LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Kurskod: TATA68
Provkod: TEN1
Datum: 2013-10-12
Institution: MAI

Dugga 1 i Matematisk Grundkurs, TATA68/TEN1 2013-10-12 08–11

Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Varje uppgift är värd 3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7 poäng. Poängen på duggorna summeras och avgör slutbetyg.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA68/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. (a) Definiera $\sqrt{a}$ för $a \geq 0$. (1p)
   (b) Finn alla reella x så att $\sqrt{2x+3} + 2x = 3$. (2p)

2. (a) Förenkla $-8 - 5 - 2 + 1 + \cdots + 88 + 91$. (1p)
   (b) Använd kvadratkomplettering för att avgöra vart $11 - 4x(x+1)$ har sitt största värde och vad detta värde är. (1p)
   (c) Vad blir koefficienten före x^6y^6 i $(x^2+y)^9$? (1p)

3. Lös olikheten $\dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{x} \leq 2$. (3p)

4. Faktorisera polynomet $p(z) = 2z^4 + 8z^2(1-z) + 32z - 64$ så långt det går (komplexa faktorer är tillåtna). (3p)

5. Finn alla lösningar $x > -2$ som uppfyller $\sqrt{|x-2|} + \sqrt{|x+2|} = a$, där a är ett reellt tal. Ange noggrant villkor på a för varje lösning. (3p)

Lösningsskisser för TATA68, 2013-10-12

1. (a) Talet $\sqrt{a}$ definieras som det reella tal x så att $x^2 = a$ och $x \geq 0$.

   (b) Vi sorterar så att kvadratroten står ensam på en sida: $\sqrt{2x+3} = 3 - 2x$. För att en lösning ska kunna existera måste $2x + 3 \geq 0$ och även $3 - 2x \geq 0$ eftersom kvadratroten är icke-negativ och endast är definierad för icke-negativa argument. Dessa villkor kan slås samman till $-3/2 \leq x \leq 3/2$. Med detta kan vi nu räkna med ekvivalens om vi vill, men det är oftast enklare att arbeta med implikation och testa. Alltså

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} = 3 - 2x. \quad &\Rightarrow \quad 2x + 3 = (3 - 2x)^2 = 9 - 12x + 4x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 7x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{7 \pm 5}{4}. \end{aligned}$$

   Endast $x = 1/2$ uppfyller kravet att $-3/2 \leq x \leq 3/2$. Alternativt kan vi även testa direkt genom

$$\sqrt{2 \cdot 1/2 + 3} = \sqrt{4} = 2 \qquad \text{och} \qquad 3 - 2 \cdot 1/2 = 2$$

   samt

$$\sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3 \qquad \text{och} \qquad 3 - 2 \cdot 3 = -3,$$

   där vi ser att endast $x = 1/2$ löser ekvationen.

   Svar: (a) Se ovan. (b) $x = 1/2$ är den enda lösningen.

2. (a) Summan är aritmetisk då det är konstant skillnad $d = 3$ mellan termerna. Termerna måste alltså ha formen $3k + c$ där c är en konstant. För att matcha summan kan vi välja $c = -8$ och låta $k = 0, 1, \ldots, 33$, då den sista termen blir $33 \cdot 3 - 8 = 91$. Alltså kan summan beräknas enligt

$$\sum_{k=0}^{33} (3k - 8) = 34 \cdot \frac{91 + (-8)}{2} = 1411.$$

   (b) Vi kvadratkompletterar uttrycket och finner att

$$11 - 4x(x+1) = -(4x^2 + 4x - 11) = -4((x + 1/2)^2 - 1/4 - 11/4) = 12 - 4(x + 1/2)^2.$$

   Således bli uttrycket som störst 12, vilket inträffar precis då $x = -1/2$.

   (c) Binomialsatsen medför att

$$(x^2 + y)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (x^2)^k (y)^{9-k} = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} x^{2k} y^{9-k}.$$

   Termen x^6y^6 dyker alltså upp i summan precis när $2k = 6$ och $9 - k = 6$, så $k = 3$. Svaret blir då

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 84.$$

   Svar: (a) 1411 (b) 12 när $x = -1/2$. (c) 84.

3. Vi formulerar om olikheten:

$$\frac{x}{4}+\frac{3}{x}\leq 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2+12}{4x}-2\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2-8x+12}{4x}\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x-2)(x-6)}{4x}\leq 0.$$

Vi gör ett teckenschema för uttrycket i vänsterledet:

		0		2		6	
$4x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-6$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{(x-2)(x-6)}{4x}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-positivt precis då $x<0$ eller $2\leq x\leq 6$.

Svar: $x<0$ eller $2\leq x\leq 6$.

4. Vi börjar med att bryta ut 2 och får att $p(z)=2q(z)$, där $q(z)=z^4-4z^3+4z^2+16z-32$. Vi gissar sedan en rot, och finner att $p(2)=q(2)=0$. Alltså måste $z-2$ vara en faktor i $q(z)$ och

$$\begin{array}{r l}
 & z^3-2z^2 \qquad\quad +16 \\ \cline{2-2}
z-2\big) & z^4-4z^3+4z^2+16z-32 \\
 & -z^4+2z^3 \\ \cline{2-2}
 & \quad -2z^3+4z^2 \\
 & \quad\;\; 2z^3-4z^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 16z-32 \\
 & \qquad\qquad -16z+32 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Vidare har z^3-2z^2+16 roten $z=-2$, så genom polynomdivision igen,

$$\begin{array}{r l}
 & z^2-4z\;\;+8 \\ \cline{2-2}
z+2\big) & z^3-2z^2 \qquad +16 \\
 & -z^3-2z^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad -4z^2 \\
 & \quad\; 4z^2+8z \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 8z+16 \\
 & \qquad -8z-16 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

erhåller vi att $q(z)=(z-2)(z+2)(z^2-4z+8)$. Vi studerar $z^2-4z+8=(z-2)^2+4$, och ser att $z=2\pm 2i$ är rötterna. Totalt sett har vi nu funnit att

$$q(z)=(z-2-2i)(z-2+2i)(z-2)(z+2)$$

och

$$p(z)=2(z-2-2i)(z-2+2i)(z-2)(z+2).$$

Svar: $p(z)=2(z-2-2i)(z-2+2i)(z-2)(z+2)$.

5. Klart är att $a\geq 0$ är ett krav för existens av lösningar (varför?). Om $a=0$ så finns inte heller några lösningar då $\sqrt{|x-2|}+\sqrt{|x+2|}=0$ skulle innebära att $x=2$ och $x=-2$ samtidigt. Antag alltså att $a>0$. Vi kan även anta att $x>-2$ eftersom detta krav ingår i formuleringen.

$$\begin{aligned}
\sqrt{|x-2|}+\sqrt{|x+2|}=a \quad &\Rightarrow\quad |x-2|=(a-\sqrt{|x+2|})^2=a^2-2a\sqrt{|x+2|}+|x+2| \\
&\Leftrightarrow\quad 2a\sqrt{|x+2|}=|x+2|-|x-2|+a^2 \qquad\qquad (*) \\
&\Rightarrow\quad 4a^2|x+2|=(|x+2|-|x-2|+a^2)^2.
\end{aligned}$$

Det är nu enklast att dela upp i fall.

Fall 1: Om $-2 < x < 2$ så måste

$$\begin{aligned} 4a^2|x+2| = (|x+2| - |x-2| + a^2)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 4a^2(x+2) = (2x+a^2)^2 = 4x^2 + 4a^2x + a^4 \\ &\Leftrightarrow \quad 7a^2 = 4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{a\sqrt{7}}{2}, \end{aligned}$$

där vi utnyttjat att $\sqrt{a^2} = a$ eftersom $a \geq 0$. Så är dessa lösningar? Det är svårt att sätta in i ursprungsuttrycket och testa, så vi reder ut kraven istället. Först och främst måste

$$-2 \leq \pm\frac{a\sqrt{7}}{2} \leq 2, \quad \text{så} \quad a \leq \frac{4}{\sqrt{7}}.$$

Beloppen i kvadratrötterna är alltid icke-negativa, så inget krav därifrån. Vid de två implikationerna i $(*)$ måste

$$a - \sqrt{|x+2|} \geq 0 \qquad \text{och} \qquad |x+2| - |x-2| + a^2 \geq 0$$

gälla för att få ekvivalens.

Vi börjar med $x = a\sqrt{7}/2$. Då måste

$$\frac{a\sqrt{7}}{2} \leq a^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad (a - \sqrt{7}/4)^2 - \frac{39}{16} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq \frac{\sqrt{7}+\sqrt{39}}{4} \quad \text{eller} \quad a \leq \frac{\sqrt{7}-\sqrt{39}}{4}.$$

Endast det första alternativet är möjligt då $a > 0$. Vidare är $\sqrt{7} + \sqrt{39} > 2 + 6 = 8$, så $a > 2$ och därmed är $x > \sqrt{7} > 2$ vilket inte går då $-2 < x < 2$.

För $x = -a\sqrt{7}/2$ använder vi att

$$x + 2 - (2 - x) + a^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{a^2}{2},$$

vilket ger att, då $a > 0$,

$$-\frac{a\sqrt{7}}{2} \geq -\frac{a^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a(a - \sqrt{7}) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq \sqrt{7}.$$

Men då är $x = -a\sqrt{7}/2 \leq -7/2 < -2$ vilket inte heller går.

Slutsatsen blir att det saknas lösningar i intervallet $-2 < x < 2$.

Fall 2: Om $x \geq 2$ så måste

$$\begin{aligned} 4a^2|x+2| = (|x+2| - |x-2| + a^2)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 4a^2(x+2) = (4+a^2)^2 = 16 + 8a^2 + a^4 \\ &\Leftrightarrow \quad 4a^2x = 16 + a^4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{16+a^4}{4a^2}. \end{aligned}$$

Här kan vi se att, då $a > 0$,

$$\frac{16+a^4}{4a^2} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 16 + a^4 - 8a^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2-4)^2 \geq 0,$$

så denna lösning uppfyller alltid $x \geq 2$. Vidare är

$$\sqrt{|x-2|} + \sqrt{|x+2|} = \sqrt{\frac{16+a^4-8a^2}{4a^2}} + \sqrt{\frac{16+a^4+8a^2}{4a^2}} = \frac{|a^2-4| + |a^2+4|}{2a}.$$

För att detta ska bli a måste $a^2 - 4 \geq 0$, eller $a \geq 2$ då $a > 0$.

Svar: $x = \dfrac{16+a^4}{4a^2}$ för alla $a \geq 2$.