TATA42: Föreläsning 4
Generaliserade integraler

Johan Thim*

15 november 2018

Vi har stött på begreppet tidigare när vi diskuterat Riemannintegraler i föregående kurs. Denna gång kommer vi lite mer att fokusera på frågan om en integral *konvergerar* eller *divergerar*. Inte lika mycket på vad det exakta värdet blir. Låt oss börja med att definiera vad vi menar med en generaliserad integral.

Definition. Låt f vara kontinuerlig på $]a,b[$. En integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

säges vara generaliserad i a om $a=-\infty$ eller om $f(x)$ är obegränsad då $x\to a^+$, samt generaliserad i b om $b=\infty$ eller om $f(x)$ är obegränsad då $x\to b^-$.

Vi säger helt enkelt att en integral är generaliserad i en punkt om det uppstår problem med begränsningen i punkten. Notera att kravet på att f är kontinuerlig på $]a,b[$ är starkare än nödvändigt. Vi skulle kunna nöja oss med att kräva att f är Riemannintegrabel på $]a,b[$ (eller mer korrekt på alla slutna delintervall av $]a,b[$).

Exempel

Integralen $\displaystyle\int_2^7 \frac{1}{x}\,dx$ är inte generaliserad, integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ är generaliserad i $+\infty$ och integralen $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$ är generaliserad i både $-\infty$ och i 0.

Så hur menar vi då att vi ska hantera generaliserade integraler?

Definition. Om f är kontinuerlig på $]a,b[$ så definierar vi den *generaliserade* integralen enligt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{s\to a^+}\int_s^c f(x)\,dx + \lim_{t\to b^-}\int_c^t f(x)\,dx, \text{ där } a<c<b,$$

om båda gränsvärdena existerar ändligt (oberoende av varandra).

*johan.thim@liu.se

Man kan ganska enkelt visa att valet av c inte påverkar resultatet (varför?). Vi tar med båda potentiellt generaliserade punkterna på en gång, men i fallet att integralen inte är generaliserad sammanfaller gränsvärdet med den klassiska definitionen på Riemannintegralen. Detta ligger också till grund för följande sats.

Linjäritet

Sats. Om $\int_a^b f(x)\,dx$ och $\int_a^b g(x)\,dx$ existerar (som ändliga gränsvärden) så gäller för konstanter c_1 och c_2 att

$$\int_a^b \big(c_1 f(x) + c_2 g(x)\big)\,dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx.$$

När vi säger att en generaliserad integral existerar använder vi ibland begreppet *konvergent*.

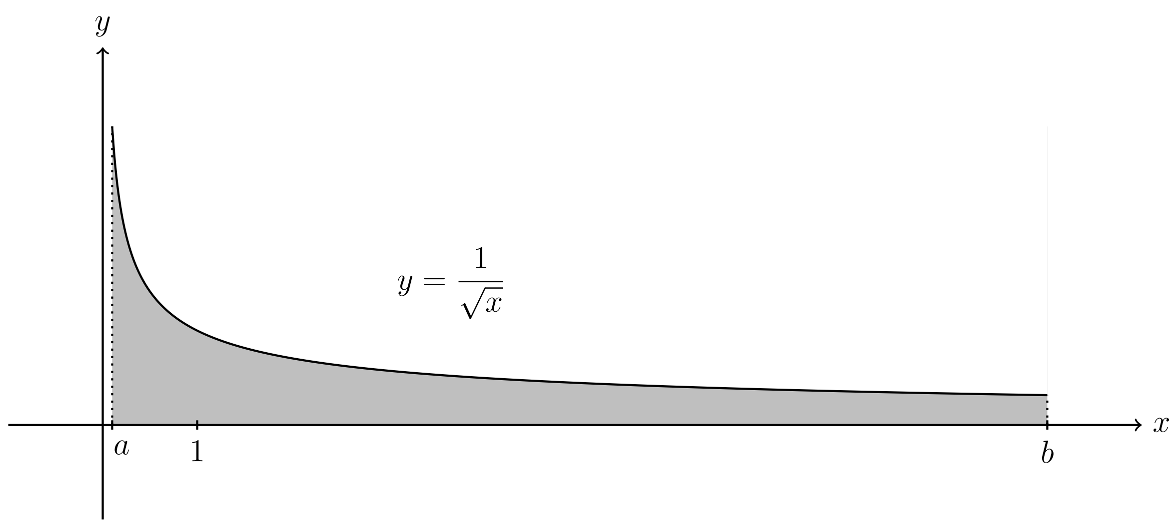
Definition. Om den generaliserade integralen existerar kallar vi den för *konvergent*. I de fall där något av gränsvärdena inte existerar kallar vi integralen för *divergent*.

Värt att notera är att en "vanlig" Riemann-integral av en Riemannintegrabel funktion på ett intervall $[a, b]$ självklart är konvergent.

Exempel

Undersök om (den generaliserade) integralen $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent.

Lösning. Vi börjar med att skissa den area vi kan tolka integralen som.



Integralen är generaliserad i både $x = 0$ och i ∞. Vi behöver alltså göra två undersökningar. Vi börjar med 0 och väljer $c = 1$:

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a} \to 2, \quad \text{då } a \to 0^+.$$

Mot $a = 0$ går det alltså att definiera integralen. Vad händer i $b = \infty$? Vi undersöker:

$$\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^b = 2\sqrt{b} - 2 \to \infty, \quad \text{då } b \to \infty.$$

Alltså divergerar $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ och då är även hela integralen i frågan divergent. Det räcker alltså i det här fallet att undersöka den andra biten eftersom den är divergent. Har man en aning om att något är divergent bör man börja med den delen.

Exempel

Undersök om $\displaystyle\int_0^\infty \cos x\,dx$ är konvergent.

Lösning. Vi vet hur cosinus ser ut och det är endast i $b = \infty$ integralen är generaliserad. Utan att tänka så mycket kan vi direkt från definitionen testa:

$$\int_0^b \cos x\,dx = [\sin x]_0^b = \sin b \to ?, \quad \text{då } b \to \infty.$$

Gränsvärdet saknas alltså i detta fall i stället för att bli oändligt stort. Integralen divergerar ändå.

Mer villkorlig konvergens; symmetri

Här kan man kanske fundera lite över hur arean är fördelad. Cosinus är en periodisk funktion som befinner sig lika mycket ovanför x-axeln som under, borde då inte den positiva och negativa arean ta ut varandra och integralen bli noll? Svaret är ”mjaa..” Enligt definitionen ovan så är integralen divergent. Inga tveksamheter alls. **Divergent**. Vill vi att svaret ska bli noll (pga av area-argumentet) måste vi definiera begreppet konvergent integral på något annat sätt. Detta kan göras och man pratar då om (ännu mer) *villkorligt* konvergenta integraler. Cauchys principalvärde är ett exempel som används på intervall symmetriska kring $x = 0$:

$$\text{p.v.} \int_{-a}^{a} f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int_{-a}^{-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{\epsilon}^{a} f(x)\,dx \right).$$

Detta gränsvärde kan existera även då integralen inte är konvergent som vi definierat det tidigare. Betrakta exempelvis $f(x) = 1/x$ för $x \neq 0$.

För att ta bort dessa avarter av möjlig konvergens introducerar vi begreppet *absolutkonvergens*.

Absolutkonvergens

Definition. Om $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$ kallar vi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ för *absolutkonvergent.*

Flera saker bör kommenteras angående denna definition. Vi summerar lite viktiga fakta.

(i) Om $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$ så är $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.

(ii) Om $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ är absolutkonvergent gäller $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$

(iii) Om $f(x) \geq 0$ för $a < x < b$ så existerar alltid gränsvärdena $\displaystyle\lim_{s\to a^+}\int_s^c f(x)\,dx$ och $\displaystyle\lim_{t\to b^-}\int_c^t f(x)\,dx$ om vi tillåter resultatet ∞.

(iv) Speciellt gäller föregående för $|f(x)|$.

Vi överlämnar till boken att bevisa påståendena

Definition. Om $f \geq 0$ och $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ är divergent skriver vi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \infty$.

Detta betyder **inte** att integralen är konvergent, utan bara ett kortare sätt att ange att integralen av en icke-negativ funktion divergerar. Vi kan inte skriva på detta sätt om inte $f(x) \geq 0$ (tänk till exempel på exemplet med $f(x) = \cos x$ vi såg tidigare).

Exempel

Visa att $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ är konvergent.

Lösning. Tricket är att partialintegrera:

$$\int_1^b x^{-1}\sin x\,dx = \left[-x^{-1}\cos x\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Integralen i högerledet är absolutkonvergent eftersom

$$\int_1^b \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\,dx \leq \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b} \to 1$$

då $b \to \infty$. Alltså är integralen vi startade med konvergent eftersom $\dfrac{\cos b}{b} - \cos 1 \to -\cos 1$ då $b \to \infty$. Man kan också visa att integralen inte är absolutkonvergent (man blir då tvungen att analysera lite noggrannare hur $x^{-1}|\sin x|$ ser ut för $1 < x < \infty$).

Tekniken som används ovan för att konstatera att $\dfrac{\cos x}{x^2}$ är absolutkonvergent är en mycket användbar jämförelseprincip. Låt oss formulera den mer generellt.

Sats. Om $0 \le f(x) \le g(x)$ för $a < x < b$ så gäller $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$. Speciellt gäller att:

(i) $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ konvergent $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ divergent $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ divergent.

Exempel

Är $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\,dx$ konvergent?

Lösning. Vi vet från grundkursen att $\ln x \le x - 1$ för $x > 1$, så $\ln x \le x$ är också sant för $x > 1$. Således måste

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\,dx \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < \infty$$

eftersom $\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{b} \to 1$ då $b \to \infty$. Vi har nu enligt jämförelsesatsen ovan visat att integralen i fråga är konvergent.

Exempel

Avgör om $\displaystyle\int_0^1 \frac{3\sqrt{x}}{x + 2x^2}\,dx$ är konvergent.

Lösning. Vi ser att för $0 \le x \le 1$:

$$\frac{3\sqrt{x}}{x + 2x^2} = \frac{3}{\sqrt{x} + 2x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{3}{1 + 2x} \le \frac{3}{\sqrt{x}}$$

eftersom $1 + 2x \ge 1$. Då vi vet att $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent och $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx = 3\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ så följer det av föregående sats att $\displaystyle\int_0^1 \frac{3\sqrt{x}}{x + 2x^2}\,dx$ är konvergent. Ofta skriver vi detta lite mer kompakt (och slarvigt) som

$$\int_0^1 \frac{3\sqrt{x}}{x + 2x^2}\,dx \le \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx < \infty$$

eftersom vi vet att $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \infty$.

Vi jämför ofta med uttryck av formen $x^{-\alpha}$, så följande exempel är bra att komma ihåg.

Vanliga jämförelsefunktioner

Följande påståenden gäller:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty$ om och endast om $\alpha < 1$;

(ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty$ om och endast om $\alpha > 1$.

Beviset av påståendena ovan handlar bara om att räkna ut integralerna. Vi ser att om $\alpha \neq 1$:

$$\int_a^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \to \frac{1}{1-\alpha}$$

då $a \to 0$ om och endast om $\alpha < 1$. Om $\alpha > 1$ blir den andra termen oändlig. Vad händer då när $\alpha = 1$? Vi undersöker:

$$\int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_a^1 = -\ln a \to \infty \quad \text{då } a \to 0^+.$$

Integralen är alltså inte konvergent i detta fall.
Fallen för $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ hanteras på samma sätt. Kortfattat ser vi att

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^b = \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \to \frac{-1}{1-\alpha}$$

om och endast om $\alpha > 1$. Om $\alpha = 1$ blir det en logaritm analogt med ovan:

$$\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_1^b = \ln b \to \infty \quad \text{då } b \to \infty.$$

Exempel

Integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}}\,dx$ är divergent eftersom

$$\int_1^\infty \frac{3\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}}\,dx = \int_1^\infty \frac{3}{\sqrt{x}(1+2/\sqrt{x})}\,dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \infty.$$

Olikheten följer från att $1 + 2/\sqrt{x} \leq 3$ då $x \geq 1$.

Man kan även nöja sig med att undersöka hur funktionerna beter sig lokalt kring de generaliserade punkterna. Mer precist kan vi göra följande.

Sats. Låt f och g vara kontinuerliga funktioner sådana att:

(i) $f(x) \geq 0$ och $g(x) \geq 0$, eller $f(x) \leq 0$ och $g(x) \leq 0$, på $]a, b[$;

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ och $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ är generaliserade **endast** i $x = b$;

(iii) $\displaystyle 0 < \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$.

Då gäller att

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ är konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b g(x)\,dx \text{ är konvergent.}$$

Det faktum att gränsvärdet existerar (möjligen lika med ∞) följer för att det är icke-negativa funktioner vi arbetar med (eller mer korrekt att funktionerna inte växlar tecken). Att vi kräver att gränsvärdet för kvoten f/g ligger strikt mellan 0 och ∞ innebär att f och g beter sig ungefär likadant när vi närmar oss b. Då förefaller det rimligt att båda integralerna endera konvergerar eller divergerar. Ett noggrannare bevis återfinnes i boken.

På samma sätt kan vi göra om integralerna endast är generaliserade i $x = a$. Om så är fallet och

$$0 < \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

så är endera båda integralerna konvergenta eller divergenta.

Exempel

Avgör om $\displaystyle\int_1^\infty \left(1 - e^{1/x}\right) \sin \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent.

Lösning. Eftersom $x > 0$ vet vi att $e^{1/x} > 1$ så den första faktorn i integranden är negativ medan för stora x kommer $\sin \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ att vara positiv. Vi Maclaurinutvecklar (i variabeln $t = 1/x$ respektive $s = 1/\sqrt{x}$) och ser att

$$\begin{aligned}
\left(1 - e^{1/x}\right) \sin \frac{1}{\sqrt{x}} &= \left(1 - 1 - \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{x\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right).
\end{aligned}$$

Vi jämför med $-\dfrac{1}{x^{3/2}}$ som är negativ (men så länge f och g har samma tecken går allt bra i satsen ovan) och ser att

$$\frac{\left(1 - e^{1/x}\right) \sin \frac{1}{\sqrt{x}}}{-1/x^{3/2}} = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \to 1, \quad \text{då } x \to \infty$$

och således konvergerar integralen i fråga om och endast om $\displaystyle\int_1^\infty \frac{-1}{x^{3/2}}\,dx$ konvergerar. Svaret är alltså konvergent eftersom den sista integralen är känt konvergent (se jämförelsefunktionerna ovan).

Exempel

Avgör om $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent.

Lösning. Eftersom $x > 0$ vet vi att $\ln(1+\sqrt{x}) > 0$ så integranden är positiv. Integralen är generaliserad i $x = 0$ så vi Maclaurinutvecklar för att se hur beteendet ser ut:

$$\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+O(x)}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Det dominerande beteendet ges alltså av $1/x$ så vi jämför med denna funktion:

$$\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{1} = 1 + O(\sqrt{x}) \to 1, \quad \text{då } x \to 0^+.$$

Således är integralen i fråga konvergent om och endast om $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ är konvergent. Vi vet att denna integral är divergent så $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}\,dx$ är divergent.

Ett lite svårare exempel? Här kommer en gammal uppgift-5 från en tenta.

Exempel

Konvergerar integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx$? Motivera noggrant.

Lösning. Eftersom integralen är generaliserad både i 0 och ∞ så delar vi upp i två delar:

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx.$$

Vi börjar med att undersöka integralen på $[0,1]$. För $x \in]0,1]$ gäller att

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{\arctan x}{x}\,\frac{1}{\sqrt{x^{-1}\ln(1+x)}}.$$

Nu vet vi att $x^{-1}\arctan x \to 1$ och $x^{-1}\ln(1+x) \to 1$ då $x \to 0$, så

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x}\,\frac{1}{\sqrt{x^{-1}\ln(1+x)}} = 1.$$

Låt därför $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ och $f(x) = g(x)\dfrac{\arctan x}{x}\dfrac{1}{\sqrt{x^{-1}\ln(1+x)}}$ för $x > 0$. Då är $f, g \geq 0$ för $x > 0$ och både f och g är kontinuerliga för $x > 0$. Vidare visade vi ovan att

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \in]0,\infty[\text{ då } x \to 0^+,$$

så enligt jämförelsesatsen på gränsvärdesform följer det att

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx$$

kommer vara absolutkonvergent eftersom vi vet att $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \infty$.

Vi undersöker nu integralen på $[1,\infty[$. Vi skriver

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} \\ &= \frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{\ln(1+x)}}\left(1 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)\arctan x \end{aligned}$$

så vi låter $g(x) = \dfrac{1}{x^{3/2}\sqrt{\ln(1+x)}}$ för $x > 0$. Då gäller att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)\arctan x \to \frac{\pi}{2}, \text{ då } x \to \infty.$$

Eftersom f och g är kontinuerliga och icke-negativa på $]1,\infty[$ samt att gränsvärdet mot ∞ för f/g är $\dfrac{\pi}{2} \in]0,\infty[$ så följer det från jämförelsesatsen på gränsvärdesform att $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent om och endast om $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx$ är konvergent. Vi undersöker denna integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx \leq \frac{1}{\sqrt{\ln 2}}\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$

eftersom $\ln(1+x) \geq \ln 2$ för $x \geq 1$. Den sista integralen är känd som konvergent ($\alpha = 3/2$ är större än 1).

Svar. Konvergent!

Uppgifter av typen ovan brukar vara tråkig läsning vid rättning. Det är missuppfattningar om vad som är förutsättningar och följder, slarv med att precisera att krav är uppfyllda samt missförstånd om vad jämförelsesatserna egentligen säger. Ett förslag på lösningsgång när det gäller jämförelsesatsen på gränsvärdesform följer.

Förslag på lösningsgång

1. Dela upp integralen så att varje delintegral är generaliserad i högst en punkt. Betrakta sedan en integral i taget.

2. Antag att $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ endast är generaliserad i $x = a$. Identifiera hur integranden beter sig nära $x = a$ (den punkt integralen är generaliserad i). Använd Maclaurinutvecklingar, uppskattningar eller gissningar. Vi ska visa i nästa steg att valet är vettigt.

3. Konstatera att $f(x)$ inte håller på att växla tecken nära $x = a$.

4. Antag att vi tycker $f(x)$ beter sig som $g(x)$ när $x \approx a$. Typiskt här är att vi skriver $f(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}g(x)$. Vi visar sen att om $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ så **ska** $0 < L < \infty$ gälla (om $f(x)$ är positiv nära $x = a$). Blir $L = 0$ har vi valt $g(x)$ så att $g(x)$ växer betydligt snabbare än $f(x)$. Får vi $L = \infty$ så växer $g(x)$ alldeles för långsamt. Det är alltså **viktigt** att konstatera att $0 < L < \infty$.

5. Avgör konvergens för $I = \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$. Om integralen blir för komplicerad kanske det finns bättre val för $g(x)$. Konstatera om integralen är konvergent eller divergent.

6. Hänvisa till jämförelsesatsen på gränsvärdesform och dra slutsatsen att $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ är konvergent precis då $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ är konvergent (vilket vi precis undersökte).