TATA42: Föreläsning 8
Linjära differentialekvationer av högre ordning

Johan Thim*

23 april 2018

1 Differentialoperatorer

För att underlätta notation och visa på underliggande struktur introducerar vi begreppet *differentialoperator* (DO). Den enklaste icke-triviala varianten på en DO är helt enkelt operationen att derivera med avsende på variabeln x. Vi brukar skriva det $(\,\cdot\,)'$, $\dfrac{d}{dx}$, eller det som kommer att vara vanligast i detta avsnitt, D. Med andra ord gäller alltså

$$\frac{dy}{dx} = Dy(x) = y'(x)$$

för alla deriverbara funktioner y. Vi tillåter oss att vara lite slarviga med notationen. Självklart så kan man även betrakta operationen att derivera två gånger. Denna operation kan enkelt skrivas D^2. Då är $D^2 y = y''$ vilket kan ses genom manövern

$$D^2 y = D(Dy) = Dy' = y''.$$

På samma sätt är $D^3 y = y^{(3)}$ och så vidare. Vi är nu mogna för följande definition.

Differentialoperator

Definition. Om $p(r)$ är ett polynom

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

definierar vi *differentialoperatorn* $p(D)$ genom

$$p(D)y = a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots a_1 Dy + a_0 y$$

för alla y som kan kontinuerligt deriveras n gånger. Polynomet $p(r)$ kallas differentialoperatorns *karakteristiska polynom*.

Ett par exempel är på sin plats.

*johan.thim@liu.se

Exempel

(i) Om $p(D) = D + 1$ är $p(D)y = y' + y$;

(ii) Om $p(D) = D^2 - 2$ är $p(D)y = y'' - 2y$;

(iii) Om $p(D) = (D + 1)^2 = D^2 + 2D + 1$ är $p(D)y = y'' + 2y' + y$.

Det sista exemplet kommer vi att återvända till. Man kan alltså precis som för vanliga polynom faktorisera $p(D)$ bara man är försiktig i vilken ordningen man skriver D:n och konstanter. Detta kommer att vara nyckeln till att lösa högre ordningens DE.

Exempel

Skriv ekvationen $2y^{(3)} - 3y' + 2y = 7x$ med hjälp av en DO.

Lösning. Vi ser direkt att ekvationen ekvivalent kan formuleras som $2D^3y - 3Dy + 2y = 7x$, och om vi låter $p(D) = 2D^3 - 3D + 2$ kan vi skriva $p(D)y = 7x$. De termer som inte innehåller y kan inte ingå i operatorn.

Konstanta koefficienter

Definition. Vi säger att den DO $p(D)$ vi introducerade ovan har konstanta koefficienter eftersom konstanterna $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är just konstanter.

Definitionen kanske verkar lite konstig, men man arbetar ofta med DO:er där man låter koefficienterna $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $p(D)$ bero på x (alltså vara funktioner av x). Vi kommer oftast att enbart betrakta fallet med konstanta koefficienter när vi arbetar med högre ordningens DE:er (med bland annat Euler-ekvationer som undantag).

Linjäritet

Sats. Operatorn $p(D)$ definierad ovan är *linjär*, dvs om y_1 och y_2 är n gånger deriverbara funktioner och $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ är konstanter så är

$$p(D)\big(c_1y_1 + c_2y_2\big) = c_1p(D)y_1 + c_2p(D)y_2.$$

Beviset är enkelt eftersom vi vet att vi kan derivera en summa genom att ta summan av respektive derivatorer samt att vi kan bryta ut konstanter (med andra ord, att operatorn D är linjär). Faktum är att satsen gäller även om vi inte har konstanta koefficienter.

Förskjutningsregeln

Sats. Om $a \in \mathbf{C}$ är en konstant och $p(D)$ enligt ovan är en DO med konstanta koefficienter så gäller att

$$p(D)\left(e^{ax}z(x)\right) = e^{ax}p(D + a)z(x).$$

Bevis. Polynomet $p(r)$ kan alltid faktoriseras (med eventuellt komplexa rötter) som

$$p(r) = C(r - r_1)(r - r_2)\cdots(r - r_n).$$

Vi skriver

$$p(D) = C(D - r_1)(D - r_2)\cdots(D - r_n).$$

Det räcker alltså att visa förskjutningssatsen för en av dessa faktorer eftersom vi iterativt kan förflytta oss genom hela polynomet i så fall. Vi väljer $D - r_i$. Då är

$$\begin{aligned}(D - r_i)\left(e^{ax}z(x)\right) &= \left(e^{ax}z(x)\right)' - r_i e^{ax}z(x)\\ &= e^{ax}z'(x) + ae^{ax}z(x) - r_i e^{ax}z(x)\\ &= e^{ax}\left((D + a) - r_i\right)z(x).\end{aligned}$$

Operatorn D förskjuts alltså med a i den i:te faktorn och detta gäller för varje i.

Exempel

Låt $p(r) = r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2)$. Då medför förskjutningsregeln att

$$p(D)\left(e^{-2x}z(x)\right) = e^{-2x}p(D - 2)z.$$

Så vad innebär $p(D - 2)$? Inget mer än att man ersätter r med $D - 2$ i polynomet $p(r)$:

$$p(D - 2) = (D - 2)^2 + (D - 2) - 2 = (D - 2 - 1)(D - 2 + 2) = (D - 3)D = D^2 - 3D.$$

Alltså blir

$$p(D)\left(e^{-2x}z(x)\right) = e^{-2x}p(D - 2)z = e^{-2x}\left(z'' - 3z'\right).$$

Kanske kan man tycka att det verkar bökigt med förskjutningsregeln, men i vissa fall underlättar den riktigt ordentligt.

Exempel

Låt $p(r) = (r - 3)^{10}$. Då kommer

$$\begin{aligned}p(D)(e^{3x}z(x)) = \big(&D^{10} - 30\,D^9 + 405\,D^8 - 3240\,D^7 + 17010\,D^6 - 61236\,D^5 + 153090\,D^4\\ &- 262440\,D^3 + 295245\,D^2 - 196830\,D + 59049\big)\left(e^{3x}z(x)\right).\end{aligned}$$

Hur förenklar vi detta? Ser bökigt ut. Men med förskjutningsregeln blir

$$p(D)(e^{3x}z(x)) = e^{3x}p(D + 3)z = e^{3x}(D + 3 - 3)^{10}z = e^{3x}D^{10}z = e^{3x}z^{(10)}.$$

Betydligt mycket mindre arbete! Multipla rötter som ”krockar” med konstanten a i exponenten i e^{ax} brukar hanteras mycket enklare med förskjutningsregeln.

2 Superpositionsprincipen

Superpositionsprincipen är principen att lösningar till linjära ekvationer kan konstrueras genom att addera lösningar till delproblem. Med andra ord, om y_1 löser $p(D)y_1 = g_1$ och y_2 löser $p(D)y_2 = g_2$ så kommer $y = y_1 + y_2$ att lösa $p(D)y = g_1 + g_2$. Detta är anledningen till att vi kan dela upp en lösning i en homogen del och en partikulärlösning; vi kan alltså lösa en del av problemet i taget.

Sats. Samtliga lösningar till $p(D)y = g$ kan delas upp i två delar: $y = y_h + y_p$, där den homogena lösningen y_h löser ekvationen $p(D)y_h = 0$ och partikulärlösningen y_p är **någon** lösning till $p(D)y_p = g$.

Bevis. Betrakta $z = y - y_p$ där y och y_p är olika lösningar till ekvationen. På grund av linjäriteten måste då

$$p(D)z = p(D)(y - y_p) = p(D)y - p(D)y_p = g - g = 0.$$

Alltså löser z den homogena ekvationen $p(D)z = 0$. Så om vi har **en** partikulärlösning y_p så att $p(D)y_p = g$, så ges samtliga lösningar av denna partikulärlösning plus lösningar y_h till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$.

Superposition av partikulärlösningar

Om

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x)$$

består av flera termer kan även partikulärlösningen delas upp i flera delar:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_n}$$

enligt superpositionsprincipen och sedan kan man lösa varje $p(D)y_{p_k} = g_k$ och summera

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_n}$$

för att finna en total partikulärlösning. Vi återkommer med exempel på detta senare.

3 Linjära DE av första ordningen med konstanta koefficienter

Först lite repetition från förra föreläsningen.

Definition. Om $y' + f(x)y = g(x)$ kallar vi DE:n för en linjär DE av första ordningen.

Det kan vara intressant att notera att den differentialoperator $p(D)$ som hänger ihop med denna ekvation ges av $p(D) = D + f(x)$. Således har $p(D)$ inte konstanta koefficienter i det generella fallet vi tidigare behandlat. Men om $f(x) = a$ är en konstant visade vi då att

$$y(x) = Ce^{-ax} + e^{-ax} \int e^{ax} g(x)\, dx$$

ger samtliga lösningar till ekvationen. Vi kallade $y_h(x) = Ce^{-ax}$ för den homogena lösningen och $y_p(x) = e^{-ax} \displaystyle\int e^{ax} g(x)\, dx$ för en partikulärlösning.
Låt oss formulera ekvationen som

$$p(D)y = g(x), \quad \text{där } p(D) = D + a.$$

Om vi använder förskjutningsregeln ser vi att

$$D\left(e^{ax}y\right) = e^{ax}(D+a)y = e^{ax}p(D)y$$

och alltså är

$$\begin{aligned} p(D)y = g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-ax}D\left(e^{ax}y\right) = g(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(e^{ax}y\right)' = e^{ax}g(x) \\ &\Leftrightarrow \quad e^{ax}y = C + \int e^{ax}g(x)\,dx \\ &\Leftrightarrow \quad y = Ce^{-ax} + e^{-ax}\int e^{ax}g(x)\,dx. \end{aligned}$$

Vi har alltså ”plockat ut” den integrerande faktorn ur $p(D)$ med hjälp av förskjutningsregeln. Detta är grundstenen för tekniken vi kommer att använda för högre ordningens ekvationer!

4 Linjära DE av andra ordningen med konstanta koefficienter

Låt oss utgå från en operator $p(D) = D^2 + aD + b$. Motsvarande polynom $p(r)$ kan **alltid** faktoriseras som $p(r) = (r - r_1)(r - r_2)$ om vi tillåter att r_1 och r_2 kan vara komplexa tal. Lösningar till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ bestäms med följande sats.

Lösningar till den homogena ekvationen

Sats. Samtliga lösningar till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ ges av

$$\begin{aligned} y_h &= C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \quad \text{om } r_1 \neq r_2 \text{ och} \\ y_h &= (C_1 + C_2x)e^{r_1x} \quad \text{om } r_1 = r_2. \end{aligned}$$

Bevis. Vi faktoriserar det karakteristiska polynomet $p(r) = (r - r_1)(r - r_2)$, vilket leder till

$$p(D)y_h = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D - r_1)(D - r_2)y_h = 0.$$

Låt $z = (D - r_2)y_h$. Då är alltså (enligt fallet av ordning ett)

$$(D - r_1)z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = Ae^{r_1x}.$$

Då blir

$$(D - r_2)y_h = Ae^{r_1x} \quad \Leftrightarrow \quad y_h = Be^{r_2x} + e^{r_2x}\int e^{-r_2x}Ae^{r_1x}\,dx.$$

Om $r_1 \neq r_2$ följer det alltså att

$$y_h = Be^{r_2x} + \frac{A}{r_1 - r_2}e^{r_1x} = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

och om $r_1 = r_2$ är

$$y_h = Be^{r_2x} + Axe^{r_1x} = (Ax + B)e^{r_1x}.$$

Exempel

Hitta alla lösningar till $2y'' + y' - y = 0$

Lösning. Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = 2r^2 + r - 1$ och faktoriserar detta:

$$p(r) = 2\left(r - \frac{1}{2}\right)(r + 1).$$

Lösningarna är alltså $r = 1/2$ och $r = -1$ vilket ger lösningarna

$$y(x) = C_1 e^{x/2} + C_2 e^{-x}.$$

Exempel

Hitta alla lösningar till $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Lösning. Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = r^2 - 4r + 13$ och undersöker när $p(r) = 0$:

$$p(r) = r^2 - 4r + 13 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 2 \pm 3i.$$

Komplexa rötter alltså, men det gör inget. De homogena lösningarna ges av

$$\begin{aligned}
y_h(x) &= Ae^{(2+3i)x} + Be^{(2-3i)x} \\
&= e^{2x}\left(Ae^{3ix} + Be^{-3ix}\right) \\
&= e^{2x}\left(A\cos 3x + iA\sin 3x + B\cos 3x - iB\sin 3x\right) \\
&= e^{2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right)
\end{aligned}$$

där $C_1 = A + B$ och $C_2 = iA - iB$. Men eftersom A och B redan är godtyckliga konstanter kan vi lika gärna se C_1 och C_2 som godtyckliga konstanter. Svaret blir alltså att

$$y(x) = e^{2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right).$$

5 Lösningar till icke-homogena ekvationer

Lösningsgången är i princip likadan när vi löser alla linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Vi försöker summera denna.

Lösningsschema

Givet en ekvation $y'' + ay' + by = g$ gör vi normalt sett följande:

- Identifiera $p(D)$ och skriv ned det karakteristiska polynomet $p(r)$.
- Faktorisera $p(r)$ (möjligen komplext) och notera speciellt rötterna r_1 och r_2.
- Skriv ned **alla** homogena lösningar $y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ eller $y_h = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$ då $r_1 = r_2$. Om r_1 och r_2 är komplexa kan vi välja att skriva y_h på reell form med cos- och sin-termer i stället:

  $$y_h(x) = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right),$$

  där $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.
- Hitta **någon** partikulärlösning y_p till ekvationen.
- Formulera den allmänna lösningen $y = y_h + y_p$. Här finns obestämda konstanter.
- Eventuellt bestäm konstanterna C_1 och C_2 om det finns villkor.

Det största problemet här brukar vara att hitta partikulärlösningen och vi kommer ägna en hel del tid åt detta problem. Det brukar kännas lite ad-hoc (vilket det kanske även är) och man behöver bygga upp lite känsla för vad som är lämpliga ansatser.

Villkor på lösningar

Observera att **hela** lösningen $y = y_h + y_p$ måste bestämmas innan några villkor sätts in för att finna konstanterna C_1 och C_2. Detta kan **inte** göras direkt på homogenlösningen.

6 Partikulärlösningar

När vi letar en partikulärlösning så brukar vi ofta utgå från någon slags ansats som verkar rimlig och sedan bestämma vilka värden parametrar i ansatsen måste ha. Om det går att välja parametrarna så är vi färdiga, annars måste ansatsen modifieras. Så hur vet man vad för slags ansats man ska göra?

6.1 Polynom

Om högerledet består av ett polynom

$$p(D)y = q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

ansätter vi ett annat polynom som har minst samma grad som $q(x)$. Hur hög grad som behövs har att göra med hur $p(D)$ ser ut. Ansatsen är naturlig eftersom derivatan av polynom är polynom.

Exempel

Hitta en partikulärlösning till $2y'' + y' - y = 3x + 1$

Lösning. Vi ansätter $y_p(x) = Ax + B$ eftersom vi vill matcha ett första-grads polynom. Då är $y'' = 0$ och $y' = A$, så

$$A - (Ax + B) = 3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad A - B = 1 \text{ och } A = -3 \quad \Leftrightarrow \quad A = -3 \text{ och } B = -4.$$

Partikulärlösningen ges alltså av $y_p(x) = -3x - 4$. Kontrollera att detta fungerar!
Om vissa termer "saknas" i $p(D)$ kan vi komma undan med enklare ansatser.

Exempel

Hitta en partikulärlösning till $y'' + 2y' = 3x + x^2$.

Lösning. Vi vill matcha grad 2, men ser i HL att konstant saknas och att det i VL saknas y-term. Alltså ansätter vi $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ och ser att

$$6Ax + 2B + 2\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = 3x + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6A = 1, \\ 6A + 4B = 3, \\ 2B + 2C = 0. \end{cases}$$

Alltså måste $A = 1/6$, $4B = 2$ så $B = 1/2$, och $C = -B = -1/2$. Vår partikulärlösning är alltså

$$y_p(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}.$$

Vad händer om vi gör fel ansats? Det blir inte värre än att vi hamnar i en situation där vi inte kan bestämma konstanterna. Tänk till exempel om vi inte tar med Cx-termen i ansatsen ovan.

Då blir den sista ekvationen $2B = 0$, så $B = 0$. Men då är både $6A = 3$ och $6A = 1$ vilket så klart inte går. Hamnar vi här får vi göra om ansatsen! Hur? Lägg till fler termer om du inte kommer på något bättre.

6.2 Exponentialfunktioner

Uttryck innehållande exponentialfunktioner e^{ax} (a kan vara komplex) kan transformeras med ansatsen $z(x)e^{ax}$ vilket normalt sett reducerar fallet till något enklare. I fallet med konstanta koefficienter kommer vi ihåg förskjutningsregeln:

$$p(D)(z(x)e^{ax}) = e^{ax}p(D+a)z.$$

Vi återfår alltså funktionen e^{ax} efter alla deriveringar (inte förvånande egentligen) och kan förkorta bort denna om den förekommer i alla termer i högerledet (eftersom $e^{ax} \neq 0$).

Exempel

Hitta alla lösningar till $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$.

Lösning. Vi vet att $p(r) = r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1)$ och därmed att vi söker y_p så att $p(D)y_p = xe^{2x}$. Vi ansätter $y_p(x) = z(x)e^{2x}$ och ser vad som händer:

$$\begin{aligned} p(D)\left(z(x)e^{2x}\right) = xe^{2x} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{2x}p(D+2)z(x) = xe^{2x} \\ &\Leftrightarrow \quad p(D+2)z(x) = x \\ &\Leftrightarrow \quad (D+2-2)(D+2-1)z = D(D+1)z = x \\ &\Leftrightarrow \quad z'' + z' = x. \end{aligned}$$

Vi söker **en** lösning, så vi ansätter $z(x) = Ax^2 + Bx$ vilket ger

$$2A + 2Ax + B = x \quad \Leftrightarrow \quad 2A + B = 0 \text{ och } 2A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{2} \text{ och } B = -1.$$

Vi får alltså $y_p(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)e^{2x}$.

Den homogena delen får vi direkt från faktoriseringen: $y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^x$. Enligt superpositionsprincipen får vi nu att samtliga lösningar ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{2x} + C_2e^x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{2x}.$$

Alternativt. Vi kan även direkt sätta in $y_p = z(x)e^{2x}$ och derivera på utan att använda förskjutningsregeln. Vi har då att $y_p' = (z' + 2z)e^{2x}$ och att $y_p'' = (z'' + 2z' + 2z' + 4z)e^{2x}$ vilket ger att

$$p(D)(ze^{2x}) = (z'' + 4z' + 4z)e^{2x} - 3(z' + 2z)e^{2x} + 2ze^{2x} = (z'' + z')e^{2x}.$$

Om detta ska bli xe^{2x} måste alltså $z'' + z' = x$ och vi är tillbaka där vi hamnade med förra metoden.

6.3 Sinus och cosinus

Dessa kan behandlas på olika sätt. En variant är att betrakta dem som real- respektive imaginärdel av en komplex exponentialfunktion. Alternativt ansätts en linjärkombination av sinus och cosinus med samma frekvens som i högerledet. Dessa alternativ kan behöva modifieras om ansatsen matchar de homogena lösningarna.

Exempel

Finn alla lösningar till $y'' + y' - 6y = 2\sin 2x$.

Lösning. Låt $p(r) = r^2 + r - 6$. De homogena lösningarna ges av

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

eftersom $p(r) = 0$ har lösningarna $r = 2$ och $r = -3$ och faktoriseringen $p(r) = (r-2)(r+3)$. Vi vill ha ut $2\sin 2x$, så det är rimligt att ansätta en partikulärlösning av formen

$$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$$

eftersom den typen av funktioner dyker upp när man deriverar. Vi räknar ut vad som händer med ansatsen:

$$y_p'' + y_p' - 6y_p = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 2A\cos 2x - 2B\sin 2x - 6A\sin 2x - 6B\cos 2x = 2\sin 2x.$$

Vi matchar $\sin 2x$-termer och $\cos 2x$-termer och finner att

$$-4A - 2B - 6A = 2 \text{ och } -4B + 2A - 6B = 0.$$

Alltså är $A = -5/26$ och $B = -1/26$. Vi har därmed

$$y_p(x) = -\frac{5}{26}\sin 2x - \frac{1}{26}\cos 2x.$$

Den fullständiga lösningen ges av

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{5}{26}\sin 2x - \frac{1}{26}\cos 2x.$$

Alternativt. Eftersom $\sin 2x = \operatorname{Im} e^{2ix}$ betraktar vi ekvationen $p(D)u = 2e^{2ix}$. Vi byter namn på funktionen till u för att inte blanda ihop det med y som är den reella lösningen vi söker i slutändan.
För partikulärlösningen använder vi förskjutningssatsen och ansatsen $u_p(x) = z(x)e^{2ix}$:

$$\begin{aligned}
p(D)\left(z(x)e^{2ix}\right) = 2e^{2ix} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{2ix} p(D+2i)z(x) = 2e^{2ix} \\
&\Leftrightarrow \quad p(D+2i)z(x) = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad (D-2+2i)(D+3+2i)z = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad (D^2 + (1+4i)D - 10 + 2i)z = 2.
\end{aligned}$$

Detta ser riktigt bökigt ut men vi söker bara **en** partikulärlösning, så vi ansätter $z_p = A$. Då är $(-10+2i)A = 2$, eller $A = -\frac{1}{26} - \frac{5}{26}i$. Alltså,

$$\begin{aligned}
u_p(x) = z_p(x)e^{2ix} &= \left(-\frac{1}{26} - \frac{5}{26}i\right)(\cos 2x + i\sin 2x) \\
&= \frac{-\cos 2x + 5\sin 2x}{26} - i\frac{\sin 2x + 5\cos 2x}{26}.
\end{aligned}$$

Vi finner nu vår sökta partikulärlösning genom att ta $y_p = \text{Im } u_p(x)$, vilket stämmer överens med vad vi tog fram ovan med den reella metoden. Observera att vi här på köpet även får en partikulärlösning för högerledet $\cos 2x$ (hur?). Detta alternativ bygger på att ekvationen är linjär så superpositionsprincipen fungerar och vi kan dela upp i real- och imaginärdel.