LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Kurskod: TATA68
Provkod: TEN1
Datum: 2012-10-06
Institution: MAI

Dugga 1 i Matematisk Grundkurs, TATA68/TEN1 2012-10-06 08–11

Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Varje uppgift är värd 3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7 poäng. Poängen på duggorna summeras och avgör slutbetyg.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA68/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. För vilka reella x gäller att $|x-1|+|x+1| = 3|x|+1$? (3p)

2. (a) Beräkna summan $\displaystyle\sum_{k=-1}^{5} \frac{k}{2^k}$. (1p)

   (b) Skriv $\dfrac{1-3i}{2+i}$ på formen $a+bi$, där $a, b \in \mathbf{R}$. (1p)

   (c) Vilka komplexa z uppfyller ekvationen $|z+i| = |z+1|$? (1p)

3. Lös olikheten $\dfrac{x}{x+2} < \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. (3p)

4. (a) Finn alla reella x så att $\sqrt{12+8x-4x^2} = \frac{3(x-1)}{2}$. (2p)

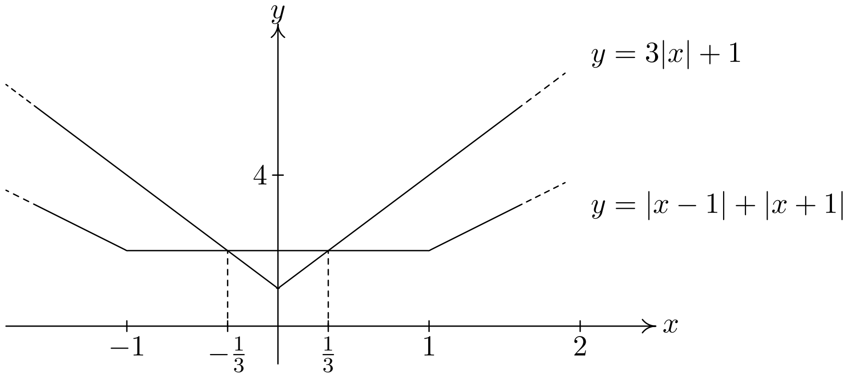
   (b) Cirkeln $x^2-2x+y^2 = 3$ skär linjen $y = 3(x-1)/4$ i två punkter. Finn dessa. (1p)

5. Beräkna den konstanta termen i $(x^{-1}+1+x^3)^{100}$. Svaret får innehålla en summa. (3p)
   Ledning: använd binomialsatsen två gånger.

Lösningsskisser för TATA68, 2012-10-06

1. Punkter av speciellt intresse är $x = -1, 0, 1$ eftersom något av uttrycken i beloppen växlar tecken i dessa punkter. Vi delar därför upp i fyra fall.

   Figur 1 skissar upp hur situationen ser ut.



Figur 1: Vi ser att funktionerna skär varandra i två punkter $x = \pm 1/3$.

   - Om $x \le -1$. Vi har

     $$|x-1| + |x+1| = 3|x| + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x - x - 1 = -3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,$$

     vilket inte uppfyller kravet.
   - Om $-1 \le x \le 0$. Vi har

     $$|x-1| + |x+1| = 3|x| + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x + x + 1 = -3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{3},$$

     vilket är OK.
   - Om $0 \le x \le 1$. Vi har

     $$|x-1| + |x+1| = 3|x| + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x + x + 1 = 3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3},$$

     vilket är OK.
   - Om $x \ge 1$. Vi har

     $$|x-1| + |x+1| = 3|x| + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 + x + 1 = 3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1,$$

     vilket inte uppfyller kravet.

   Svar: $x = \pm\frac{1}{3}$.

2. (a) Summan är varken geometrisk eller aritmetisk (testa!), men det är så få termer att vi direkt kan räkna ut den:

   $$\begin{aligned}\sum_{k=-1}^{5} \frac{k}{2^k} &= -2^1 + 0 + 2^{-1} + 2 \cdot 2^{-2} + 3 \cdot 2^{-3} + 4 \cdot 2^{-4} + 5 \cdot 2^{-5} \\ &= -2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{32} = \frac{-32 + 12 + 8 + 5}{32} = -\frac{7}{32}.\end{aligned}$$

   (b) $\dfrac{1-3i}{2+i} = \dfrac{(1-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2 - 7i - 3}{5} = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{5}i.$

(c) Eftersom beloppen är positiva erhåller vi direkt att

$$|z+i| = |z+1| \quad \Leftrightarrow \quad |z+i|^2 = |z+1|^2.$$

Vi ansätter nu att $z = a + bi$ där $a, b \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} |z+i|^2 = |z+1|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + (b+1)^2 = (a+1)^2 + b^2 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + 2b + 1 = a^2 + 2a + 1 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = b. \end{aligned}$$

Alltså måste real- och imaginärdel vara lika. Svaret blir således $z = a + ai = a(1+i)$ för $a \in \mathbf{R}$.

Svar: (a) $-7/32$. (b) $-1/5 - 7i/5$. (c) $z = a(1+i)$ för alla $a \in \mathbf{R}$.

3. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+2} < \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x(x^2-1) - (x+2)(x^2+1)}{(x+2)(x^2-1)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2x^2 - 2x - 2}{(x+2)(x^2-1)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+x+1}{(x+2)(x+1)(x-1)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(x+2)(x+1)(x-1)} > 0, \end{aligned}$$

där vi utnyttjat att $x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4 > 0$ så vi kunde förkorta bort uttrycket ur olikheten med evkivalens. Vi gör ett teckenschema för uttrycket i vänsterledet:

		-2		-1		1	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{1}{(x+2)(x+1)(x-1)}$	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då $-2 < x < -1$ eller $x > 1$.

Svar: $-2 < x < -1$ eller $x > 1$.

4. (a) Vi löser ekvationen:

$$\begin{aligned} \sqrt{16 + 8x - 4x^2 - 4} = \frac{3(x-1)}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{16 - 4(x-1)^2} = \frac{3(x-1)}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{4 - (x-1)^2} = \frac{3(x-1)}{4} \\ &\Rightarrow \quad 4 - (x-1)^2 = \frac{9}{16}(x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = \frac{64}{25} \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Eftersom $x = 1 - 8/5$ ger $x - 1 < 0$ kan detta inte vara en lösning. Direkt testning visar att $x = 1 + 8/5$ är en lösning.

(b) Vi kvadratkompletterar uttrycket för cirkeln och finner att

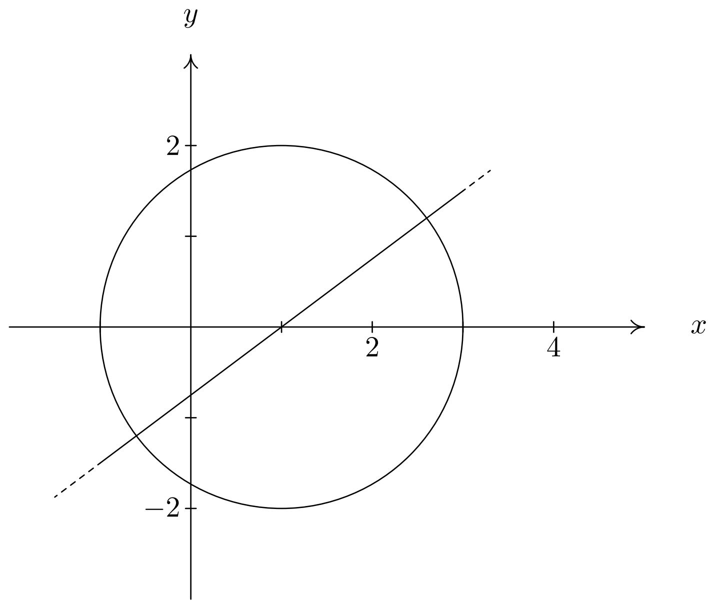
$$x^2 - 2x + y^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = 4.$$

Vi skisserar cirkel och linjer i figuren nedan.
Om $y = 3(x-1)/4$ sätts in i cirkelns ekvation reduceras likheten till

$$4 - (x-1)^2 = \frac{9}{16}(x-1)^2$$

vilket enligt första deluppgiften har lösningarna $x = 1 \pm 8/5$ (båda giltiga denna gång!). Vi finner alltså två punkter: $(-3/5, -6/5)$ och $(13/5, 6/5)$.

Svar: (a) $x = 13/5$. (b) Två punkter: $(-3/5, -6/5)$ och $(13/5, 6/5)$.



Figur 2: Här ser vi ungefär vart linjen skär cirkeln.

5. Vi använder binomialsatsen två gånger och erhåller

$$
\begin{aligned}
(x^{-1}+1+x^3)^{100} &= \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 1^k (x^{-1}+x^3)^{100-k} \\
&= \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \sum_{l=0}^{100-k} \binom{100-k}{l} x^{-l} x^{3(100-k-l)} \\
&= \sum_{k=0}^{100} \sum_{l=0}^{100-k} \binom{100}{k} \binom{100-k}{l} x^{300-3k-4l}.
\end{aligned}
$$

Konstanta termer dyker upp precis då $300-3k-4l=0$. Alltså måste

$$
l = \frac{300-3k}{4} = \frac{3(100-k)}{4},
$$

och då l är ett heltal måste $100-k=4p$ för något heltal p. Eftersom $0 \le k \le 100$ är nödvändigt (se den yttre summan) är $0 \le p \le 25$ de enda tillåtna värderna för p. Ett givet värde på p ”spikar” nu vad k och l måste vara för att vi skall få en konstant i utvecklingen ovan. Vi summerar alltså över de tillåtna värderna på p och finner att

$$
\sum_{p=0}^{25} \binom{100}{100-4p} \binom{4p}{3p} = \sum_{p=0}^{25} \frac{100!}{p!(3p)!(100-4p)!}
$$

är den konstanta termen i $(x^{-1}+1+x^3)^{100}$.

Svar: Se ovan.