LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Tentamen i Analys B för KB och TB (TATA09/TEN1)
2010-08-26 kl 14–19

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se kurshemsidan `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Beräkna integralen $\iint_D x \cos y \, dxdy$, där D är området i $\mathbf{R}^2$ som begränsas av $x = 0$, $y = 1$ och $y = x^2$. (3p)

2. Låt $f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$.
   (a) Vad är största och minsta värdet på enhetsdisken $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$? (2p)
   (b) Vad är största och minsta värdet på $\mathbf{R}^2$? (1p)

3. (a) Vad betyder det att en mängd i $\mathbf{R}^2$ är öppen? Korrekt definition krävs för poäng. (1p)
   (b) Ge exempel på en **kontinuerlig** funktion som inte antar sitt maximum på en **öppen** och **begränsad** mängd. (1p)
   (c) Låt $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ och $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Visa att f antar sitt största värde på den öppna disken D. (1p)

4. Lös vågekvationen $f''_{tt} = c^2 f''_{xx}$, där c är en konstant och $f(x, t)$ är en C^2-funktion. Tips: byt koordinater till $u = x + ct$, $v = x - ct$.
   Kan du tolka varför ekvationen kallas för vågekvationen? (3p)

5. Betrakta en sfär med centrum i origo. (2+1p)
   (a) Bestäm ekvationen för tangentplanet kring en godtycklig punkt på sfären.
   (b) Visa att ortsvektorn till en punkt på sfären är ortogonal mot tangentplanet i samma punkt.

6. Beräkna volymen av området i $\mathbf{R}^3$ som begränsas av $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ och $z = x^2 + y^2$. (3p)

7. Härled hur Laplaces ekvation (i två dimensioner) ser ut i polära koordinater. D v s byt till polära koordinater i ekvationen $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. (3p)

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2010-08-26

1. Området ligger i första kvadranten mellan y-axeln, linjen $y = 1$ och kurvan $y = x^2$ (rita figur!). Alltså får vi

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 x \cos y \, dy dx = \int_0^1 \big(x \sin 1 - x \sin x^2\big) \, dx = \frac{1}{2}\big(\sin 1 + \cos 1 - 1\big).$$

Svar: $(\cos 1 + \sin 1 - 1)/2$.

2. Vi ser att

$$\nabla f(x, y) = \frac{2}{1 + (x^2 + y^2)^2} [\, x, y \,]^{\mathrm{T}},$$

så den enda stationära punkten i $\mathbf{R}^2$ är origo. Eftersom enhetsdisken är sluten och begränsad så är den kompakt; största och minsta värde existerar. Vidare så är $f(x, y)$ konstant på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ (med värdet $\arctan 1 = \pi/4$).

Svar:

(a) Minsta värde: $f(0, 0) = 0$. Största värde $f(x, y) = \pi/4$ för alla x, y så att $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Minsta värde fortfarande $f(0, 0) = 0$ medan största värde saknas (varför?).

3. (a) En mängd M är öppen om det kring varje punkt $x \in M$ finns ett (icke-tomt) klot kring x som ligger helt inne i M.

(b) T ex kan vi låta $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ och ta $f(x, y) = x^2 + y^2$. Mängden D är både öppen och begränsad (varför) och f är kontinuerlig. Då vi närmar oss randen på D så närmar sig $f(x, y)$ värdet 1, men det finns ingen punkt i D som gör att $f = 1$. Alltså antar inte f sitt maximum på D.

(c) Uppenbart är att $f(x, y) \leq 1$ för alla $(x, y) \in D$ (hela $\mathbf{R}^2$ faktiskt), och då $f(0, 0) = 1$ och $(0, 0) \in D$ så antar f sitt maximum åtminstone i origo.

Svar: Se ovan.

4. Kedjeregeln ger:

$$\begin{aligned} f'_x &= f'_u + f'_v \\ f'_y &= c f'_u - c f'_v \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= f''_{uu} + 2 f''_{uv} + f''_{vv} \\ f''_{yy} &= c^2 \big(f''_{uu} - 2 f''_{uv} + f''_{vv}\big). \end{aligned}$$

Alltså får vi ekvationen

$$f''_{uv} = 0,$$

som har lösningen $f(u, v) = g(u) + h(v)$ där $g, h \in C^2$ är godtyckliga funktioner.

Svar: $f(x, y) = g(x + ct) + h(x - ct)$.

5. En sfär kring origo kan beskrivas av nivåytan $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, där $R > 0$ är radien. Gradienten blir $\nabla F = 2[x, y, z]^T$, så planet kring punkten (a, b, c) på sfären blir

$$\nabla F(a, b, c) \cdot [x - a, y - b, z - c]^T = 0$$

vilket kan reduceras till $ax + by + cz = R^2$.

Ortsvektorn v till punkten (a, b, c) är parallell med gradienten i den punkten, och sålunda ortogonal mot planet.

Svar: Planet vid punkten (a, b, c) på sfären har ekvationen $ax + by + cz = R^2$.

6. Ytorna skär varandra då $z^2 = 6 - x^2 - y^2 = (x^2+y^2)^2$. Låt $r = x^2+y^2$. Ekvationen blir $6 - r^2 = r^4$, som har lösningarna $r^2 = 2$ och $r^2 = -3$. Endast $r = \sqrt{2}$ är av intresse.

   Vi låter $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

   Vi itererar i z-led och byter till polära koordinater:

$$V = \iint_D \int_r^{\sqrt{6-r^2}} dz dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r\big(\sqrt{6-r^2} - r^2\big)\, dr d\theta = \frac{2\pi}{3}\big(6\sqrt{6} - 11\big).$$

   Svar: $\frac{2\pi}{3}\big(6\sqrt{6} - 11\big)$ volymenheter.

7. Polära koordinater kan beskrivas av $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$. Med hjälp av kedjeregeln får vi

$$\begin{aligned} f'_r &= f'_x \cos\theta + f'_y \sin\theta \\ f'_\theta &= f'_x(-r\sin\theta) + f'_y r\cos\theta. \end{aligned}$$

   Eftersom θ är konstant m.a.p. r kan vi enkelt räkna ut att

$$f''_{rr} = f''_{xx}\cos^2\theta + 2f''_{xy}\sin\theta\cos\theta + f''_{yy}\sin^2\theta$$

   med hjälp av kedjeregeln igen. För att räkna ut $f''_{\theta\theta}$ behöver vi vara lite försiktigare. Genom att först använda produktregeln ser vi att

$$f''_{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\big(-f'_x r\sin\theta + f'_y r\cos\theta\big) = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\big(f'_x\big) - f'_x r\cos\theta - f'_y r\sin\theta + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\big(f'_y\big).$$

   Kedjeregeln igen ger att

$$f''_{\theta\theta} = r^2\sin^2\theta z''_{xx} - 2r^2\sin\theta\cos\theta f''_{yy} + r^2\cos^2\theta f''_{yy} - (r\cos\theta f'_x + r\sin\theta f'_y).$$

   Den sista termen känner vi igen som $-rf'_r$. Vi ser att de blandade derivatorerna i f''_{rr} och $f''_{\theta\theta}$ har olika tecken, så vi testar att lägga ihop dessa:

$$r^2 f''_{rr} + f''_{\theta\theta} = r^2(f''_{xx} + f''_{yy}) - rf'_r,$$

   där vi använt oss av att $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Skriver vi om detta får vi

$$f''_{rr} + \frac{1}{r}f'_r + \frac{1}{r^2}f''_{\theta\theta} = f''_{xx} + f''_{yy}.$$

   Svar: I polära koordinater blir Laplaces ekvation

$$f''_{rr} + \frac{1}{r}f'_r + \frac{1}{r^2}f''_{\theta\theta} = 0.$$