans Lundmark

Tentamen i TATA09, Analys B för KeBi
2006–06–09 kl 8–13

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~halun/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Beräkna volymen av det begränsade området i $\mathbf{R}^3$ mellan ytorna $z = x^2$ och $z = 2 - y^2$.

2. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = 30x - 4x^2 + y^2 - 10y + 2xy$ på den mängd i $\mathbf{R}^2$ som ges av olikheterna $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $x + y \leq 10$.

3. (a) Bestäm alla funktioner $f(x, y, z)$ sådana att
$$\nabla f = \begin{pmatrix} (1 + xy + yz)e^{xy} \\ (x^2 + xz)e^{xy} + \sin z \\ e^{xy} + y\cos z \end{pmatrix}$$
   (b) Är $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin^2 k}$ konvergent eller divergent?
   (c) Härled Maclaurinserien för $\arctan x$.
   (1 poäng per deluppgift.)

4. Uttryck $\partial f/\partial x$ i polära koordinater (om $f(x, y)$ är en $\mathcal{C}^1$-funktion).

5. Beräkna arean av området $x^2 + xy + 2y^2 \leq 1$.

6. Rita kurvan $y = e^{xy}$, och bestäm de punkter på kurvan som inte har någon omgivning där ekvationen implicit definierar en funktion $y = y(x)$.

7. Visa att
$$0 < e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \frac{x^{n+1}}{n \cdot n!}$$
om $0 < x < 1$ och $n \geq 1$.

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2006–06–09

1. Kroppen ges av $x^2 \le z \le 2 - y^2$, vars projektion D på xy-planet är cirkeln $x^2 + y^2 \le 2$. Volymen är

$$\iint_D \big((2-y^2) - x^2\big)\,dx\,dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2)\,r\,dr$$

Svar: 2π.

2. Funktionen är kontinuerlig och området kompakt, så största och minsta värde existerar säkert. Funktionens enda stationära punkt $(x,y) = (4,1)$ tillhör området. Vidare är $f(x,0) = \frac{1}{4}\big(225 - (4x-15)^2\big)$, $f(0,y) = (y-5)^2 - 25$, och $f(x, 10-x) = 80 - 5(x-4)^2$. Intressanta punkter på randen är således triangelns hörn samt $(\frac{15}{4}, 0)$, $(0,5)$ och $(4,6)$. (Alltså totalt sju kandidatpunkter att undersöka.)

Svar: Maximum $f(4,6) = 80$, minimum $f(10,0) = -100$.

3. (a) $f(x,y,z) = (x+z)e^{xy} + y \sin z + C$.

   (b) Divergent, eftersom termerna inte går mot noll.

   (c) Den geometriska serien $(1+t^2)^{-1} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots$ konvergerar då $|t| < 1$, och kan alltså integreras termvis från $t = 0$ till $t = x$ då $|x| < 1$.

4. **Svar**: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\varphi \dfrac{\partial f}{\partial r} - \dfrac{\sin\varphi}{r} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$. (Se läroboken för detaljer.)

5. Eftersom $x^2 + xy + 2y^2 = (x + y/2)^2 + 7y^2/4$ så ger variabelbytet $u = x + y/2$, $v = \sqrt{7}y/2$ att arean är

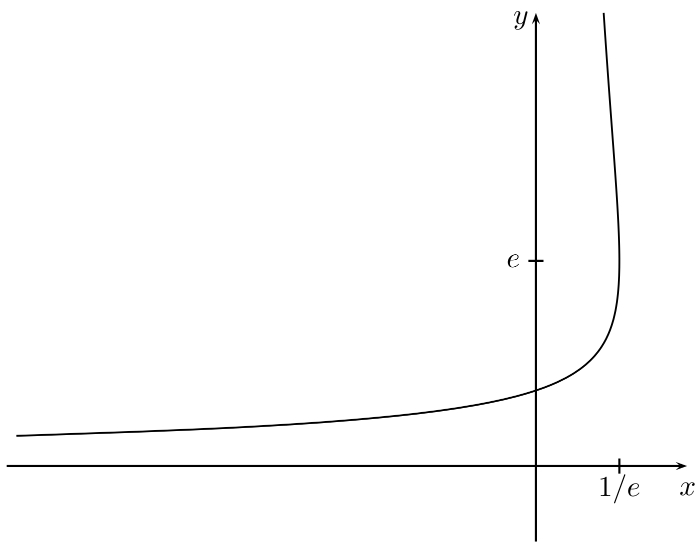
$$\iint\limits_{x^2+xy+2y^2 \le 1} dx\,dy = \iint\limits_{u^2+v^2 \le 1} \frac{du\,dv}{\sqrt{7}/2}.$$

(Alternativt, diagonalisera den kvadratiska formen $x^2 + xy + 2y^2$ för att hitta ellipsens halvaxlar a och b och använd sedan $A = \pi ab$.)

Svar: $2\pi/\sqrt{7}$.

(forts.)

6. Variabeln y låter sig inte lösas ut ur ekvationen explicit; däremot är det lätt att lösa ut $x = x(y) = \ln y/y$ (för $y > 0$) och rita denna kurva. Derivatan är $x'(y) = (1 - \ln y)\, y^{-2}$, så maximum är $x(e) = 1/e$:



Den enda punkt där y inte lokalt är en funktion av x är $(x, y) = (1/e, e)$.

7. Eftersom $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ så är

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right).$$

Detta är uppenbart positivt om $x > 0$, och om dessutom $x < 1$ så är summan inom parentes mindre än den geometriska serien

$$1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n},$$

varur önskad uppskattning följer.