TATA42: Föreläsning 12
Rotationsarea, tyngdpunkter och Pappos-Guldins formler

Johan Thim*

15 november 2018

1 Rotationsarea

När vi ska beräkna rotationsarea kommer vi att utföra liknande manövrar som vi gjorde för rotationsvolymer, men vi kommer så klart att betrakta små areaelement i stället för små volymselement.

1.1 Rotationsarea kring x-axeln

Vi betraktar en funktion $f(x) \geq 0$ och låter kurvan

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x),\ a \leq x \leq b\}$$

rotera ett varv kring x-axeln, där $a < b$. För varje värde $x \in [a, b]$ uppstår då en cirkel som har omkrets $2\pi f(x)$ eftersom radien för cirkeln ges av funktionsvärdet: $r = f(x)$ (avståndet till rotationsaxeln). Vi multiplicerar med bågelementet ds för att få en infinitesimal cylinder (höjden är alltså ds) vars mantelarea blir $dA = 2\pi f(x) ds$. Vi summerar dessa och erhåller då följande.

Sats. Om $f(x) \geq 0$ är kontinuerligt deriverbar och $a < b$ så ges arean A som uppstår då kurvan

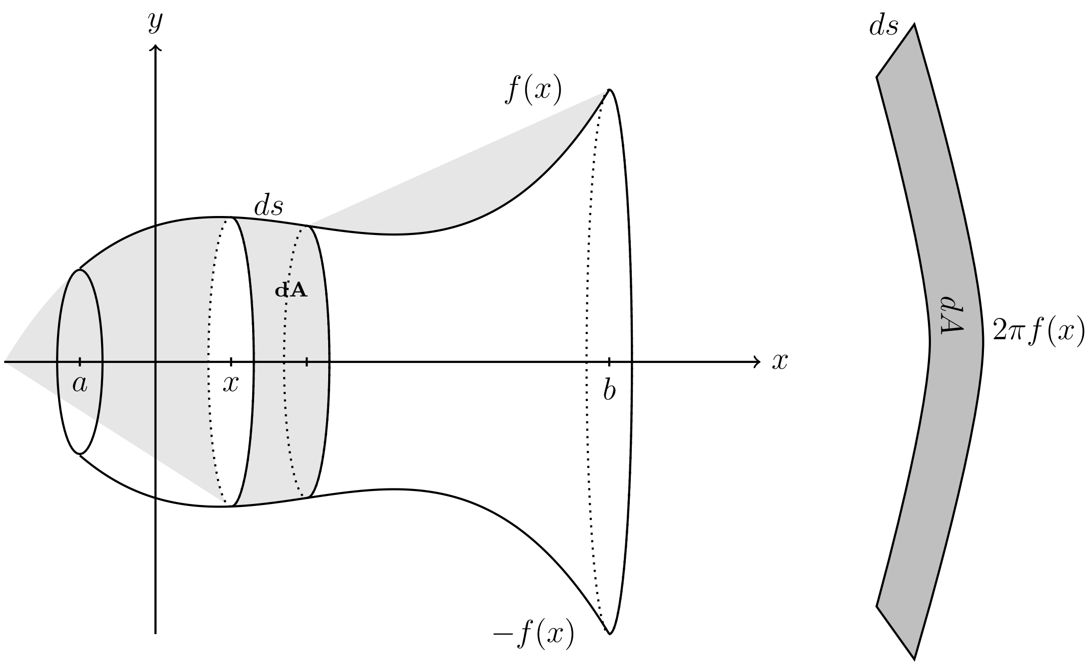
$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x),\ a \leq x \leq b\}$$

roterar ett varv kring x-axeln av

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\, ds = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

*johan.thim@liu.se

Vi bevisar inte satsen utan nöjer oss med argumentet ovan. En principskiss visar också hur vi summerar mantelarean av dessa små cylindrar för att få hela rotationsarean.



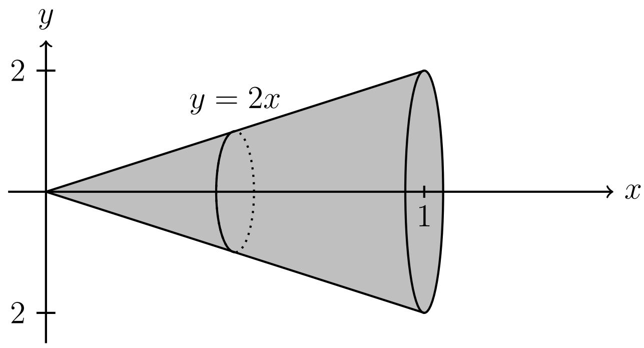
I den högra figuren har vi ”klippt upp” bandet som skapas när vi roterar ds kring x-axeln. Vi ser här att ”kantlängderna” blir precis ds och $2\pi f(x)$, så det är rimligt att area-elementet ges av $dA = 2\pi f(x) \cdot ds$.

> **Exempel**
>
> Beräkna mantelarean av den kropp som uppstår då kurvan $y = 2x$, $0 \leq x \leq 1$, roteras ett varv kring x-axeln.

Lösning. Arean kommer att ges av

$$2\pi \int_0^1 2x\sqrt{1+2^2}dx = 4\sqrt{5}\pi \int_0^1 x\,dx = 2\sqrt{5}\pi.$$

Precis som för rotationsvolymer bör man se till att detta uttryck åtminstone är positivt (varför?). Vidare är det objekt som uppstår en kon i detta fall (med basradien 2 och höjden 1) och vi räknar alltså ut mantelarean på denna!



Rotation kring axlar parallella med x-axeln

Vi kan rotera kring en linje $y = c$ i stället för kring x-axeln med samma teknik om vi bara kräver att endera $f(x) \geq c$ eller $f(x) \leq c$ (att vi befinner oss på ena sidan av rotationsaxeln med andra ord). Det som ändras är radien eftersom det nu är relativt $y = c$ och inte $y = 0$, så

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x) - c| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

1.2 Rotationsarea för rotationer kring y-axeln

Om vi vill rotera kring y-axeln i stället använder vi oss av ett liknande argument som i ”rörformeln” för rotationsvolymer. Vi betraktar samma kurva

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x),\ a \leq x \leq b\}$$

med tillägget att $a \geq 0$ (så hela kurvan är på ena sidan av rotationsaxeln). Däremot måste inte $f(x) \geq 0$ längre. Vid ett fixt $x \in [a, b]$ tänker vi oss ett litet bågelement ds på höjden $f(x)$. Detta roteras kring y-axeln och det uppstår då en liten rotationsarea $dA = 2\pi x \cdot ds$ eftersom omkretsen för cirkeln är $2\pi x$ för radien x. Vi summerar dessa areaelement och erhåller följande formel.

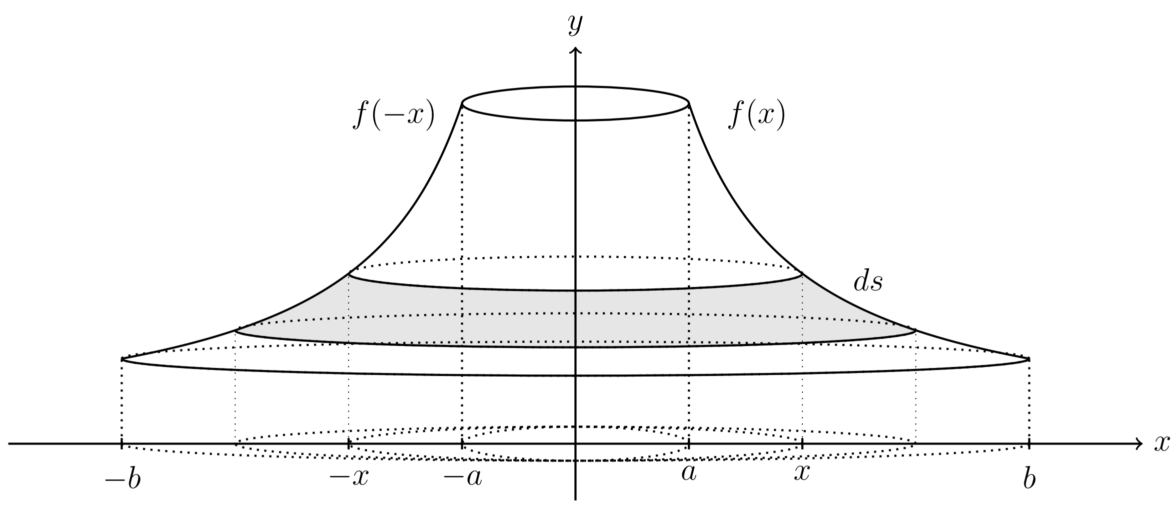
Sats. Låt $0 \leq a < b$. Arean A som uppstår då kurvan

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x),\ a \leq x \leq b\}$$

roteras ett varv kring y-axeln ges av

$$A = 2\pi \int_a^b x\, ds = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Vi försöker skissa situationen.



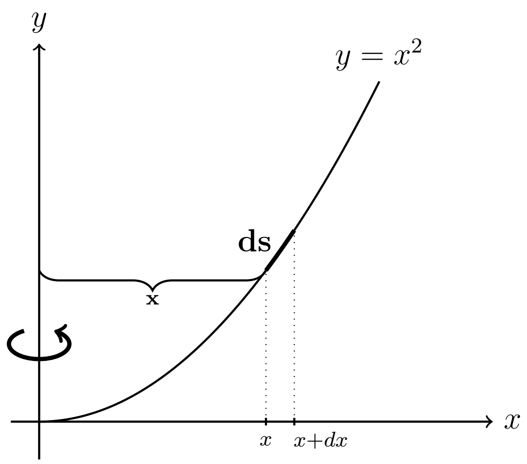
Man kan göra samma sorts ”uppklippning” här som i fallet då vi roterade kring x-axeln, vilket motiverar formeln $dA = 2\pi x \cdot ds$ för areaelementet.

Exempel

Beräkna rotationsarean som uppstår då kurvan $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$ roteras ett varv kring y-axeln.

Lösning.
Eftersom $y' = 2x$ erhåller vi arean

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1+(2x)^2}\, dx \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^2 8x\sqrt{1+4x^2}\, dx \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2(1+4x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^2 \\ &= \frac{\left(17^{3/2}-1\right)\pi}{6} = \frac{\left(17\sqrt{17}-1\right)\pi}{6}. \end{aligned}$$



Rimligt svar? Väldigt svårt att säga, men det är åtminstone positivt!

Rotation kring axlar parallella med y-axeln

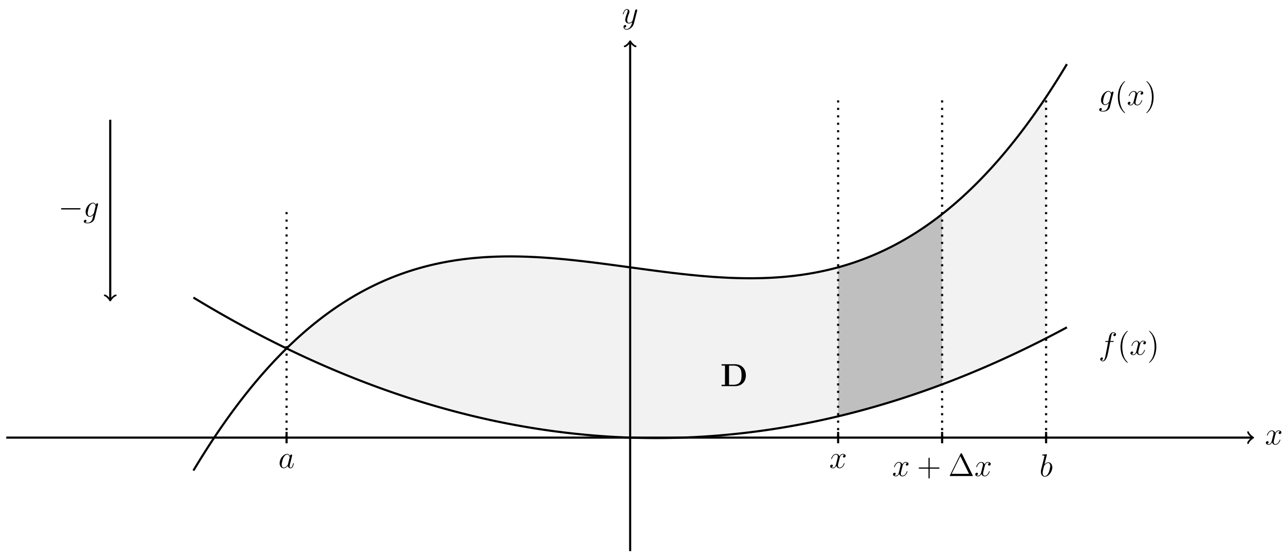
Precis som för rotationsvolymer är det inget magiskt med y-axeln, utan rotation kan ske kring vilken linje $x = c$ som helst. Det enda som ändras är kravet att $a \geq 0$ byts ut mot att $a \geq c$ eller $c \geq b$ och att radien nu ges av $r = |x - c|$.

2 Tyngdpunkter

Låt oss fokusera på det plana fallet i 2 dimensioner. Generalisering till 3 dimensioner sker naturligt efter det med volym i stället för area (dA blir dV och så vidare). I det 2-dimensionella fallet inkluderar vi även fallet med kurvor och i det fallet behöver dA bytas ut mot bågelementet ds. Vi tänker oss också att densiteten är konstant lika med ett så att area (eller volym respektive kurvlängd) är det samma som massa.
Låt oss fokusera på situationen där ett område D beskrivs av

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x) \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b\}$$

där vi antar att $f(x) \leq g(x)$. Vidare tänker vi oss att gravitationen verkar i negativa y-axelns riktning. Vi markerar ett litet område mellan x och $x + \Delta x$ i figuren nedan.



Detta område ger upphov till ett vridande moment kring origo som approximativt har storleker $x(g(x)-f(x))\Delta x$. Massan för motsvarande område ges av $(g(x)-f(x))\Delta x$ (densiteten är ett) och vi vet från fysiken att tyngdpunkt ges av totalt moment delat på total massa. Det förefaller alltså rimligt att definiera området D:s tyngdpunkt x_t med avseende på y-axeln genom

$$x_t = \frac{\displaystyle\int_a^b x(g(x)-f(x))\,dx}{\displaystyle\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx} = \frac{\displaystyle\int_a^b x\,dA}{\displaystyle\int_a^b dA}$$

där dA är area-elementet $(f(x)-g(x))\,dx$. Vidare kan vi även använda detta element för att definiera D:s tyngdpunkt y_t med avseende på x-axeln:

$$y_t = \frac{\displaystyle\int_a^b y\,dA}{\displaystyle\int_a^b dA}.$$

Ofta behöver man här arbeta lite med dA för att uttrycka detta i y i stället för x när vi söker y_t. För enkla geometriska objekt är det ganska enkelt att se vart tyngdpunkten ligger. I en cirkel är det i mitten och samma sak gäller en rektangel. Hur går det med en triangel?

Exempel

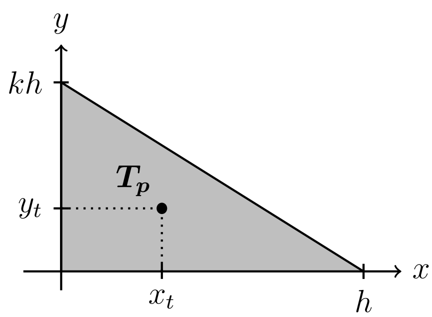
Finn tyngdpunkten $\mathbf{T_p}$ för en rätvinklig triangel.

Lösning. Betrakta en rätvinklig triangel där hypotenusan ges av $y=-kx+kh$, $0\le x\le h$ och $k>0$.

Tyngdpunkten x_t med avseende på y-axeln ges av

$$\frac{1}{A}\int_0^h x(-kx+kh)dx = \frac{kh^3}{6A},$$

där $A=\displaystyle\int_0^h(-kx+kh)dx=\frac{kh^2}{2}$, så $x_t=\dfrac{h}{3}$. På en tredjedel av höjden alltså.



Samma gäller så klart y_t (på en tredjedel av höjden i y-axelns riktning alltså) pga symmetriskäl. Men vi kan räkna ut det också om vi vill. Vi har

$$y_t = \frac{1}{A}\int_0^{kh} y\left(h - \frac{y}{k}\right) dy = \cdots = \frac{kh}{3},$$

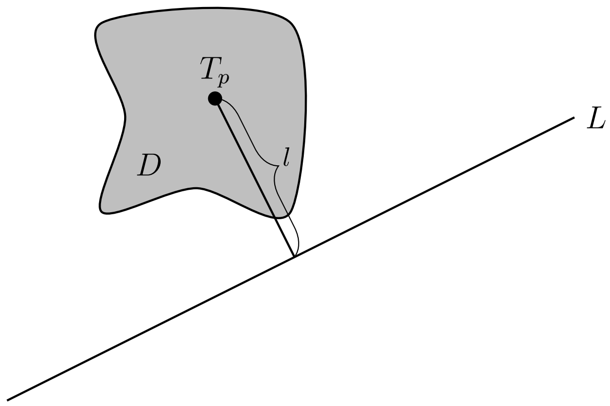
där vi skrivit om $dA = \big(h - y/k\big)\, dy$ med avseende på y.

3 Pappos-Guldins regler

Vi ska nu ställa upp kraftfulla regler för både rotationsvolymer och rotationsareor där vi utnyttjar tyngdpunkter. Problemet flyttas nu till att bestämma tyngdpunkten i stället för bökiga rotationsuppställningar. Därmed har vi inte sagt att det alltid är enklare att räkna ut tyngdpunkten, men vissa fall förenklas avsevärt med de tekniker vi nu går genom (speciellt kommer vi åt fallen med lutande rotationsaxlar).

3.1 Rotationsvolym

Vi låter D vara ett plant område som ligger helt på ena sidan av en linje L. Beteckna det vinkelräta avståndet mellan tyngdpunkten T_p och linjen L med l. Detta är alltså det kortaste avståndet mellan T_p och linjen L.



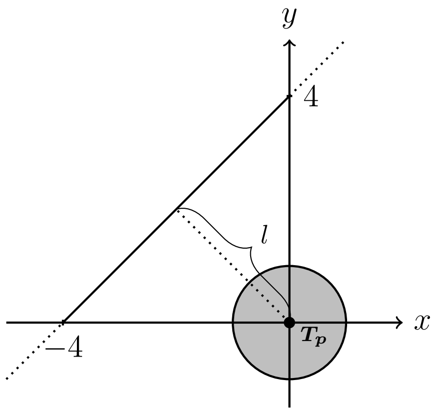
Om D roteras ett varv kring linjen L uppstår en rotationsvolym. Denna volym kan då beräknas med hjälp av Pappos-Guldins regel som säger att volymen som uppstår ges av arean för D gånger tyngdpunktens väg vid rotationen:

$$V = A(D) \cdot 2\pi l.$$

Exempel

Låt disken $x^2 + y^2 \leq 1$ rotera ett varv kring linjen $y = 4 + x$. Bestäm rotationsvolymen som uppstår.

Lösning. Diskens tyngdpunkt ligger i centrumpunkten som i detta fall är origo. Det kortaste avståndet från origo till tyngdpunkten blir $\sqrt{8}$ (betrakta triangeln med hörn i $(-4, 0)$, $(0, 4)$ och $(0, 0)$) samt cirkeln).

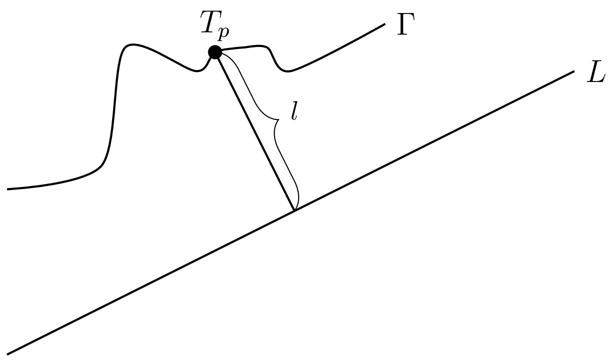


Tyngdpunktens väg blir alltså $2\pi\sqrt{8} = 4\pi\sqrt{2}$. Pappos-Guldin ger nu att den eftersökta volymen blir

$$V = \pi \cdot 4\pi\sqrt{2} = 4\pi^2\sqrt{2}.$$

3.2 Rotationsarea

Vi låter Γ vara en plan kurva som ligger helt på ena sidan av en linje L. Beteckna det vinkelräta avståndet mellan tyngdpunkten T_p för den plana kurvan och linjen L med l. Precis som tidigare är detta det kortaste avståndet mellan T_p och linjen L.



Om Γ roteras ett varv kring linjen L uppstår en rotationsarea. Denna area kan beräknas med hjälp av Pappos-Guldins regel som säger att arean som uppstår ges av kurvlängden s för Γ gånger tyngdpunktens väg vid rotationen:

$$A = s \cdot 2\pi l.$$

Observera att tyngdpunkten i allmänhet inte hamnar på tråden (den behöver inte hamna inne i området i det två-dimensionella fallet heller).

3.3 Pappos-Guldin lokalt och baklänges

Pappos-Guldins regler kan även med fördel användas lokalt. Med detta menar vi att de små area- och volymelement vi tidigare betraktat vid rotation kan användas tillsammans med de typer av summationsargument vi ägnat oss åt. Speciellt är detta lämpligt när man roterar kring lutande axlar, vilket vi återkommer till. Vi illustrerar med ett exempel (en gammal tentauppgift).

Exempel

Bestäm volymen som uppstår då det begränsade området mellan $y = 4x - x^2 + 1$ och $y = 1$ roterar ett varv kring $x = -2$.

Lösning. Kurvan $y = 4x - x^2 + 1$ skär $y = 1$ precis då

$$4x - x^2 + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(4 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ eller } x = 4.$$

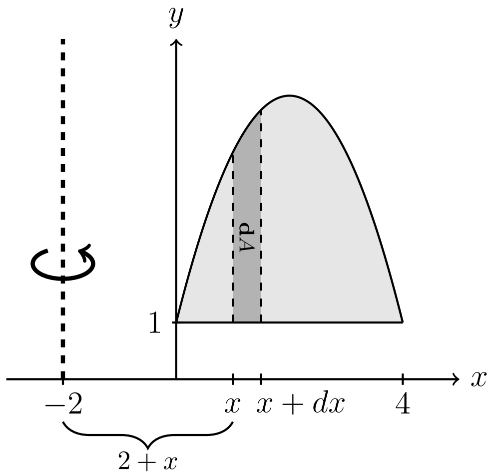
Det begränsade området ges därför av $1 \le y \le 4x - x^2 + 1$ och $0 \le x \le 4$.

För ett litet area-element dA vid x med tjocklek dx så ligger tyngdpunkten approximativt $2+x$ från rotationsaxeln vågrätt. Tyngdpunktens väg för dA blir således $2\pi(2+x)$. Vidare ges dA av en rektangel med höjden $4x - x^2 + 1 - 1$ och bredden dx, så $dA = (4x - x^2)dx$. Enligt Pappos-Guldins formel ges nu det lilla volymselementet dV av

$$dV = 2\pi(2 + x)dA = 2\pi(2 + x)(4x - x^2)dx$$

och därmed erhåller vi den eftersökta volymen genom att summera dessa volymselement:

$$V = \int_0^4 dV = 2\pi \left[4x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^4 = \frac{256\pi}{3}.$$



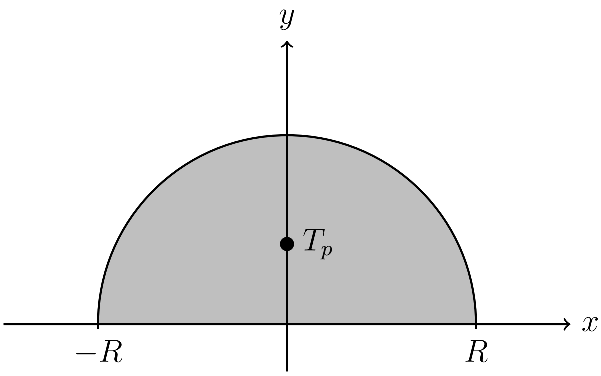
Självklart kan integralen även ställas upp direkt med hjälp av ”cylinderformeln.”

Faktum är att vi kan använda Pappos-Guldins regler ”baklänges” för att hitta tyngdpunkten för en kurva eller ett område i planet. Vi illustrerar med ett exempel.

Pappos-Guldin för att hitta T_p

Hitta tyngdpunkten för en halvdisk $x^2 + y^2 \le R^2$, $y \ge 0$.

Lösning. Tyngdpunkten med avseende på y-axeln ligger så klart i $x_t = 0$. Hur hittar vi tyngdpunkten y_t med avseende på x-axeln? Vi skissar lösningen och grafiskt borde y_t ligga lite lägre än mittpunkten på y-axeln.



Vi ser att arean av det plana området ges av $A = \dfrac{\pi R^2}{2}$ samt att om detta område roteras kring x-axeln uppstår en rotationsvolym $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$ eftersom detta är ett klot. Tyngdpunktens väg under rotationen är helt enkelt $2\pi y_t$. Pappos-Guldins regel implicerar nu att

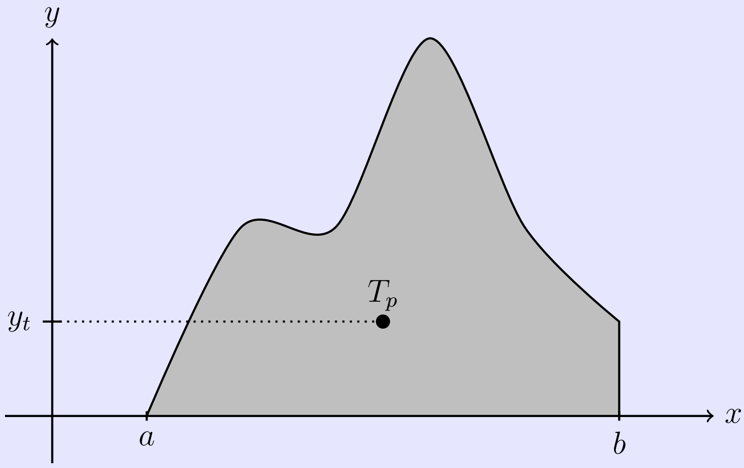
$$\frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi y_t = \frac{4\pi R^3}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y_t = \frac{4R}{3\pi}.$$

Tyngdpunkt för område givet som funktionsgraf

Exemplet ovan är ett specialfall av en mer generell situation då ett område ges som arean mellan en funktionskurva $y = f(x)$, x-axeln, $x = a$ och $x = b$ (förutsatt att $f \geq 0$). Man kan då visa att tyngdpunkten y_t ges av

$$y_t = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)^2\,dx}{2\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Detta följer från Pappos-Guldin. En principfigur kan se ut enligt nedan.



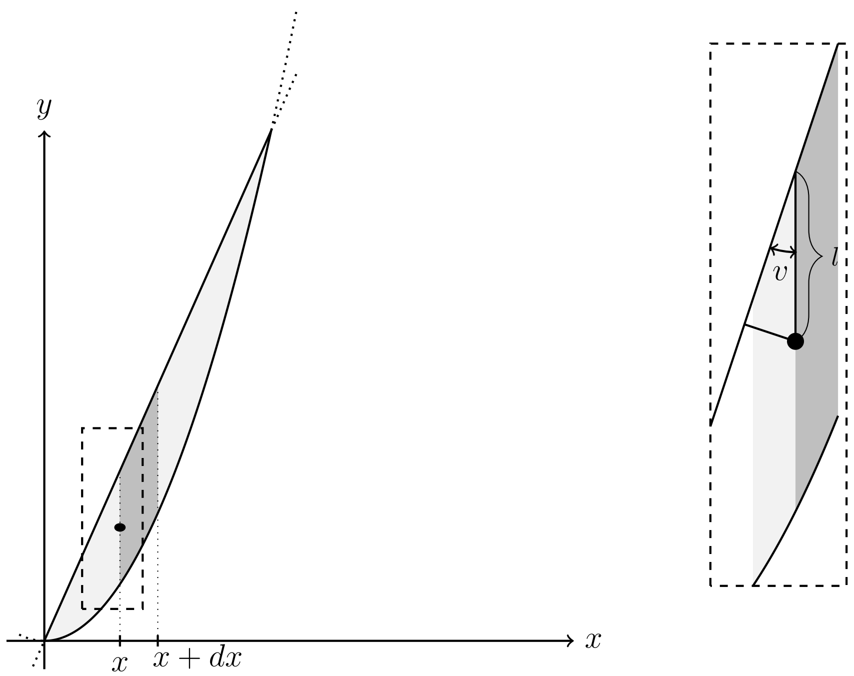
Arean ges då av $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ och om vi roterar området ett varv kring x-axeln uppstår en rotationsvolym som av skivformeln beräknas till $V = \pi \displaystyle\int_a^b f(x)^2\,dx$. Enligt Pappos-Guldins regler följer nu att $A \cdot 2\pi y_t = V$ ur vilket sambandet ovan kan lösas ut.

Vad skulle hända med motsvarande kalkyl för tyngdpunkten x_t och rotation kring y-axeln? Använda cylinderformeln och se vad som trillar ut. Bekant?

Lutande rotationsaxel

Räkna ut rotationsvolymen som uppstår när det begränsade området mellan kurvorna $y = 3x$ och $y = x^2$ roterar ett varv kring $y = 3x$.

Lösning. Rotationsaxeln är inte parallell med vare sig y- eller x-axeln, men vi kan komma åt problemet med hjälp av Pappos-Guldin. Kurvorna skär varandra i $x = 0$ och $x = 3$ så det är området $x^2 \le y \le 3x$, $0 \le x \le 3$, som ska rotera kring $y = 3x$. Vi skissar problemet.



Tyngdpunkten för det mörkare skuggade areaelementet ligger approximativt i $x_t = x$ och y_t som mitt mellan $y = 3x$ och $y = x^2$. Låt l vara halva lodräta avståndet mellan $y = 3x$ och $y = x^2$, dvs $l = \dfrac{3x - x^2}{2}$. Detta är alltså det lodräta avståndet mellan $y = 3x$ och tyngdpunkten. Vi söker dock det vinkelräta avståndet för att kunna använda Pappos-Guldins formler (det är detta avstånd som ger sträckan tyngdpunkten förflyttar sig vid rotation). Lite geometri visar att vinkeln v kan uttryckas som $v = \arctan \dfrac{1}{k}$ om lutningen för linjen är $k > 0$. Därmed blir det vinkelräta avståndet $l \sin v = \dfrac{l}{\sqrt{1+k^2}}$. Pappos-Guldins formel medför nu att rotationselementet dV kan ställas upp enligt

$$dV = 2\pi l \cdot dA = 2\pi l \cdot (3x - x^2)dx = \frac{\pi(3x - x^2)^2\,dx}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\pi(3x - x^2)^2\,dx}{\sqrt{10}}$$

eftersom $k = 3$ i vårt fall. Vi summerar våra dV och erhåller då volymen av rotationskroppen:

$$V = \int_0^3 dV = \frac{\pi}{\sqrt{10}} \int_0^3 \left(9x^2 - 6x^3 + x^4\right)\,dx = \frac{81\pi}{10\sqrt{10}} = \frac{81\pi\sqrt{10}}{100}.$$

4 Rotationsvolym och rotationsarea i polära koordinater

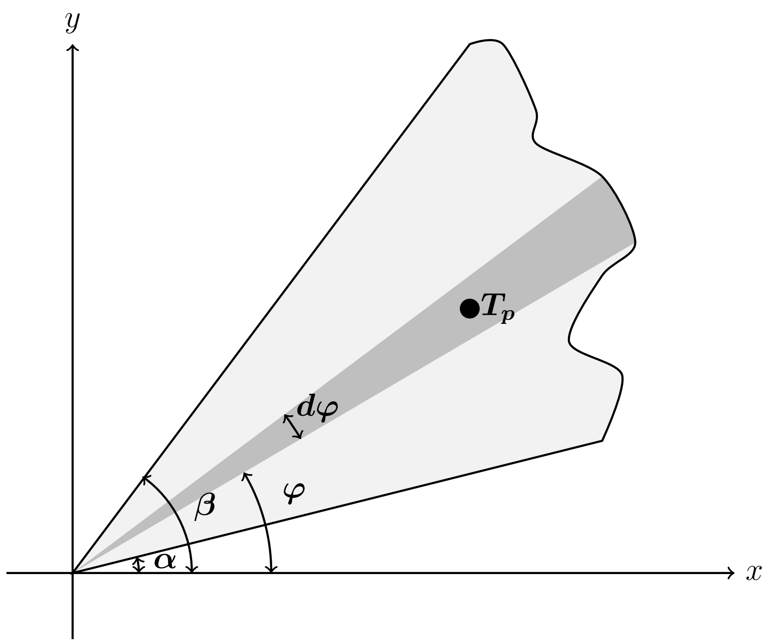
Låt $x = r\cos\varphi$ och $y = r\sin\varphi$ som vanligt när vi använder polära koordinater.

4.1 Rotationsvolym

Betrakta ett område

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le r \le h(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta\}$$

där $h(\varphi)$ är någon kontinuerlig funktion. Vi skissar hur situationen ser ut. Det mörkare området är en mindre del för en liten vinkel $d\varphi$ vid någon vinkel φ.



Arean för detta area-element ges approximativt av $\pi h(\varphi)^2 \dfrac{d\varphi}{2\pi} = \dfrac{h(\varphi)^2}{2} d\varphi$, och eftersom vi kan betrakta det lilla området som en triangel finns tyngdpunkten T_p på $2/3$ av sträckan från origo. Alltså blir det vinkelräta avståndet från x-axeln till T_p approximativt $\dfrac{2}{3} h(\varphi)\sin\varphi$ och den väg tyngdpunkten förflyttar sig blir således $\dfrac{4\pi}{3} h(\varphi)\sin\varphi$. Volymselementet dV som uppstår ges alltså av Pappos-Guldins formel enligt $dV = \dfrac{4\pi}{3} h(\varphi)\sin\varphi \cdot \dfrac{h(\varphi)^2}{2} d\varphi$ och vi kan summera för att erhålla följande uttryck.

Rotationsvolym på polär form

Sats. Om området D roteras ett varv kring x-axeln ges rotationsvolymen av

$$V(D) = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta h(\varphi)^3 \sin\varphi \, d\varphi.$$

Det är inte direkt meningen att ni ska memorera formlerna här utan mer kunna upprepa principen. Låt oss betrakta ett exempel.

Exempel

Området $0 \leq r \leq \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, roteras ett varv kring linjen $x = -1$. Bestäm volymen för kroppen som uppstår.

Lösning. Sträckan från tyngdpunkten för ett litet vinkelområde vid vinkel t till y-axeln ges som $\frac{2}{3}h(t)\cos t = \frac{2\cos^2 t}{3}$ och således blir sträckan som tyngdpunkten förflyttar sig vid rotation

$$2\pi\left(\frac{2}{3}\cos^2 t + 1\right)$$

Vi kan nu ställa upp ett volymselement enligt Pappos-Guldins formel:

$$dV = 2\pi\left(\frac{2}{3}\cos^2 t + 1\right)\cdot\frac{\cos^2 t}{2}\,dt.$$

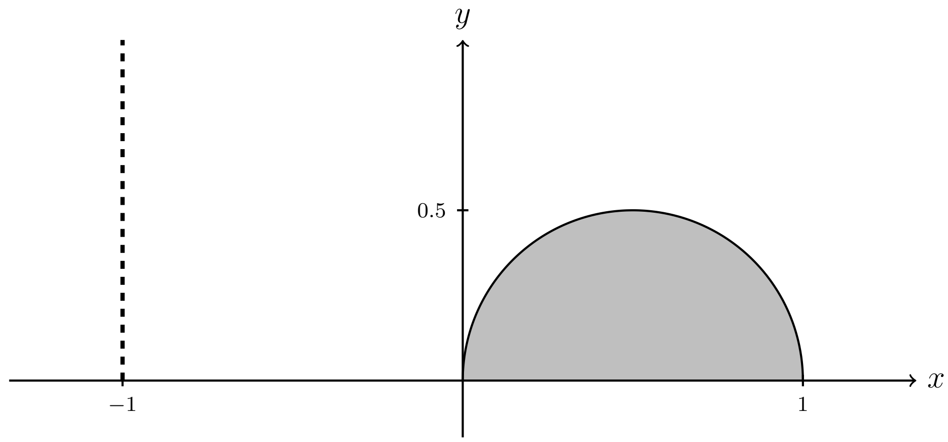
Här har vi utnyttjat att ett litet areaelement i polära koordinater kan skrivas $dA = \frac{h(t)^2}{2}\,dt$. Eftersom

$$\left(\frac{2}{3}\cos^2 t + 1\right)\cdot\frac{\cos^2 t}{2} = \left(\frac{1}{3}(1+\cos 2t) + 1\right)\cdot\frac{1+\cos 2t}{4} = \frac{3}{8} + \frac{5}{12}\cos 2t + \frac{1}{24}\cos 4t$$

följer det att

$$\int_0^{\pi/2} dV = 2\pi\int_0^{\pi/2}\left(\frac{3}{8} + \frac{5}{12}\cos 2t + \frac{1}{24}\cos 4t\right)dt = \frac{3\pi^2}{8}.$$

Låt oss även rita situationen.



En liten anmärkning. Området ser cirkulärt ut eller hur? Om $h(t) = \cos t$, $x = h(t)\cos t$ samt $y = h(t)\sin t$, ser vi att

$$x^2 + y^2 = \cos^4 t + \cos^2 t\sin^2 t = \cos^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = \cos^2 t = x,$$

så

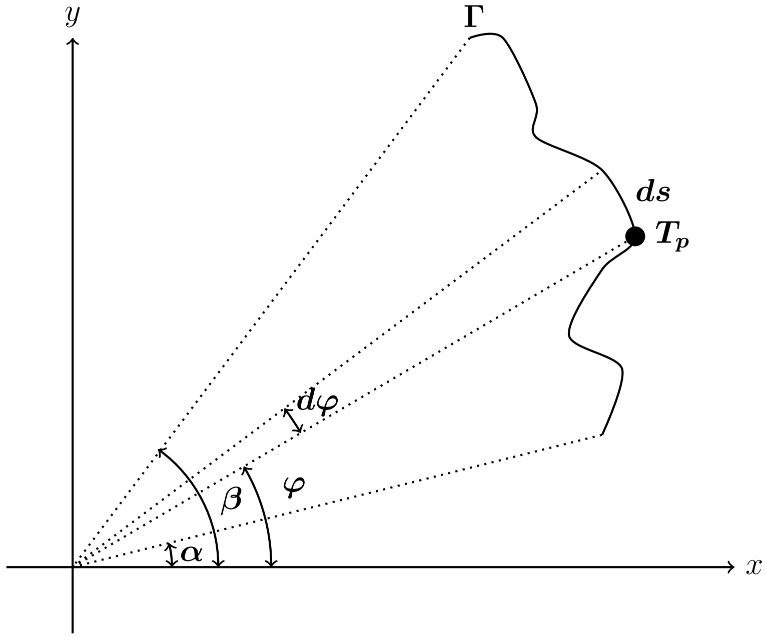
$$x^2 + y^2 = x \quad\Leftrightarrow\quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Alltså en cirkel med radie $1/2$ och centrum i $(1/2, 0)$. Då vet vi att arean av området är $\pi/8$ (halva disken) och att tyngdpunkten ligger vid $x_t = 1/2$. Alltså kan vi använda Pappos-Guldin på hela området direkt:

$$V = 2\pi\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi^2}{8}.$$

4.2 Rotationsarea

En kurva Γ ges av $r = h(\varphi)$ där $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ och $h(\varphi)$ är någon kontinuerligt deriverbar funktion roteras kring x-axeln. Det uppstår en rotationsarea och vi försöker skissa vad som händer.



Det lilla bågelementet ds ges som bekant av $ds = \sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2}d\varphi$ och eftersom tyngdpunkten approximativt ligger vid $r = h(\varphi)$, så erhåller vi att tyngdpunktens väg vid rotation kring x-axeln blir $2\pi h(\varphi)\sin\varphi$ (jämför med rotationsvolymsfallet ovan). Arean som uppstår ges alltså av Pappos-Guldins formel:

Rotationsarea på polär form

Sats. Om kurvan Γ roteras ett varv kring x-axeln uppstår rotationsarean

$$A(D) = 2\pi \int_\alpha^\beta h(\varphi)\sin\varphi\sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

Exempel

Visa att arean för ett klot med radie R ges av den bekanta formeln $A = 4\pi R^2$.

Lösning. Vi kan tänka oss kurvan som ges av $h(\varphi) = R$ för $0 \leq \varphi \leq \pi$ och låta den rotera ett varv kring x-axeln. Rotationsarean som uppstår ges då enligt ovan av

$$2\pi \int_0^\pi R\sin\varphi\sqrt{R^2 + 0^2}\, d\varphi = 2\pi R|R| \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi = 4\pi R^2,$$

eftersom $|R| = R$ då $R > 0$.