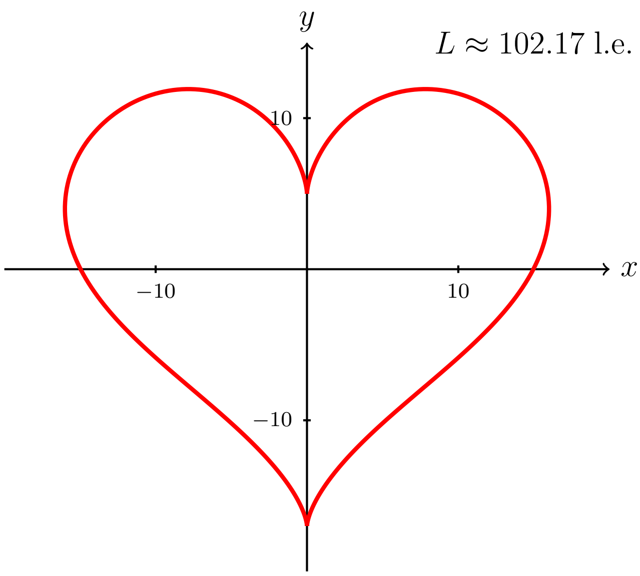
TATA42: Föreläsning 11
Kurvlängd, area och volym

Johan Thim*

4 mars 2018

1 Kurvlängd

Vi börjar med att betrakta situationen då en kurva i planet ges på parameterform: $(x(t), y(t))$. Detta innebär att både x- och y-koordinaterna simultant uttrycks som funktioner av någon parameter t som varierar i ett intervall. Till exempel skulle $x(t) = \cos t$ och $y(t) = \sin t$, där vi låter $0 \leq t \leq 2\pi$, beskriva cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. På detta sätt kan vi även få med fallet då en kurva inte kan uttryckas som en funktion $y = f(x)$. Exempelvis kan kurvan som bestäms av $x = 16\sin^3 t$ och $y = 13\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4t$ med $0 \leq t \leq 2\pi$ ritas enligt följande[1].



Att beskriva detta som ett funktionssamband $y = f(x)$ förefaller ganska omöjligt. Omvänt däremot, om vi utgår från en funktion kan vi alltid skapa en parameterframställning.

Parameterform för en funktionskurva

Om kurvan vi är intresserad av ges av en funktion f på ett intervall $[a, b]$, i.e., $y = f(x)$ för $a \leq x \leq b$, så kan vi beskriva detta på parameterform genom att till exempel välja $x = t$ och $y = f(t)$, där $a \leq t \leq b$.

*johan.thim@liu.se

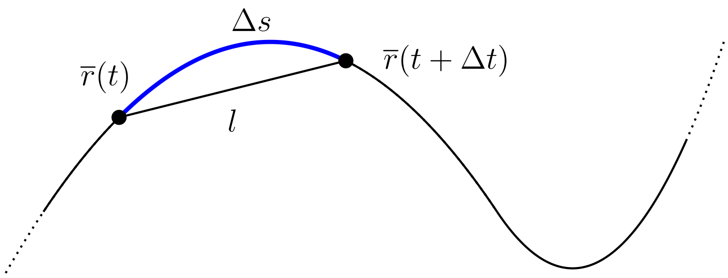
[1]En dödskalle visade sig vara för svår att beskriva matematiskt...

Än så länge har vi egentligen inte ställt några krav på ingående funktioner, men för att på något (enkelt) sätt kunna definiera vad vi menar med kurvlängd kommer vi att kräva att funktionerna är kontinuerligt deriverbara (dvs f är deriverbar och f' är kontinuerlig). Vi brukar sammanfatta detta villkor genom att säga att $f \in C^1([a,b])$. Vi antar underförstått att detta gäller om inget annat anges.

Sats. Om $x \in C^1([a,b])$ och $y \in C^1([a,b])$ så ges längden av kurvan $(x(t), y(t))$ för de t där $a \le t \le b$, av

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Vi skissar beviset lite informellt bara för att se att det verkar rimligt; det finns ett mer precist bevis i kursboken. Vi ritar en figur och funderar över hur vi kan approximera längden av en liten del av kurvan. Låt $\Delta t > 0$ vara ett litet tal och låt $\overline{r}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2$. Vi har följande principfigur:



Då är det lilla bågelementet $\Delta s \approx l$ om Δt är litet och kurvan glatt (ges av deriverbar funktion). Längden l i sin tur kan vi beräkna genom

$$\begin{aligned} l &= |\overline{r}(t+\Delta t) - \overline{r}(t)| \\ &= \sqrt{(x(t+\Delta t) - x(t))^2 + (y(t+\Delta t) - y(t))^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t \to \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \end{aligned}$$

då $\Delta t \to 0$. Vi väljer nu att kalla det sista uttrycket för *bågelementet ds*. Med andra ord, vi definierar

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Exempel

Räkna ut omkretsen för en cirkel med radie R.

Lösning. Vi vet redan svaret, men vi använder satsen ovan för att illustrera. Lämpligen representerar vi cirkeln som $x(t) = R\cos t$ och $y(t) = R\sin t$ för $0 \le t \le 2\pi$. Detta är ett sätt att parametrisera cirkeln på. Eftersom ingående funktioner är snälla erhåller vi då kurvlängden

$$\begin{aligned} L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} |R|\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt \\ &= R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R, \end{aligned}$$

eftersom $|R| = R$ då $R > 0$.
Ovanstående är ett specialfall för kurvlängd då vi använder polära koordinater. Mer generellt låter vi radien vara en given funktion $r = h(t)$, så $x(t) = r(t)\cos t$ och $y(t) = r(t)\sin t$. Satsen ovan implicerar att $ds = \sqrt{h(t)^2 + h'(t)^2}\, dt$ (visa det). Låt oss sammanfatta detta användbara resultat.

Kurvlängd i polära koordinater

Om en kurva Γ ges i polära koordinater, $x = r\cos t$ och $y = r\sin t$, där $r = h(t)$ för $\alpha \le t \le \beta$ och h är kontinuerlig, så kan längden av Γ beräknas enligt

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{h(t)^2 + (h'(t))^2}\, dt.$$

Kurvlängd av en funktionskurva

Om vi är intresserade av längden av kurvan $y = f(x)$, $a \le x \le b$, kan vi enkelt ställa upp uttrycket för detta genom att parametrisera som i exemplet tidigare: $x(t) = t$ och $y(t) = f(t)$. Då är $x'(t) = 1$ och $y'(t) = f'(t)$ och längden ges av

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{$\star$}$$

Rent konkret blir kalkylerna ofta ganska jobbiga eftersom integranden innehåller kvadratrötter av andragradsuttryck. Som tur är behandlades många sådana situationer i envariabel-ettan!

Exempel

Räkna ut längden av kurvan $y = x^2$ för $0 \le x \le 1$.

Lösning. Vi ser att kurvan ges av en C^1-funktion och att $y = f(x)$ med $f(x) = x^2$. Då ges alltså kurvlängden av

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx &= \int_0^1 1\cdot\sqrt{1+4x^2}\,dx \\
&= \Big[x\sqrt{1+4x^2}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx \\
&= \sqrt{5} - \int_0^1 \frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx \\
&= \sqrt{5} - \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx + \left[\frac{1}{2}\ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)\right]_0^1 \\
&= -\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx + \sqrt{5} + \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2},
\end{aligned}$$

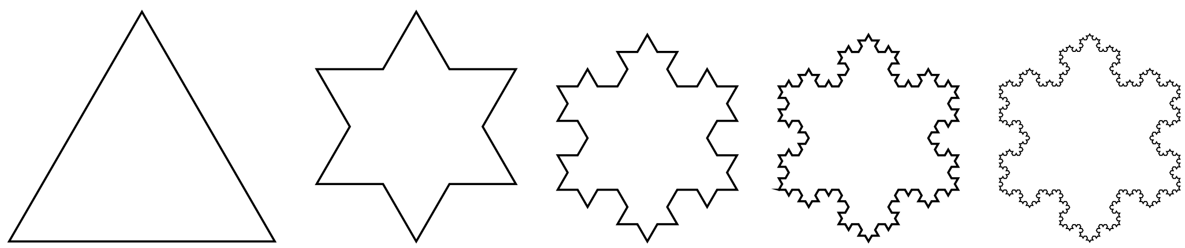
där vi utnyttjat välkänd (nåja..) primitiv funktion till $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Eftersom vi får tillbaka integralen med ”rätt” tecken har vi nu

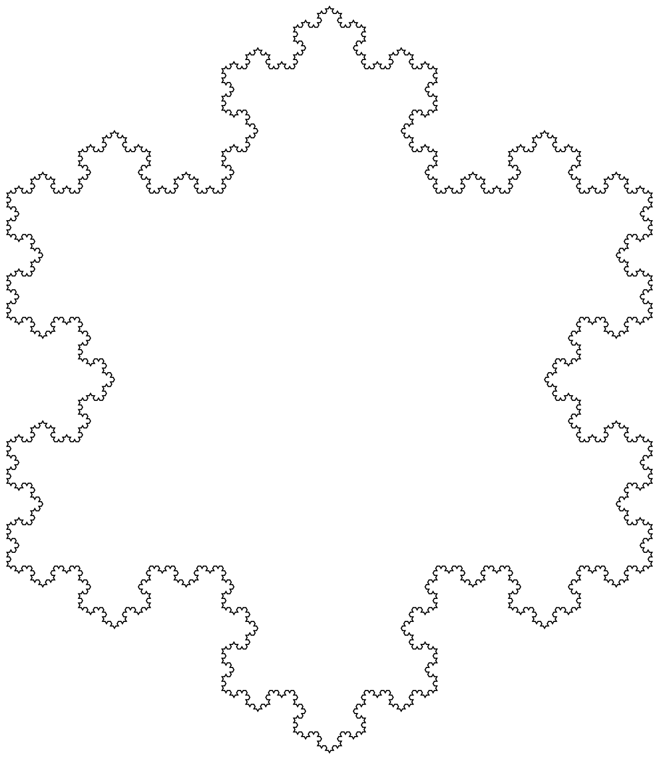
$$\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \frac{2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})}{4}.$$

Definition av kurvlängd

Om $f \in C^1$ kan man definiera längden L av en kurva direkt med $(\star)$ ovan, men observera att vi inte direkt kan använda satsen som definition av kurvlängd för alla kurvor. Betrakta till exempel fallet då $f(x) = |x|$. Som bekant är f inte deriverbar i origo och därmed fungerar inte satsen som formulerad. Men vi vet också att man kan dela upp Riemannintegraler i två delar och därmed kunna räkna ut längden av kurvan på varje del och summera dessa. Detta fungerar även om vi har många fler punkter där f' inte finns (åtminstone så länge detta är ett ändligt antal). Vad händer sen?

Ett exempel på en kurva där det går åt skogen att räkna ut längden är Kochs snöflinga. Man startar med en liksidig triangel och delar sedan varje sida i tre delar och ersätter den mittersta med en ny liksidig triangel. Processen upprepas på alla nya linjesegment om och om igen oändligt många gånger. Den kurva som uppstår visar sig inte ha någon parametrisering som är deriverbar i en enda punkt! Hur ska vi definiera längden av en sådan kurva? Vi ritar de sex första stegen.





Faktum är att $L = \infty$ är den enda rimliga definitionen. Varför? Låt L_n vara kurvlängden för iteration n och antag att kantlängden i den första triangeln är 1. Då är $L_1 = 3$. När $n = 2$ får varje linjesegment längden 1/3 och varje sida ger upphov till 4 nya kanter. Således blir kurvlängden när $n = 2$ inget annat än $L_2 = 3 \cdot 4 \cdot \dfrac{1}{3} = 4$. När $n = k$ finns det $3 \cdot 4^k$ kanter, var och en av dessa har längden 3^{-k}. Alltså ges den totala kurvlängden L_k för iteration k av precis $L_k = 3 \cdot 4^k \cdot 3^{-k} = 3\left(\dfrac{4}{3}\right)^k$. När $n \to \infty$ är det således tydligt att $L_n \to \infty$.

Vad blir arean som innesluts av kurvan? Är frågan rimlig? Vid iteration $k-1$ finns $3 \cdot 4^{k-1}$ kanter, så vid iteration k läggs det till $3 \cdot 4^{k-1}$ trianglar, var och en med arean $\dfrac{3^{-k} \cdot 3^{-k}\sqrt{3}}{4}$. Således blir totala arean A_n vid iteration n (med $n \geq 2$)

$$A_n = A_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 4^{k-1} 9^{-k} \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4 \cdot 9} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{1-(4/9)^{n-1}}{1-4/9}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) \to \frac{2\sqrt{3}}{5}, \quad \text{då } n \to \infty.$$

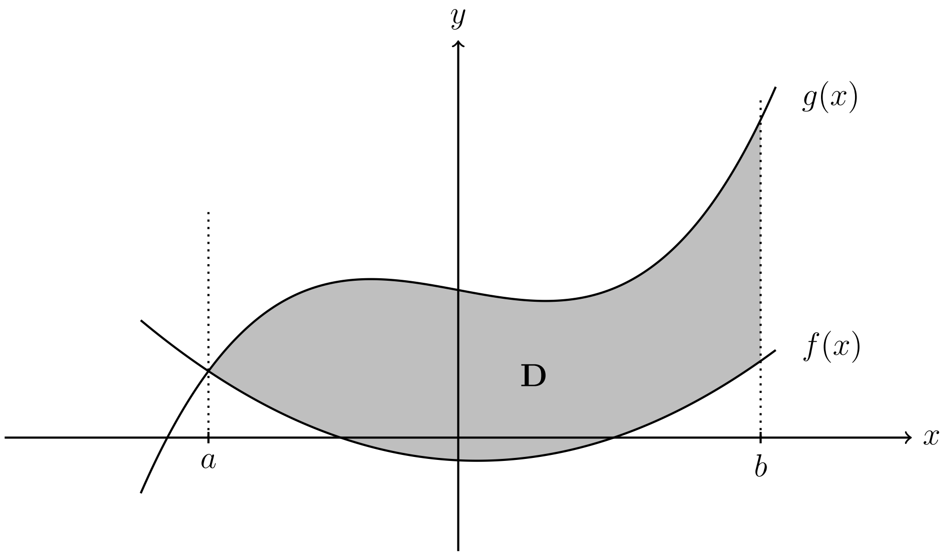
En rimlig tolkning på arean som omsluts av snöflingan är alltså $2\sqrt{3}/5$.

2 Plan area

Om $g(x) \geq f(x)$ på ett intervall $[a, b]$ så ges arean A mellan f och g av

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$$

under förutsättning att funktionerna är tillräckligt snälla. Området vars area vi är intresserade av är $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$.



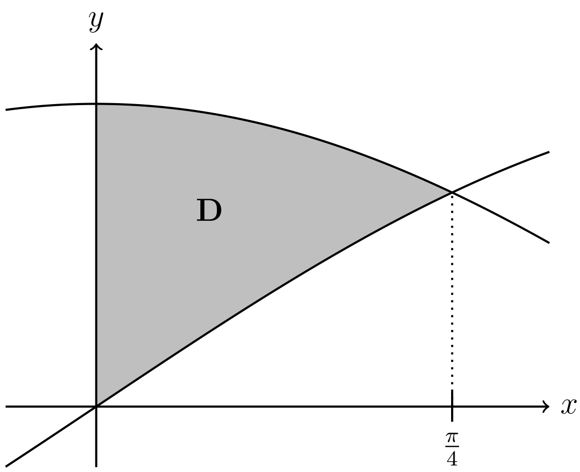
Exempel

Räkna ut arean mellan $y = \cos x$ och $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/4$.

Lösning. Arean ges av

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\ dx = \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$$

vilket är positivt så svaret är inte helt orimligt. Vi bör även kontrollera att $\cos x \geq \sin x$ för $0 < x < \pi/4$. En figur visar tydligt hur situationen ser ut, och här är alltså den skuggade arean lika med $\sqrt{2} - 1 \approx 0.41$ areaenheter.

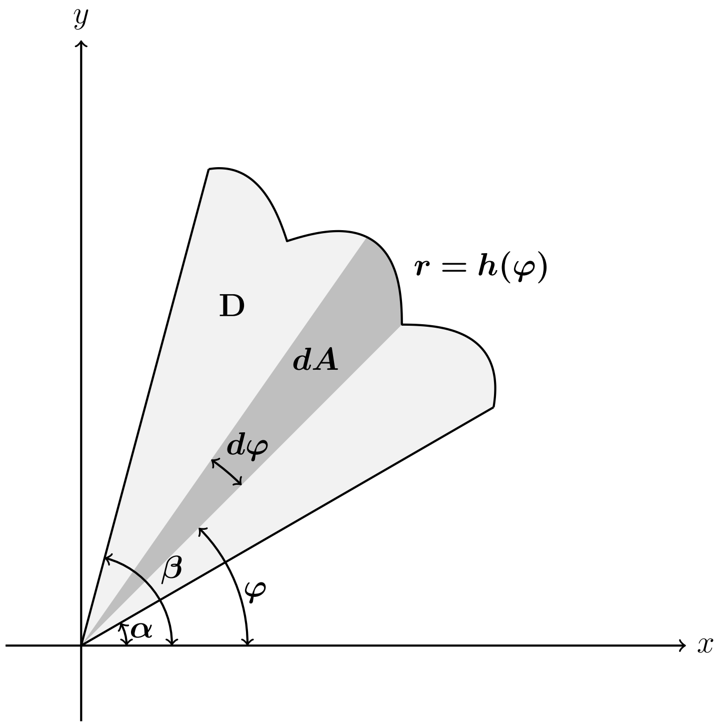


2.1 Area i polära koordinater

Polära koordinater är användbara i situationer då vi har lättare att beskriva hur långt från origo något befinner sig än att precisera hur variation ser ut direkt i x- och y-koordinater. Vi har som bekant $x = r\cos\varphi$ och $y = r\sin\varphi$ och kan då betrakta områden som ges på formen

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq r \leq h(\varphi),\ \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$$

där $h(\varphi)$ är någon kontinuerlig funktion och $\alpha \leq \beta$. Vi skissar hur situationen ser ut.



Arean av detta område kan beräknas enligt följande:

$$A(D) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{h(\varphi)^2}{2}\, d\varphi.$$

Motiveringen till areaformeln kommer från att vi kan betrakta ett litet areaelement vid vinkeln φ enligt

$$dA = \pi h(\varphi)^2 \cdot \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{h(\varphi)^2}{2}\, d\varphi$$

eftersom det är en del av en disk med radien $h(\varphi)$. Vi summerar dessa areaelement och erhåller formeln ovan.

3 Volym

Både rotationsarea- och rotationsvolymsberäkningar hör egentligen hemma i en flervariabelanalyskurs, men på grund av rotationssymmetrin kan vi ofta reducera area- och volymberäkningar till ett fall med bara en variabel. Mycket av kommande formler är lite ”handviftande” men visar ändå på hur kraftfulla verktyg integral- och differentialkalkyl är.

3.1 Rotationsvolym via skivor

Vi börjar med att beskriva det som brukar kallas skivformeln. Vi betraktar en icke-negativ funktion $f(x)$ och låter området

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le y \le f(x),\ a \le x \le b\}$$

rotera ett varv kring x-axeln. För varje värde $x \in [a, b]$ uppstår då en disk (skiva) med area $A(x) = \pi f(x)^2$ eftersom radien för disken ges av funktionsvärdet i punkten x: $r = f(x)$.

Vi multiplicerar med dx för att få en infinitesimal cylinder (höjden är alltså dx) som har volymen $dV = A(x)\,dx = \pi f(x)^2\,dx$. Vi summerar dessa och erhåller då den så kallade skivformeln:

$$V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Skivformeln

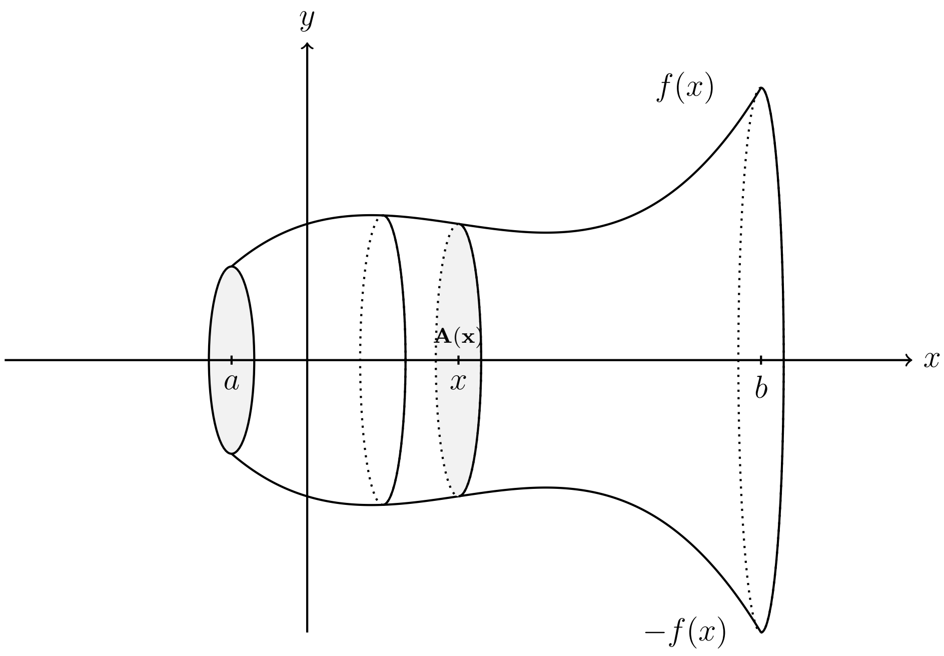
Sats. Om $f(x) \geq 0$ är kontinuerlig så ges volymen V som uppstår då området

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x),\ a \leq x \leq b\}$$

roterar ett varv kring x-axeln av

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Vi bevisar inte satsen utan nöjer oss med argumentet ovan. En principskiss visar också hur vi summerar små skivor för att få hela volymen. Formeln är även känd som brödskiveformeln. Varför tror du formeln fått det namnet?



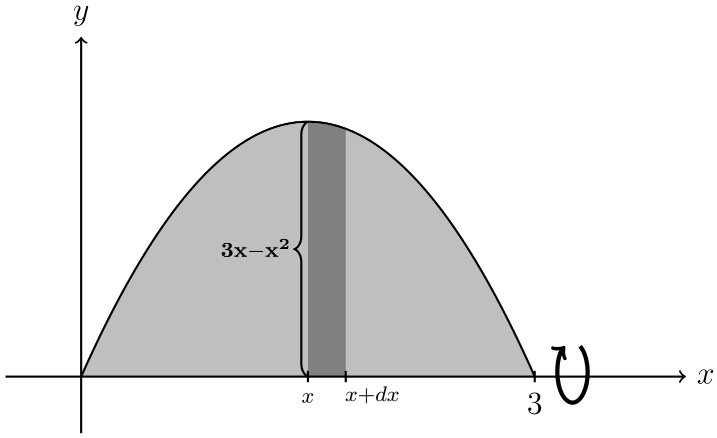
Exempel

Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området som begränsas av kurvan $y = 3x - x^2$ och x-axeln roteras ett varv kring x-axeln.

Lösning. Kurvan $y = 3x - x^2$ skär x-axeln då $3x - x^2 = 0$, vilket sker precis då $x = 0$ och $x = 3$. För $0 \le x \le 3$ är $3x - x^2 \ge 0$, så volymen vi söker ges av

$$\pi \int_0^3 (3x - x^2)^2 \, dx = \pi \int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4) \, dx = \pi \left[3x^3 - \frac{3x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_0^3 = \pi \left(81 - \frac{3^6}{10} \right).$$

Man bör se till att detta uttryck åtminstone är positivt (varför?). En figur är också på sin plats:

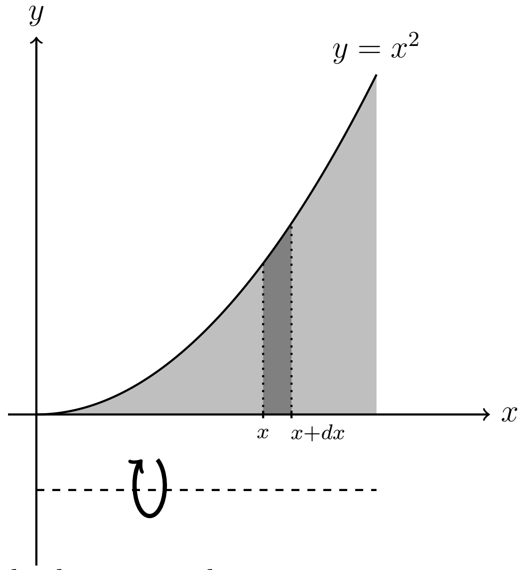


Vi kan även ta hänsyn till ihåligheter i rotationskroppen som i följande exempel.

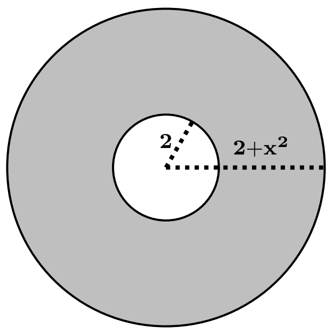
Exempel

Bestäm volymen då området $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le x^2$, roterar ett varv kring $y = -2$.

Lösning. Det vanligaste felet är att man missar att det är en viss specifik yta som roterar runt en axel, inte området mellan en kurva och rotationsaxeln. De cylindrar som uppstår (med höjd dx) är INTE homogena utan har ett hålrum. Vi skissar hur situationen ser ut i planet:



Ett tvärsnitt vid x:



Således kommer volymen att ges av

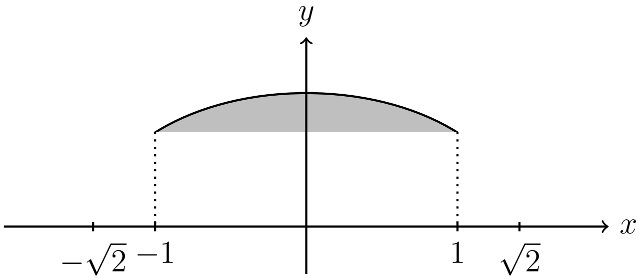
$$\pi \int_0^3 (x^2 + 2)^2 \, dx - \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = \pi \left(\left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x \right]_0^3 - 12 \right) = \pi \left(\frac{243}{5} + 36 + 12 - 12 \right) = \frac{423\pi}{5},$$

där vi helt enkelt dragit bort volymen av den ihåliga cylindern med radie 2 och höjd 3.

Exempel

Beräkna volymen av ett klot med radie $\sqrt{2}$ där vi skär ut en cylinder med radie 1 som har x-axeln som sin symmetriaxel.

Lösning. Vi tänker oss att klotet uppstår vid rotation av disken $x^2 + y^2 \leq 2$ kring x-axeln. Cylindern uppstår när vi roterar området mellan $y = 1$ och x-axeln kring x-axeln. Cylindern får oändlig volym så hur reder vi ut hur mycket som ligger i klotet? Ett sätt är skissa situationen.



Kurvan $x^2 + y^2 = 2$ skär linjen $y = 1$ precis då $x = \pm 1$. Vi ser då att skivformeln med en undre gräns $y = 1$ istället för $y = 0$ (x-axeln) ger att den eftersökta volymen blir

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{2 - x^2}^2 - 1^2\right) dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \frac{4\pi}{3}.$$

Rotation kring axlar parallella med x-axeln

Vi kan rotera kring en linje $y = c$ i stället för kring x-axeln om vi kräver att $f(x) \geq c$. Det enda som ändras är radien eftersom det nu är relativt $y = c$ och inte $y = 0$, så skivformeln får utseendet

$$\pi \int_a^b (f(x) - c)^2\, dx.$$

Samma formel gäller om $f(x) \leq c$. Det viktiga är att vi ligger på ena sidan av rotationsaxeln.

3.2 Rotationsvolym via cylindrar

Om vi vill rotera kring y-axeln i stället är det ofta enklast att göra med ”rörformeln.” Vi betraktar samma område $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x),\ a \leq x \leq b\}$ med tillägget att $a \geq 0$ (så hela området är på ena sidan av rotationsaxeln). Vid ett fixt $x \in [a, b]$ tänker vi oss en cylinder med höjden $f(x)$ och radien x. Detta ger mantelarean $M(x) = 2\pi x f(x)$. Vi multiplicerar med en liten tjocklek för att få ett volymselement $dV = M(x)\, dx = 2\pi x f(x)\, dx$. Vi summerar dessa volymelement och erhåller då den så kallade cylinderformeln:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b M(x)\, dx = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Cylinderformeln

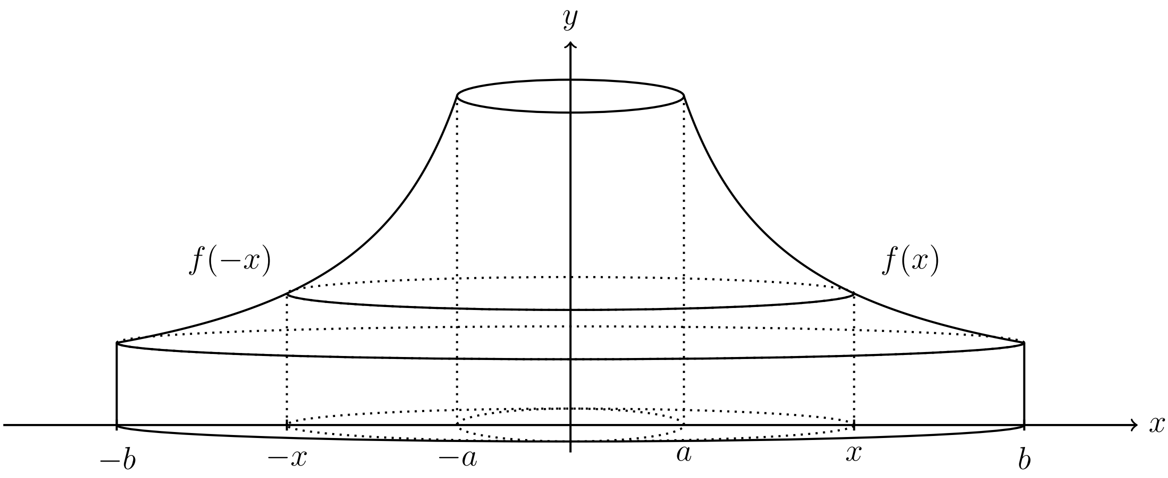
Sats. Låt $a \geq 0$ och $f(x) \geq 0$. Volymen V som uppstår då området

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x),\ a \leq x \leq b\}$$

roteras ett varv kring y-axeln ges av

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Vi försöker skissa situationen.



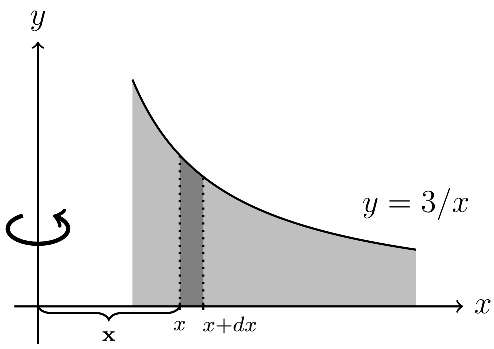
Exempel

Beräkna rotationsvolymen som uppstår då området som begränsas av kurvan $y = 3/x$, x-axeln och $1 \leq x \leq 4$, roteras ett varv kring y-axeln.

Lösning.

För givet $x \in [1, 4]$ är radien för vår cylinder x (avståndet till y-axeln) och höjden ges av $3/x$. Alltså är mantelarean $2\pi(3/x)x = 6\pi$ och vårt volymselement blir helt enkelt $6\pi dx$. Alternativt direkt via rörformeln:

$$2\pi \int_1^4 x\frac{3}{x}\, dx = 2\pi \int_1^4 3\, dx = 18\pi.$$



Rotation kring axlar parallella med y-axeln

Det är inget magiskt med y-axeln, utan rotation kan ske kring vilken linje $x = c$ som helst utan större modifikation. Det enda som ändras är kravet att $a \geq 0$ byts ut mot att $a \geq c$ och att radien för våra cylindrar nu ges av $r = x - c$, eller att $b \leq c$ och $r = c - x$.

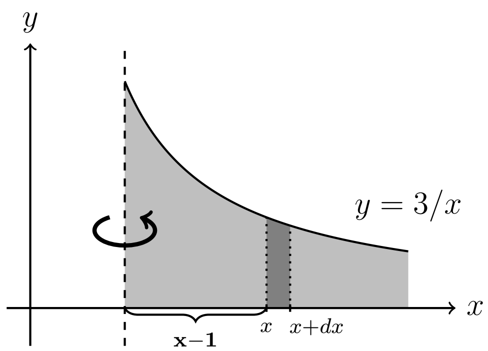
Exempel

Beräkna rotationsvolymen som uppstår då området som begränsas av kurvan $y = 3/x$, x-axeln och $1 \leq x \leq 4$, roteras ett varv kring (a) linjen $x = 1$ (b) linjen $x = 5$.

Lösning. Situationen är väldigt snarlik föregående exempel.

(a) För givet $x \in [1, 4]$ är radien för vår cylinder $x - 1$ (avståndet till rotationsaxeln) och höjden ges av $3/x$. Rörformeln ger nu att volymen ges av

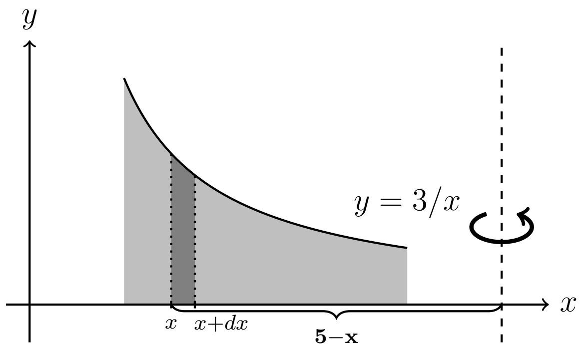
$$2\pi \int_1^4 (x-1)\frac{3}{x}\,dx = 2\pi \int_1^4 \left(3 - \frac{3}{x}\right)\,dx$$
$$= 6\pi \left[x - \ln|x|\right]_1^4$$
$$= 6\pi\left(3 - 2\ln 2\right).$$



Observera att denna volym är strikt mindre än volymen i förra exemplet. Precis som sig bör.

(b) Nu befinner vi oss på andra sidan rotationsaxeln, och ”radien” för rotationen ges då istället av $r = 5 - x$. Sålunda,

$$V = 2\pi \int_1^4 (5-x)\frac{3}{x}\,dx = 2\pi\left(15\ln 3 - 9\right).$$



Volymen är åtminstone större en noll (eftersom $\ln 3 > 1$) så inget direkt orimligt.

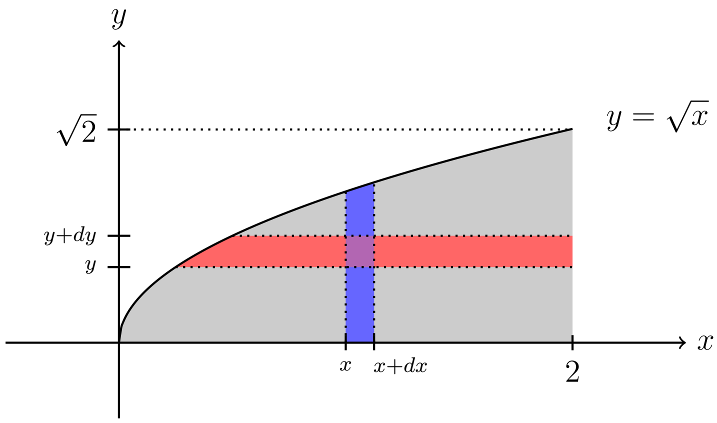
4 Sammanfattande exempel för rotationsvolymer

I föregående exempel har vi använt skivformeln för rotation kring axlar parallella med x-axeln och rörformeln för rotation parallell med y-axeln, men det är inget krav. Följande exempel belyser detta.

Exempel

Låt området D ges av det begränsade området mellan kurvan $y = \sqrt{x}$, x-axeln och linjen $x = 2$. Bestäm volymen V_x då D roterar ett varv kring x-axeln och volymen V_y då D roterar ett varv kring y-axeln.

Lösning. Vi börjar med att rita en figur (alltid en bra idé).



Vi ser att för kurvan gäller att $y = \sqrt{x}$ om och endast om $y^2 = x$ (både x och y är icke-negativa). Vi kan alltså uttrycka kurvan både som en funktion av x och som en funktion av y. På detta sätt kan alla rotationsvolymer ställas upp på två olika sätt: med avseende på x och med avseende på y. Vi ställer upp volymen som uppstår vid rotation kring x-axeln först:

$$V_x = \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 \, dx = \frac{\pi}{2} \left[x^2 \right]_0^2 = 2\pi$$

alternativt

$$V_x = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} y(2 - y^2) \, dy = 2\pi \left[y^2 - \frac{y^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi.$$

Angående den andra formeln kan vi säga att vi egentligen roterar en cylinder med basradie $\sqrt{2}$ och höjd 2 (längs x-axeln) och drar bort volymen som uppstår från kurvan $x = y^2$.
Om vi roterar kring y-axeln i stället erhåller vi via ”rörformeln” att

$$V_y = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{x} \, dx = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^2 = \frac{16\pi\sqrt{2}}{5}.$$

Alternativt kan vi använda skivformeln där vi återigen måste skära bort delar ur rotationen med hjälp av en cylinder:

$$V_y = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(2^2 - (y^2)^2\right) \, dx = \pi \left(4\sqrt{2} - \frac{2^{5/2}}{5} \right) = \frac{16\pi\sqrt{2}}{5}.$$