# ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА В ОБЛАСТИ С ПИКОМ И В ГЁЛЬДЕРОВОЙ ОБЛАСТИ

**В. Г. Мазья, С. В. Поборчий**

## § 1. Введение и формулировка основных результатов

Теорема Соболева о вложении пространства $W_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ была доказана С. Л. Соболевым [1, 2] и дополнена Э. Гальярдо [3] в предположении, что область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию конуса. Если $l$ – натуральное число, $1 \le p < \infty$ и $lp < n$, то показатель $q$ в упомянутой теореме принимает максимально возможное значение $q = np/(n - lp)$.

В. Г. Мазья [12] получил для области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ общего вида необходимое и достаточное условие непрерывности оператора вложения: $W_p^1(\Omega) \to L_q(\Omega)$ в терминах изопериметрических неравенств (при $p = 1$) или емкостных неравенств (при $p > 1$). В качестве приложения этих результатов было найдено максимальное значение $q$, при котором пространство $W_p^1(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$ для области со степенным пиком:

$$\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n : x_n \in (0,1),\ |x'| < \varphi(x_n)\}, \quad n \ge 2, \tag{1.1}$$

где $\varphi(t) = \mathrm{const} \cdot t^\lambda$, $\lambda > 1$. Это значение есть

$$q = (1 + \lambda(n-1))p/(1 + \lambda(n-1) - p) \quad \text{при} \quad 1 \le p < 1 + \lambda(n-1).$$

Теорема вложения $W_p^l(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ с соболевским предельным показателем была распространена на области более широкого класса, чем области с условием конуса: области с условием гибкого конуса (О. В. Бесов [4]), области с условием Джона (Ю. Г. Решетняк [6], Б. Боярский [7]). Выяснилось (С. Бакли и П. Коскела [8]), что области с условием Джона образуют в некотором смысле самый широкий класс областей, для которых верна теорема вложения с соболевским предельным показателем.

П. Хайлаш и П. Коскела [9] доказали теорему вложения $W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ для области, удовлетворяющей $\lambda$-условию Джона при $\lambda > 1$. В этой работе показатель $q$ максимален при $p = 1$ и “почти максимален” при $p > 1$. Максимально возможный показатель $q$ в этой теореме вложения при $p > 1$ был получен в работе Т. Кильпеляйнена и И. Малы [10]. О. В. Бесов [5] установил теорему вложения $W_p^l(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ для некоторого класса областей, содержащего области с $\lambda$-условием Джона. В частности, в [5] было показано, что для областей с $\lambda$-условием Джона, $\lambda > 1$, в случае $lp < \lambda(n-1) + 1$ упомянутое вложение имеет место для $q = np/(1+\lambda(n-1)-lp)$. Этот показатель, вообще говоря, неулучшаем (см. С. В. Поборчий [11], Д. А. Лабутин [22]).

Отметим, что область (1.1) удовлетворяет $\lambda$-условию Джона, тем не менее для нее предельный показатель $q$ превосходит показатель в теореме вложения для класса областей с $\lambda$-условием Джона. Области с внешними пиками – простейшие области, для которых нарушается теорема Соболева, часто встречающиеся в приложениях. Выяснение условий непрерывности операторов вложения: $W_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ (или $W_p^l(\Omega) \to C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$) для таких областей привлекало внимание многих исследователей. Д. А. Лабутин [20] доказал теорему вложения с максимальным предельным показателем для некоторого класса областей, которые, в частности, могут иметь внешние степенные заострения. Относительно аналогичных результатов для степенных пиков см. также книгу Р. А. Адамса [23] (Sec. 5.35, 5.36), работы И. Г. Глобенко [19], М. Фукушима и М. Томисаки [24]. Отметим в этой связи еще работу Д. А. Лабутина [21], где изучалась теорема вложения пространства Соболева в пространство $L_q$ для областей с гёльдеровыми границами.

В. Г. Мазья [13, 14], [15, 4.4, 5.1] получил, в частности, необходимые и достаточные условия непрерывности вложений пространства $W_p^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ и в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ для области (1.1) как следствия критериев непрерывности вложений в терминах емкостных изопериметрических неравенств. В случае непрерывной положительной выпуклой функции $\varphi$, $\varphi(0) = 0$, эти условия имеют вид

$$\sup_{z\in(0,1)} \left\{ \left(\int_0^z \varphi(t)^{n-1} dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^1 \varphi(t)^{\frac{n-1}{1-p}} dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \right\} < \infty$$

для существования непрерывного оператора вложения: $W_p^1(\Omega) \to L_q(\Omega)$ при $1 < p \le q < \infty$ и

$$\int_0^1 \varphi(t)^{\frac{n-1}{1-p}} dt < \infty$$

для непрерывности оператора вложения: $W_p^1(\Omega) \to C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$.

В работе авторов [17] (см. также книгу [18, 8.2, 8.3]) этот результат был обобщен на случай пространства $W_p^l(\Omega)$, $l \ge 1$, и области, имеющей на границе вершину внешнего пика, заострение которого описывается функцией $\varphi$. Однако при $l > 1$ на функцию $\varphi$ накладывалось дополнительное требование $c^{-1} \le \varphi(2t)/\varphi(t) \le c$, $c = \mathrm{const} > 0$. В настоящей работе это требование снимается.

Ниже мы даем точную формулировку полученных результатов. Предварительно введем некоторые обозначения.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ – точка в $n$-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ с нормой $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$. При $r > 0$ символ $B_r(x)$ означает открытый шар в $\mathbf{R}^n$ с центром $x$ и радиусом $r$. Далее $B_r = B_r(0)$. Будем также писать $B_r^{(n)}$, чтобы подчеркнуть размерность шара $B_r$.

Через $\mathbf{Z}^n_+$ обозначим подпространство $\mathbf{R}^n$, состоящее из векторов с целыми неотрицательными компонентами. Элемент $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^n_+$ называется мультииндексом, а число $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ – его длиной. Если $x \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$, то

$$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Положим

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha \in \mathbf{Z}^n_+.$$

Если $l$ – натуральное число, то вектор $\nabla_l u = \{D^\alpha u\}_{|\alpha|=l}$ называется градиентом функции $u$ порядка $l$. По определению $|\nabla_l u| = \left(\sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2\right)^{1/2}$.

Через $\mathcal{P}_l^{(n)}$ (или просто $\mathcal{P}_l$ для фиксированного $n$) обозначим класс полиномов в $\mathbf{R}^n$ степени не выше $l$, $l = 0, 1, \ldots$

Пусть $\Omega$ – область в $\mathbf{R}^n$ (т.е. открытое связное множество) и $l$ – неотрицательное целое число. Символ $C^l(\Omega)$ означает класс (вещественных) функций $u \in C(\Omega)$, имеющих производные $D^\alpha u \in C(\Omega)$ при $|\alpha| \le l$. Кроме того, множество бесконечно дифференцируемых в $\Omega$ функций обозначается через $C^\infty(\Omega)$. Далее $C_0^\infty(\Omega)$ – класс функций из $C^\infty(\Omega)$ с компактными носителями в $\Omega$. Пространство $C^l(\overline{\Omega})$ образовано теми функциями из $C^l(\Omega)$, все производные которых порядков $0, \ldots, l$ имеют непрерывные продолжения на $\overline{\Omega}$. Пространство сужений на $\Omega$ функций из $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ обозначается через $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Пусть $1 \le p \le \infty$. Пространство $L_p(\Omega)$ состоит из измеримых функций $u$, определенных на $\Omega$, для которых

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty, \quad p < \infty,$$

и

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \text{ess sup}\{|u(x)| : x \in \Omega\} < \infty.$$

Для краткости будем также писать $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ вместо $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$.

Через $L_{p,loc}(\Omega)$ обозначим класс измеримых функций на $\Omega$, которые суммируемы со степенью $p$ (или существенно ограничены при $p = \infty$) на каждом компактном подмножестве $\Omega$.

Пусть $\Omega$ – область в $\mathbf{R}^n$, $l = 1, 2, \ldots$ и $1 \le p \le \infty$. Пространство $L_p^l(\Omega)$ состоит из функций класса $L_{p,loc}(\Omega)$, обобщенный градиент которых порядка $l$ принадлежит $L_p(\Omega)$. По определению $W_p^l(\Omega) = L_p(\Omega) \cap L_p^l(\Omega)$. Пространство $W_p^l(\Omega)$ снабжается нормой

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} = \|u\|_{p,\Omega} + \|\nabla_l u\|_{p,\Omega}, \tag{1.2}$$

а пространство $L_p^l(\Omega)$ – нормой

$$\|u\|_{L_p^l(\Omega)} = \|u\|_{p,D} + \|\nabla_l u\|_{p,\Omega},$$

где $D$ – ограниченная внутренняя подобласть $\Omega$, т.е. $\overline{D} \subset \Omega$. Различные подобласти $D$ приводят к эквивалентным нормам [15, 1.1.13]. Мы принимаем соглашение $L_p^0(\Omega) = W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$.

Далее нам понадобятся некоторые классы областей. Будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию конуса, если каждая точка $\Omega$ является вершиной содержащегося в $\Omega$ замкнутого конуса, конгруэнтного конусу

$$\{x \in \mathbf{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \le a x_n^2,\ 0 \le x_n \le b\}, \quad a, b = \mathrm{const} > 0.$$

Ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ по определению принадлежит классу $C^{0,1}$, если каждая точка границы $\partial\Omega$ имеет такую окрестность $U$, что множество $U \cap \Omega$ может быть представлено неравенством $x_n < f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ в локальной декартовой системе координат, где $f$ – функция, определенная в некоторой области $G \subset \mathbf{R}^{n-1}$, удовлетворяющая в этой области условию Липшица.

Рассмотрим класс областей вида

$$\Omega = \{x = (y, z) \in \mathbf{R}^n : z \in (0,1),\ y/\varphi(z) \in \omega\}, \quad n \ge 2. \tag{1.3}$$

Относительно области $\omega \subset \mathbf{R}^{n-1}$ предположим, что она ограничена и удовлетворяет условию конуса, а функция $\varphi$ удовлетворяет условию Липшица на промежутке $[0,1]$, возрастает на этом промежутке, а также

$$\varphi(0) = \lim_{z \to +0} \varphi'(z) = 0.$$

Область вида (1.3) будем называть пиком в $\mathbf{R}^n$. Для определенности предполагаем, что $\omega$ лежит вместе с замыканием в шаре $B_1^{(n-1)}$.

Далее в § 5 будет описан еще один класс так нызываемых гёльдеровых областей.

Сформулируем основные результаты работы, касающиеся пика (1.3).

**Теорема 1.1.** *Пусть $\Omega$ – пик в $\mathbf{R}^n$, $l = 1, 2, \ldots$, $1 < p \le q < \infty$. Пространство $W_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$ тогда и только тогда, когда конечны величины $A_0$, $A_1$, где*

$$A_\gamma = \sup_{z \in (0,1)} A_\gamma(z), \tag{1.4}$$

$$A_\gamma(z) = \left( \int\limits_0^z (z-t)^{q(l-1)(1-\gamma)} \varphi(t)^{n-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int\limits_z^1 \varphi(t)^{\frac{n-1}{1-p}} (t-z)^{\frac{p(l-1)\gamma}{p-1}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

*Ограниченность оператора вложения: $W_1^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$, $1 \le q < \infty$, равносильна неравенству*

$$\sup_{z \in (0,1)} \varphi(z)^{1-n} \left( \int_0^z (z-t)^{(l-1)q} \varphi(t)^{n-1} dt \right)^{1/q} < \infty. \tag{1.5}$$

Критерий компактности вложения $W_p^l(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ выглядит следующим образом.

**Теорема 1.2.** *Предположим, что $1 < p \le q < \infty$, $l = 1, 2, \dots$ Тогда полная непрерывность оператора вложения: $W_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ для $n$-мерного пика $\Omega$ равносильна условиям*

$$\lim_{z\to+0} A_0(z) = \lim_{z\to+0} A_1(z) = 0, \tag{1.6}$$

*где величина $A_\gamma(z)$ определена в предыдущей теореме. При $1 \le q < \infty$ оператор вложения: $W_1^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ вполне непрерывен в том и только в том случае, если*

$$\lim_{z\to+0} \varphi(z)^{1-n} \left( \int_0^z (z-t)^{(l-1)q} \varphi(t)^{n-1} dt \right)^{1/q} = 0. \tag{1.7}$$

Формулируемое ниже утверждение вытекает из двух предшествующих.

**Следствие 1.1.** *Пусть $\varphi$ – функция, описывающая заострение $n$-мерного пика $\Omega$. Положим $\Phi(z) = \varphi(z)^{(n-1)(q^{-1}-p^{-1})} z^{l-p^{-1}+q^{-1}}$ при $1 \le p \le q < \infty$. Тогда условие*

$$\sup\{\Phi(z) : z \in (0,1)\} < \infty \tag{1.8}$$

*достаточно для непрерывности оператора вложения: $W_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$, а условие*

$$\lim_{z\to+0} \Phi(z) = 0 \tag{1.9}$$

*достаточно для его полной непрерывности. Условия* (1.8), (1.9) *и необходимы, если $\varphi(2z) \le \mathrm{const} \cdot \varphi(z)$, $z \in (0, 1/2)$.*

В следующем утверждении представлены необходимые и достаточные условия непрерывности и компактности оператора вложения: $W_p^l(\Omega) \to C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ для области с внешним пиком.

**Теорема 1.3.** *Если $p \in (1, \infty)$ и $l = 1, 2, \dots$, то непрерывность оператора вложения: $W_p^l(\Omega) \to C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ для $n$-мерного пика равносильна неравенству*

$$\int_0^1 \frac{z^{(l-1)p/(p-1)}}{\varphi(z)^{(n-1)/(p-1)}} dz < \infty. \tag{1.10}$$

*Указанный оператор вложения вполне непрерывен. Пространство $W_1^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup\{z^{l-1}\varphi(z)^{1-n} : z \in (0,1)\} < \infty, \tag{1.11}$$

*а для полной непрерывности этого оператора вложения необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{z\to+0} z^{l-1}\varphi(z)^{1-n} = 0. \tag{1.12}$$

*Если область $\omega$ в (1.3) принадлежит классу $C^{0,1}$, то в условиях теоремы непрерывен (или компактен) оператор вложения: $W_p^l(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$.*

В заключение параграфа приведем один пример, иллюстрирующий применение теорем 1.1 и 1.2.

**Пример.** Теорема Соболева утверждает, что для ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с условием конуса пространство $W_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$ при $q = np/(n - lp)$, если $lp < n$. При этом показатель $q$ наилучший, а оператор вложения: $W_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ не является вполне непрерывным. Мы сейчас убедимся, что для области, не удовлетворяющей условию конуса, предельный показатель $q$ в случае $lp < n$ может принимать любое значение из промежутка $(p, np/(n - lp))$, причем оператор вложения: $W_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ может быть вполне непрерывным. В самом деле, пусть $p \geq 1$, $lp < n$ и $q \in (p, np/(n - lp))$. Тогда существует ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, для которой

1) оператор вложения: $W_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ компактен;

2) пространство $W_p^l(\Omega)$ не вложено в $L_r(\Omega)$ при $r > q$.

Согласно теоремам 1.1 и 1.2 (см. также следствие 1.1) в качестве $\Omega$ можно выбрать пик (1.3), где

$$\varphi(z) = z^\lambda(1 - \log z), \quad \lambda = (l - 1/p + 1/q)/((n - 1)(1/p - 1/q)).$$

Следующие два параграфа носят вспомогательный характер. § 4 посвящен доказательству теорем 1.1–1.3. В том же § 4 рассмотрено приложение теоремы 1.1 к задаче Неймана для эллиптических уравнений порядка $2l$, $l \geq 1$. В § 5 формулируется теорема вложения пространства $W_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ и в $C(\overline{\Omega})$ для гёльдеровых областей.

## § 2. Неравенство Фридрихса в области с пиком и сглаживание функции, описывающей пик

Формулируемая ниже лемма играет важную роль в дальнейшем изложении.

**Лемма 2.1.** *Пусть $\Omega$ – пик в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что $u \in L_p^l(\Omega)$ и $u(y, z) = 0$ в окрестности $z = 1$. Тогда верна оценка*

$$\|u\|_{p,\Omega} \leq c\,\|\nabla_l u\|_{p,\Omega}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

*с константой, не зависящей от $u$.*

**Доказательство**. Поскольку существуют все промежуточные производные $D^\alpha u \in L_{p,loc}(\Omega)$, $|\alpha| = 0, \ldots, l - 1$ (см., например, В. Г. Мазья [15, 1.1.2]), то достаточно рассмотреть случай $l = 1$. Общий случай тогда легко выводится индукцией по $l$. Имеем

$$u(\varphi(z)\eta, z) = -\int_z^1 \frac{\partial}{\partial t}(u(\varphi(t)\eta, t)dt$$

при п.в. $\eta \in \omega$ и п.в. $z \in (0,1)$. Отсюда следует требуемое неравенство при $p = \infty$. Пусть $p < \infty$. Тогда

$$|u(\varphi(z)\eta, z)|^p \le c \int_z^1 |(\nabla u)(\varphi(t)\eta, t)|^p dt,$$

откуда

$$\|u\|^p_{p,\Omega} = \int_0^1 \varphi(z)^{n-1} dz \int_\omega |u(\varphi(z)\eta, z)|^p d\eta \le$$

$$\le c \int_0^1 \varphi(z)^{n-1} dz \int_z^1 dt \int_\omega |(\nabla u)(\varphi(t)\eta, t)|^p d\eta.$$

Правая часть последнего неравенства не превосходит

$$c \int_0^1 \varphi(t)^{n-1} dt \int_\omega |(\nabla u)(\varphi(t)\eta, t)|^p d\eta = c \, \|\nabla u\|^p_{p,\Omega},$$

чем и заканчивается доказательство леммы.

Из леммы 2.1 и теоремы Соболева об эквивалентных нормировках [2, § 9], [15, 1.1.15], вытекает такое утверждение.

**Следствие 2.1.** *Пространства $L^l_p(\Omega)$, $W^l_p(\Omega)$ и $\cap^l_{k=0} L^k_p(\Omega)$ совпадают для $n$-мерного пика $\Omega$ при всех $l = 1, 2, \ldots$ и $1 \le p \le \infty$. В частности, норма* (1.2) *эквивалентна норме $\sum_{|\alpha| \le l} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega}$ и любой норме вида $\|u\|_{p,G} + \|\nabla_l u\|_{p,\Omega}$, где $G$ – внутренняя подобласть $\Omega$, т.е. $\overline{G} \subset \Omega$.*

Пусть $\varphi$ – функция, описывающая заострение пика (1.3). Следующее утверждение позволяет заменить эту функцию при доказательстве теоремы вложения более гладкой и удовлетворяющей некоторым дополнительным требованиям.

**Лемма 2.2.** *Пусть функция $\varphi$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке* $[0,1]$, *возрастает на этом отрезке и, кроме того, $\varphi(0) = \lim_{z \to +0} \varphi'(z) = 0$. Тогда при любом натуральном $l$ существуют возрастающая функция $f \in C^l((0,1])$ и положительная константа $c$, зависящая лишь от $\varphi, l$, такие, что $\lim_{z \to +0} f(z) = \lim_{z \to +0} f'(z) = 0$,*

$$c^{-1} \varphi(z) \le f(z) \le c \, \varphi(z) \tag{2.1}$$

*и*

$$|f^{(k)}(z)| \le c \, f(z)^{1-k}, \quad k = 1, \ldots, l, \tag{2.2}$$

*для всех $z \in (0,1]$.*

**Доказательство.** Пусть $\psi \in C^l(\mathbf{R}^1)$, $\psi(t) = 0$ при $t \le 0$, $\psi(t) = 1$ при $t \ge 1$ и $\psi$ возрастает на промежутке $[0,1]$. Построим последовательность $\{z_i\}$ по правилу

$$z_0 = 1, \quad z_{i+1} + \varphi(z_{i+1}) = z_i, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Последовательность $\{z_i\}$ убывает, $z_i \to 0$, а, кроме того,

$$z_{i+1}^{-1} z_i \to 1, \quad \varphi(z_{i+1})^{-1}\varphi(z_i) \to 1.$$

Положим

$$\psi_0(z) = \psi((z-z_1)/(z_0-z_1)), \quad z \in (0,1],$$

а при $i = 1, 2, \dots$ определим функцию $\psi_i$ следующим образом:

$$\psi_i(z) = \begin{cases} \psi((z-z_{i+1})/(z_i-z_{i+1})), & \text{если} \quad z \in (0, z_i], \\ 1-\psi((z-z_i)/(z_{i-1}-z_i)), & \text{если} \quad z \in (z_i, 1]. \end{cases}$$

Тогда $0 \le \psi_i \le 1$, $\psi_i \in C^l((0,1])$ при $i \ge 0$, а также

$$\operatorname{supp}\psi_i = [z_{i+1}, z_{i-1}], \quad i \ge 1, \quad \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(z) = 1, \quad z \in (0,1].$$

Проверим, что требуемая функция $f$ может быть задана формулой

$$f(z) = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \varphi(z_i)\psi_i(z), \quad z \in (0,1].$$

В самом деле, очевидно включение $f \in C^l((0,1])$. Далее, если $z \in [z_{i+1}, z_i]$, $i \ge 0$, то $\psi_i(z) + \psi_{i+1}(z) = 1$, поэтому

$$f(z) = \varphi(z_i)\psi_i(z) + \varphi(z_{i+1})\psi_{i+1}(z) \in [\varphi(z_{i+1}), \varphi(z_i)],$$

следовательно,

$$\varphi(z_{i+1})/\varphi(z_i) \le f(z)/\varphi(z) \le \varphi(z_i)/\varphi(z_{i+1}), \quad z \in [z_{i+1}, z_i].$$

Таким образом, оценка (2.1) верна при $c = \sup\{\varphi(z_i)/\varphi(z_{i+1}) : i \ge 0\}$. В частности, $\lim_{z\to+0} f(z) = 0$.

Для проверки монотонности $f$ заметим, что

$$f(z) = \varphi(z_{i+1}) + (\varphi(z_i) - \varphi(z_{i+1}))\psi_i(z), \quad z \in [z_{i+1}, z_i], \quad i \ge 0.$$

Отсюда $f$ – возрастающая функция, так как $\psi_i$ возрастает на промежутке $[z_{i+1}, z_i]$. Кроме того, при $k = 1, \dots, l$ и $z \in [z_{i+1}, z_i]$ имеем

$$f^{(k)}(z) = \frac{\varphi(z_i) - \varphi(z_{i+1})}{(z_i - z_{i+1})^k}\, \psi^{(k)}\!\left(\frac{z - z_{i+1}}{z_i - z_{i+1}}\right),$$

откуда при тех же $z$ и $k$

$$|f^{(k)}(z)| \le c\,\varphi(z_{i+1})^{1-k} \operatorname{ess\,sup}\{\varphi'(t) : t \in (z_{i+1}, z_i)\}.$$

Последнее означает, что $\lim_{z\to+0} f'(z) = 0$ и выполнено условие (2.2). Лемма доказана.

## § 3. Оценки производных функции, сглаженной по части переменных

Здесь мы докажем одно вспомогательное утверждение, которое будет использовано при доказательстве теоремы 1.1. Предварительно сделаем замечание, вытекающее из теоремы об эквивалентных нормировках в пространствах Соболева.

**Замечание 3.1.** Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса. Предположим, что линейное непрерывное отображение $\Pi : W_p^l(D) \to \mathcal{P}_{l-1}$ является проектором, т.е. $\Pi^2 = \Pi$. Тогда для всех $u \in W_p^l(D)$ и $k = 0, \ldots, l-1$ верна оценка [2, § 9], [15, 1.1.15]

$$\|\nabla_k(u - \Pi u)\|_{p,D} \le c\, \|\nabla_l u\|_{p,D}, \quad k = 0, \ldots, l-1,$$

с константой, не зависящей от $u$. Последнее неравенство будем называть обобщенным неравенством Пуанкаре.

**Пример.** Приведем способ построения непрерывного проектора: $W_p^l(D) \to \mathcal{P}_{l-1}$, пригодный для любой области $D$. Пусть $K \in C_0^\infty(D)$,

$$\int K(x)dx = 1 \ \text{ и } \ \int K(x)x^\alpha dx = 0 \ \text{ для всех } \ \alpha \in \mathbf{Z}_+^n, \ \ 1 \le |\alpha| \le l-1.$$

Тогда непрерывный проектор $W_p^l(D) \ni u \mapsto \Pi u \in \mathcal{P}_{l-1}$ можно определить формулой

$$(\Pi u)(x) = \sum_{|\alpha|<l} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int_D (D^\alpha u)(y)K(y)dy = \sum_{|\alpha|<l} \frac{(-x)^\alpha}{\alpha!} \int_D u(y) D^\alpha K(y)dy.$$

Пусть $l$ – натуральное число. Предположим, что $f$ – возрастающая функция класса $C^l(0,1)$, такая, что $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$ и

$$|f^{(k)}(z)| \le \mathrm{const}\, f(z)^{1-k}, \quad k = 1, \ldots, l, \ \ z \in (0,1).$$

Введем функцию $K \in C_0^\infty(B_1^{(n-1)})$, для которой

$$\int K(y)y^\alpha dy = 0, \ \ \alpha \in \mathbf{Z}_+^{n-1}, \ \ 1 \le |\alpha| \le l-1. \tag{3.1}$$

Рассмотрим область

$$G = \{x = (y,z) \in \mathbf{R}^n : \ z \in (0,1), \ |y| < f(z)\}, \ \ n \ge 2,$$

и положим для $v \in L_p(G)$

$$(Tv)(z) = \int_{|\eta|<1} K(\eta) v(f(z)\eta, z)d\eta, \quad z \in (0,1). \tag{3.2}$$

Ниже через $c$ обозначаются различные положительные постоянные, зависящие только от $n, l, p, K, f$.

**Лемма 3.1.** *Пусть* $u \in W_p^l(G)$, $1 \le p \le \infty$. *Предположим, что* $\alpha$ – *мультииндекс из* $\mathbf{Z}_+^{n-1}$, $|\alpha| < l$. *Пусть* $D^\alpha u$ *означает производную функции* $u$ *по переменным* $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. *Тогда функция*

$$(0,1) \ni z \mapsto u_\alpha(z) = (T(D^\alpha u))(z)$$

*имеет производные* $u_\alpha^{(s)} \in L_{p,loc}(0,1)$ *для всех* $s = 0, \dots, l$. *Кроме того, при* $l - |\alpha| \le s \le l$ *и почти всех* $z \in (0,1)$ *верна оценка*

$$|u_\alpha^{(s)}(z)| \le c\, f(z)^{l-|\alpha|-s-(n-1)/p} U(z), \tag{3.3}$$

*где*

$$U(z) = \Big( \int_{|y|<f(z)} |(\nabla_l u)(y,z)|^p dy \Big)^{1/p}.$$

**Доказательство.** Положим

$$v_\alpha(z) = \int_{|\eta|<1} (D^\alpha K)(\eta) u(f(z)\eta, z) d\eta. \tag{3.4}$$

Тогда $u_\alpha(z) = (-f(z))^{-|\alpha|} v_\alpha(z)$. Поскольку каждая производная $v_\alpha^{(s)}$ при $s \le l$ может быть найдена дифференцированием подынтегральной функции в (3.4), то $u_\alpha \in W_p^l(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Доказательство оценки (3.3) начнем со случая $\alpha = 0$, $s = l$. Из (3.2) выводим

$$(Tu)^{(l)}(z) = \int_{|\eta|<1} K(\eta) \frac{\partial^l}{\partial z^l} [u(f(z)\eta, z)] d\eta.$$

Используя известные формулы (см. В. Г. Мазья [15, с. 21], Л. Е. Френкель [25]) дифференцирования суперпозиции, получим

$$\frac{\partial^l}{\partial z^l}[u(f(z)\eta, z)] = \frac{\partial^l u}{\partial z^l}(y,z)|_{y=f(z)\eta} +$$

$$+ \sum_{1 \le |\beta| \le l} (D^\beta u)(f(z)\eta, z) \eta^{\overline{\beta}} \sum_{\kappa,\lambda} c_{\kappa,\lambda} (f^{(\kappa_1)}(z))^{\lambda_1} \dots (f^{(\kappa_m)}(z))^{\lambda_m},$$

где суммирование производится по всем $\beta = (\overline{\beta}, \beta_n) \in \mathbf{Z}_+^n$ и $\kappa, \lambda \in \mathbf{Z}_+^m$, таким, что $|\overline{\beta}| > 0$,

$$\textstyle\sum_{i=1}^m \lambda_i = |\overline{\beta}|, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i \kappa_i = l - \beta_n; \quad \lambda_i, \kappa_i \ge 1, \ \ i = 1, \dots, m,$$

а $c_{\kappa,\lambda}$ – числовые коэффициенты. Поскольку $|f^{(\kappa_i)}(z)| \le c\, f(z)^{1-\kappa_i}$, то модуль общего члена в сумме по $\kappa, \lambda$ не превосходит $c\, f(z)^{|\beta|-l}$. Таким образом, мы приходим к представлению

$$(Tu)^{(l)}(z) = \textstyle\sum_{1 \le |\beta| \le l} \psi_\beta(z) I_\beta(z), \quad z \in (0,1), \tag{3.5}$$

в котором $\beta = (\overline{\beta}, \beta_n) \in \mathbf{Z}_+^n$, $|\overline{\beta}| > 0$ при $|\beta| < l$,

$$I_\beta(z) = \int_{|\eta|<1} K(\eta)\eta^{\overline{\beta}}(D^\beta u)(f(z)\eta, z)d\eta \tag{3.6}$$

и $\psi_\beta$ – измеримые функции на $(0,1)$, удовлетворяющие условию

$$|\psi_\beta(z)| \le c\, f(z)^{|\beta|-l}, \quad 1 \le |\beta| \le l. \tag{3.7}$$

Допустим, что $|\beta| < l$ и положим $v(\eta, z) = (D^\beta u)(f(z)\eta, z)$. Зафиксируем $z \in (0,1)$ и обозначим через $Q$ произвольный полином из $\mathcal{P}^{(n-1)}_{l-|\beta|-1}$. Принимая во внимание (3.1), получаем

$$|I_\beta(z)| = \left| \int_{|\eta|<1} K(\eta)\eta^{\overline{\beta}}(v(\eta, z) - Q(\eta))d\eta \right| \le$$

$$\le c \inf_Q \|v(\cdot, z) - Q\|_{p,B_1}. \tag{3.8}$$

В силу замечания 3.1 правая часть в (3.8) не больше, чем

$$c\,\|(\nabla'_{l-|\beta|}v)(\cdot, z)\|_{p,B_1},$$

где $(\nabla'_{l-|\beta|}v)(\eta, z)$ – градиент порядка $l - |\beta|$ по переменным $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$. Замена $\eta = y/f(z)$ дает

$$|I_\beta(z)| \le c\, f(z)^{(1-n)/p+l-|\beta|}U(z). \tag{3.9}$$

Оценка (3.9) верна и при $|\beta| = l$. Здесь (3.9) следует из (3.6) с помощью неравенства Гёльдера. Объединяя (3.5), (3.7) и (3.9), приходим к оценке

$$|(Tu)^{(l)}(z)| \le c\, f(z)^{(1-n)/p}U(z). \tag{3.10}$$

Таким образом, неравенство (3) установлено при $s = l$ и $\alpha = 0$. Заменяя $u$ на $D^\alpha u$ и $l$ на $l - |\alpha|$ в (3.10), мы получим (3.3) также в случае $0 \le |\alpha| < l$ и $s = l - |\alpha|$.

*Случай* $l \ge s > l - |\alpha|$, $|\alpha| > 0$. Следующее представление выводится аналогично (3.5):

$$u_\alpha^{(s)}(z) = \sum_{1 \le |\beta| \le l-|\alpha|} \varphi_\beta(z) \int_{|\eta|<1} K(\eta)\eta^{\overline{\beta}}(D^\mu u)(f(z)\eta, z)d\eta +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s+|\alpha|-l} \sum_{|\gamma|=l-|\alpha|} \sigma_{i,\gamma}(z)\, \frac{d^i}{dz^i} \int_{|\eta|<1} K_\gamma(\eta)(D^\nu u)(f(z)\eta, z)d\eta. \tag{3.11}$$

Здесь

$$\beta = (\overline{\beta}, \beta_n) \in \mathbf{Z}_+^n, \quad \mu = (\alpha + \overline{\beta}, \beta_n),$$

$$\gamma = (\overline{\gamma}, \gamma_n) \in \mathbf{Z}_+^n, \quad \nu = (\alpha + \overline{\gamma}, \gamma_n),$$

а функции $\varphi_\beta, \sigma_{i,\gamma}$ определены на $(0,1)$, измеримы и удовлетворяют условиям

$$|\varphi_\beta(z)| \le c\, f(z)^{|\beta|-s}, \quad |\sigma_{i,\gamma}(z)| \le c\, f(z)^{i+|\gamma|-s}.$$

Кроме того, $|\overline{\beta}| > 0$, если $|\beta| < l - |\alpha|$, а $K_\gamma \in C_0^\infty(B_1^{(n-1)})$ – некоторые стандартные функции. В силу (3.1) имеем

$$\int K(\eta)\eta^{\overline{\beta}}Q(\eta)d\eta = 0, \text{ если } \quad |\beta| < l - |\alpha|, \;\; Q \in \mathcal{P}^{(n-1)}_{l-|\mu|-1},$$

и модуль интеграла в сумме по $\beta$ в (3.11) мажорируется с помощью обобщенного неравенства Пуанкаре так же, как оценка (3.9) была получена из (3.8). Таким образом, модуль общего члена в этой сумме не превосходит правой части (3.3).

Обратимся к оценке двойной суммы в (3.11). Обозначим через $I_{\alpha,\gamma}(z)$ последний интеграл в (3.11). Запишем его в виде

$$I_{\alpha,\gamma}(z) = (\,-f(z))^{-|\alpha|}S_{\alpha,\gamma}(z),$$

где

$$S_{\alpha,\gamma}(z) = \int_{|\eta|<1} K_{\alpha,\gamma}(\eta)(D^\gamma u)(f(z)\eta, z)d\eta \tag{3.12}$$

и $K_{\alpha,\gamma}(\eta) = (D^\alpha K_\gamma)(\eta)$. Следовательно,

$$\Big|\frac{d^i}{dz^i}I_{\alpha,\gamma}(z)\Big| \le c\, \sum\nolimits_{j=0}^{i}\Big|\frac{d^{i-j}}{dz^{i-j}}\Big(f(z)^{-|\alpha|}\Big)\,\frac{d^j}{dz^j}S_{\alpha,\gamma}(z)\Big|.$$

Модуль первого сомножителя в общем члене последней суммы не превосходит $c\,f(z)^{j-i-|\alpha|}$. Отсюда

$$\Big|\sigma_{i,\gamma}(z)\frac{d^i}{dz^i}\; I_{\alpha,\gamma}(z)\Big| \le c\, \sum\nolimits_{j=0}^{i} f(z)^{|\gamma|-s-|\alpha|+j}\Big|\frac{d^j}{dz^j}\; S_{\alpha,\gamma}(z)\Big|. \tag{3.13}$$

Оценим второй сомножитель в общем члене суммы. Рассмотрим сначала случай $j = 0$. Так как $\int K_{\alpha,\gamma}Qd\eta = 0$ для всех $Q \in \mathcal{P}^{(n-1)}_{|\alpha|-1}$, то

$$|S_{\alpha,\gamma}(z)| \le c\, \inf_Q \|w(\cdot, z) - Q\|_{p,B_1^{(n-1)}},$$

где $w(\eta, z) = (D^\gamma u)(f(z)\eta, z)$. Используем замечание 3.1, а затем сделаем замену переменной $\eta = y/f(z)$. В результате придем к оценке

$$|S_{\alpha,\gamma}(z)| \le c\, f(z)^{|\alpha|+(1-n)/p}U(z). \tag{3.14}$$

Таким образом, слагаемое в правой части (3.13), соответствующее $j = 0$, не больше правой части в (3.3).

Пусть $1 \le j \le i$. Тогда $j + |\gamma| \le s \le l$, и производную порядка $j$ функции $S_{\alpha,\gamma}(z)$ можно получить дифференцированием подынтегральной функции в (3.12). Выполняя дифференцирование, найдем, что

$$\frac{d^j}{dz^j}\, S_{\alpha,\gamma}(z) = \sum\nolimits_{1 \le |\delta| \le j} g_\delta(z) J_\delta(z).$$

Здесь $\delta = (\overline{\delta}, \delta_n) \in \mathbf{Z}^n_+$,

$$J_\delta(z) = \int_{|\eta|<1} K_{\alpha,\gamma}(\eta) \eta^{\overline{\delta}} (D^{\delta+\gamma} u)(f(z)\eta, z) d\eta$$

и $|g_\delta(z)| \le c\, f(z)^{|\delta|-j}$. Заметим, что при условии $|\delta| < |\alpha|$ функция

$$B_1^{(n-1)} \ni \eta \mapsto \eta^{\overline{\delta}} K_{\alpha,\gamma}(\eta)$$

имеет нулевые моменты до порядка $|\alpha| - |\delta| - 1$ включительно. Отсюда

$$|J_\delta(z)| \le c \inf \left\{ \|w(\cdot, z) - Q\|_{p, B_1^{(n-1)}} : Q \in \mathcal{P}^{(n-1)}_{|\alpha|-|\delta|-1} \right\},$$

где $w(\eta, z) = (D^{\delta+\gamma} u)(f(z)\eta, z)$. Так как $w(\cdot, z) \in W_p^{|\alpha|-|\delta|}(B_1^{(n-1)})$ при п.в. $z \in (0, 1)$, то применимо обобщенное неравенство Пуанкаре. Следовательно, последний инфимум мажорируется величиной

$$c\, \|(\nabla'_{|\alpha|-|\delta|} w)(\cdot, z)\|_{p, B_1^{(n-1)}},$$

в которой $\nabla'_{|\alpha|-|\delta|}$ означает градиент по первым $n-1$ переменным. Принимая во внимание, что $|\alpha| = l - |\gamma|$, получаем

$$|g_\delta(z) J_\delta(z)| \le c\, f(z)^{|\alpha|-j+(1-n)/p} U(z). \tag{3.15}$$

Если $|\alpha| = |\delta|$, то $|\delta + \gamma| = l$, и величина $|J_\delta(z)|$ оценивается с помощью неравенства Гёльдера. Здесь опять имеет место (3.15). Из оценок (3.13)–(3.15) следует, что модуль общего члена двойной суммы в (3.11) не превосходит правой части в (3.3). Доказательство леммы закончено.

## § 4. Доказательство теорем 1.1 – 1.3

Для доказательства теоремы 1.1 нам понадобятся два известных факта. Первый – это теорема о продолжении функций из пика (1.3) в круговой пик с сохранением класса $W_p^l$ (см. [16], [18, 5.4.1]). Сформулируем этот результат.

**Лемма 4.1.** *Пусть* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *– пик вида* (1.3), *где* $\omega$ *– область класса* $C^{0,1}$. *При* $M \ge 1$ *положим*

$$G = \{x = (y, z) \in \mathbf{R}^n : |y| < M\varphi(z),\ z \in (0, 1)\}.$$

*Тогда для любых $1 \le p \le \infty$ и $l = 1, 2, \ldots$ существует линейный непрерывный оператор $E : W_p^l(\Omega) \to W_p^l(G)$, который является оператором продолжения, т.е. $Eu|_\Omega = u$ для всех $u \in W_p^l(\Omega)$.*

Второй факт – это двухвесовое неравенство Харди для производных высокого порядка на интервалах числовой оси. Следующий результат принадлежит В. Д. Степанову [26].

**Лемма 4.2.** *Пусть $-\infty \le a < b \le \infty$, $1 < p \le q < \infty$ и $l \ge 1$. Для существования такой постоянной $C$, не зависящей от $f$, что*

$$\left(\int\limits_a^b \left|w(x)\int\limits_x^b (t-x)^{l-1} f(t)dt\right|^q dx\right)^{1/q} \le C\left(\int\limits_a^b |v(x)f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \qquad (4.1)$$

*необходимо и достаточно, чтобы были конечными величины $A_0, A_1$, где*

$$A_\gamma = \sup_{z\in(a,b)} A_\gamma(z,a,b),$$

$$A_\gamma(z,a,b) = \left(\int\limits_a^z (z-t)^{q(l-1)(1-\gamma)}|w(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_z^b (t-z)^{\frac{p(l-1)\gamma}{p-1}}|v(t)|^{\frac{p}{1-p}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

*Более того, если $C$ – наилучшая постоянная в (4.1), то*

$$\max\{A_0, A_1\} \le C \le c\,(p,q,l)\,\max\{A_0,A_1\}.$$

*При этом оператор $L_{p,v}(a,b) \ni f \mapsto g \in L_{q,w}(a,b)$, действующий из пространства $L_{p,v}(a,b)$ с нормой $\|f\|_{L_{p,v}(a,b)} = \|fv\|_{L_p(a,b)}$ в пространство $L_{q,w}(a,b)$ с нормой $\|g\|_{L_{q,w}(a,b)} = \|gw\|_{L_q(a,b)}$ по формуле*

$$g(x) = \int_x^b (t-x)^{l-1} f(t)dt,$$

*вполне непрерывен тогда и только тогда, когда вместе с конечностью величин $A_0, A_1$ выполнены равенства*

$$\lim_{z\to a} A_\gamma(z,a,b) = \lim_{z\to b} A_\gamma(z,a,b) = 0, \quad \gamma \in \{0;1\}.$$

*При $p = 1 \le q < \infty$ неравенство (4.1) верно с наилучшей постоянной*

$$C = \sup_{z\in(a,b)} |v(z)|^{-1}\left(\int_a^z (z-t)^{q(l-1)}|w(t)|^q dt\right)^{1/q},$$

*а при $q = \infty$, $p > 1$ – с наилучшей постоянной*

$$C = \sup_{z\in(a,b)} |w(z)|\left(\int_z^b (t-z)^{(l-1)p/(p-1)}|v(t)|^{-p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p}.$$

Далее через $c$ обозначаются положительные константы, зависящие лишь от $n, p, q, l, \omega, \varphi$. По определению $a \sim b$, если $c^{-1} \le a/b \le c$.

**Доказательство теоремы 1.1.** *Необходимость неравенств* (1.5) и

$$\max\{A_0, A_1\} < \infty.$$

Пусть пространство $W_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$. Подставим в неравенство

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \le c\,\|u\|_{W_p^l(\Omega)} \tag{4.2}$$

функцию

$$\Omega \ni x = (y, z) \mapsto u(x) = \int_z^1 (t-z)^{l-1} f(t)dt,$$

где $f \in L_{p,loc}(0,1)$. Ввиду леммы 2.1 для таких $u$ оценка (4.2) равносильна двухвесовому неравенству

$$\left(\int_0^1 \varphi(z)^{n-1}dz \left|\int_z^1 (t-z)^{l-1} f(t)dt\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le c\left(\int_0^1 |f(z)|^p \varphi(z)^{n-1}dz\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь (1.5) (при $p = 1$) и конечность величин $A_0$, $A_1$, определенных в (1.4) (при $p > 1$), вытекают из леммы 4.2.

*Достаточность.* Пусть $p > 1$ и величины (1.4) конечны при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$. Покажем, что оценка (4.2) верна для всех $u \in W_p^l(\Omega)$.

Известно (см, например, [15, 1.1.9], [18, 1.3.2, 1.3.3]), что область $\omega$ в (1.3) представляется объединением конечного числа областей класса $C^{0,1}$. Поскольку для каждой такой области верна лемма 4.1 о продолжении в круговой пик с сохранением класса, то можно считать, что область $\Omega$ в (1.3) является круговым пиком, т.е. $\omega = B_1^{(n-1)}$. Кроме того, ввиду леммы 2.2 можно предполагать, что функция $\varphi$ в (1.3) удовлетворяет дополнительным требованиям

$$\varphi \in C^l((0,1]), \;\; |\varphi^{(k)}(z)| \le c\,\varphi(z)^{1-k}, \;\; k = 1, \dots, l, \;\; z \in (0,1). \tag{4.3}$$

Зафиксируем $\delta \in (0,1)$ и допустим, что $u \in W_p^l(\Omega)$, $u(x) = 0$ при $z > \delta$. Мы покажем, что в этом случае верна оценка

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \le c\,A(\delta)\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{4.4}$$

где

$$A(\delta) = \max_{\gamma \in \{0;1\}} \sup_{z \in (0,\delta)} A_\gamma(z, \delta), \tag{4.5}$$

$$A_\gamma(z,\delta) = \left(\int_0^z (z-t)^{q(l-1)(1-\gamma)} \varphi(t)^{n-1}dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^\delta \varphi(t)^{\frac{n-1}{1-p}} (t-z)^{\frac{p(l-1)\gamma}{p-1}} dt\right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{4.6}$$

Заметим, что из конечности величин $A_0, A_1$ вытекает ограниченность $A(\delta)$ при $\delta \in (0,1]$, так как величина $A_\gamma$ в (1.4) мажорирует величину (4.6). Далее нам понадобится оценка

$$A(\delta) \geq c\,\varphi(\delta)^{l-n/p+n/q}, \tag{4.7}$$

из которой, в частности, следует, что $l - n/p + n/q \geq 0$ (так как левая часть (4.7) ограничена) и, значит, показатель $q$ не превосходит предельного соболевского. Достаточно проверить (4.7) при малых $\delta > 0$. Для таких $\delta$, принимая во внимание (4.5), (4.6), имеем

$$A(\delta) \geq A_1(\delta - \varphi(\delta), \delta) \geq$$

$$\geq \left( \int\limits_{\delta-2\varphi(\delta)}^{\delta-\varphi(\delta)} \varphi(t)^{n-1} dt \right)^{1/q} \left( \int\limits_{\delta-\varphi(\delta)}^{\delta} \varphi(t)^{\frac{n-1}{1-p}} (t - \delta + \varphi(\delta))^{(l-1)p'} dt \right)^{1/p'}.$$

Так как $\varphi(\delta + O(\varphi(\delta))) = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta))$, то правая часть последнего неравенства не меньше

$$c\,\varphi(\delta)^{n/q} \varphi(\delta)^{(1-n)/p} \left( \int_0^{\varphi(\delta)} t^{(l-1)p'} dt \right)^{1/p'},$$

что не меньше правой части (4.7). Итак, (4.7) имеет место.

Отметим, что из справедливости (4.4) для функций, равных нулю при $z > \delta$ вытекает (4.2) для всех $u \in W_p^l(\Omega)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что для $\varepsilon \in (0,1)$ "срезанный пик" $\Omega^{(\varepsilon)} = \{x \in \Omega : z > \varepsilon\}$ принадлежит классу $C^{0,1}$, следовательно, $W_p^l(\Omega^{(\varepsilon)})$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega^{(\varepsilon)})$ по теореме Соболева (последняя верна, т.к. $l - n/p + n/q \geq 0$).

Пусть $K \in C_0^\infty(B_1^{(n-1)})$, выполнены условия (3.1), а также $\int K(y)dy = 1$. Для $\alpha \in \mathbf{Z}_+^{n-1}$, $|\alpha| < l$ положим

$$u_\alpha(z) = \varphi(z)^{1-n} \int_{|y|<\varphi(z)} K(y/\varphi(z))(D_y^\alpha u)(y,z)dy, \quad z \in (0,1),$$

и определим "полином"

$$Q(x) = \sum\nolimits_{|\alpha|<l} u_\alpha(z) y^\alpha / \alpha!, \quad x = (y,z) \in \Omega.$$

Наша цель – установить оценки

$$\|Q\|_{L_q(\Omega)} \leq c\,A(\delta) \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{4.8}$$

$$\|u - Q\|_{L_q(\Omega)} \leq c\,A(\delta) \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{4.9}$$

из которых, очевидно, следует (4.4) и тем самым утверждение достаточности теоремы.

*Доказательство неравенства* (4.8). Пусть

$$Q_\alpha(x) = u_\alpha(z) y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{Z}_+^{n-1},\ |\alpha| < l.$$

Поскольку $u_\alpha(z) = 0$ при $z > \delta$ и существует $u_\alpha^{(l)} \in L_{p,loc}(0,1)$, (см. лемму 3.1), то

$$u_\alpha(z) = \frac{(-1)^l}{(l-1)!} \int_z^\delta (t-z)^{l-1} u_\alpha^{(l)}(t)\,dt \tag{4.10}$$

при п.в. $z \in (0,\delta)$. Имеем

$$\|Q_\alpha\|_{L_q(\Omega)} \le c \left( \int_0^\delta \varphi(z)^{q|\alpha|+n-1} |u_\alpha(z)|^q dz \right)^{1/q}. \tag{4.11}$$

Оценим правую часть последнего неравенства. Для этого заметим, что ввиду (4.10) и леммы 4.2 наилучшая константа $C(\delta)$ в неравенстве

$$\left( \int_0^\delta \varphi(z)^{q|\alpha|+n-1} |u_\alpha(z)|^q dz \right)^{1/q} \le C(\delta) \left( \int_0^\delta \varphi(z)^{p|\alpha|+n-1} |u_\alpha^{(l)}(z)|^p dz \right)^{1/p} \tag{4.12}$$

удовлетворяет соотношению

$$C(\delta) \sim \max_{\gamma \in \{0;1\}} \sup_{z \in (0,\delta)} \left\{ \left( \int_0^z (z-t)^{q(l-1)(1-\gamma)} \varphi(t)^{n-1+q|\alpha|} dt \right)^{1/q} \times \right.$$

$$\left. \times \left( \int_z^\delta \varphi(\tau)^{(n-1+p|\alpha|)/(1-p)} (\tau - z)^{p'(l-1)\gamma} d\tau \right)^{1/p'} \right\}, \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

В силу монотонности $\varphi$ произведение двух последних интегралов в фигурных скобках не превосходит величины (4.6), поэтому оценка (4.12) выполнена при $C(\delta) = c\,A(\delta)$. Далее, согласно лемме 3.1

$$\varphi(z)^{p|\alpha|+n-1} |u_\alpha^{(l)}(z)|^p \le c \int_{|y|<\varphi(z)} |(\nabla_l u)(y,z)|^p dy$$

при п.в. $z \in (0,1)$, следовательно, правая часть (4.12) не больше правой части (4.8). Итак, для всех $\alpha \in \mathbf{Z}_+^{n-1}$, $|\alpha| < l$, левая часть (4.11) мажорируется величиной $c\,A(\delta)\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}$. Тем самым оценка (4.8) доказана.

*Доказательство неравенства* (4.9). Определим последовательность $\{z_k\}_{k\ge 0}$ следующим образом:

$$z_0 = \delta, \;\; z_{k+1} + \varphi(z_{k+1}) = z_k, \;\; k \ge 0.$$

Тогда

$$z_k \searrow 0, \;\; z_{k+1} z_k^{-1} \to 1, \;\; \varphi(z_{k+1})\varphi(z_k)^{-1} \to 1.$$

Рассмотрим ячейки

$$\Omega_k = \{x : z \in (z_{k+1}, z_k),\;\; |y| < \varphi(z)\},\;\; k \ge 0.$$

Поскольку $\Omega_k \in C^{0,1}$ и $l - n/p + n/q \geq 0$, то по теореме Соболева

$$\|v\|_{L_q(\Omega_k)} \leq c\,\varphi(z_k)^{n/q-n/p}\left(\|v\|_{L_p(\Omega_k)} + \varphi(z_k)^l\|\nabla_l v\|_{L_p(\Omega_k)}\right), \tag{4.13}$$

где $k = 0, 1, \ldots$ и $v \in W_p^l(\Omega_k)$ – произвольная функция. Отметим, что отображение

$$W_p^l(B_{\varphi(z)}^{(n-1)}) \ni u(\cdot, z) \mapsto Q(\cdot, z)$$

является проектором из $W_p^l(B_{\varphi(z)}^{(n-1)})$ на $\mathcal{P}_{l-1}^{(n-1)}$ (см. пример в начале § 3). В силу замечания 3.1 имеем

$$\int_{|y|<\varphi(z)} |u(y,z) - Q(y,z)|^p dy \leq c\,\varphi(z)^{lp}\int_{|y|<\varphi(z)} |\nabla_l u(y,z)|^p dy$$

для п.в. $z \in (0, \delta)$. Отсюда и из (4.13) при $v = u - Q$ следует, что

$$\|u - Q\|_{L_q(\Omega_k)} \leq c\,\varphi(z_k)^{l-n/p+n/q}\left(\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega_k)} + \|\nabla_l Q\|_{L_p(\Omega_k)}\right). \tag{4.14}$$

Оценим величину $\|\nabla_l Q\|_{L_p(\Omega_k)}$. Пусть мультииндексы

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}), \quad \overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}), \quad \gamma = (\overline{\gamma}, \gamma_n)$$

таковы, что $|\alpha| < l,\ |\gamma| = l$. Пусть, как и выше, $Q_\alpha(x) = u_\alpha(z)y^\alpha$. Если $\gamma_i > \alpha_i$ для некоторого $i = 1, \ldots, n-1$, то $D^\gamma Q_\alpha(x) = 0$. Если $\overline{\gamma} \leq \alpha$ (т.е. $\gamma_i \leq \alpha_i$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$), то в этом случае

$$|D^\gamma Q_\alpha(x)| \leq c\,\varphi(z)^{|\alpha|-|\overline{\gamma}|}|u_\alpha^{(\gamma_n)}(z)|, \ \ x = (y, z) \in \Omega.$$

Согласно лемме 3.1

$$|D^\gamma Q_\alpha(x)|^p \leq c\,\varphi(z)^{1-n}\int_{|y|<\varphi(z)} |\nabla_l u(y,z)|^p dy,$$

откуда

$$\|\nabla_l Q_\alpha\|_{L_p(\Omega_k)} \leq c\,\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega_k)}, \ \ k \geq 0.$$

Последняя оценка и (4.14) дают

$$\|u - Q\|_{L_q(\Omega_k)} \leq c\,\varphi(z_k)^{l-n/p+n/q}\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega_k)}, \quad k \geq 0. \tag{4.15}$$

Отсюда и из алгебраического неравенства

$$\left(\sum\nolimits_k a_k^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum\nolimits_k a_k^p\right)^{1/p}, \ \ a_k \geq 0, \ \ q \geq p,$$

получаем

$$\|u - Q\|_{L_q(\Omega)} \leq c\,\varphi(\delta)^{l-n/p+n/q}\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Принимая во внимание (4.7), приходим к (4.9). Теорема доказана при $p > 1$.

С очевидными изменениями приведенное доказательство достаточности переносится на случай $p = 1$. При выполнении условия (1.5) аналогичные (и даже несколько более простые) рассуждения приводят к оценке (4.4), в которой $p = 1$, $u \in W_1^l(\Omega)$, $u(x) = 0$ при $z > \delta$ и

$$A(\delta) = \sup_{z\in(0,\delta)} \varphi(z)^{1-n} \left( \int_0^z (z-t)^{(l-1)q} \varphi(t)^{n-1} dt \right)^{1/q}. \tag{4.16}$$

Доказательство теоремы закончено.

**Доказательство теоремы 1.2.** *Достаточность условий* (1.6), (1.7). Соображения, высказанные в начале доказательства достаточности теоремы 1.1, позволяют ограничиться случаем $\omega = B_1^{(n-1)}$ для пика (1.3). Можно также считать, что функция $\varphi$ удовлетворяет дополнительным требованиям (4.3). При этих условиях в теореме 1.1 для любого фиксированного $\delta \in (0,1)$ и произвольной функции $u \in W_p^l(\Omega)$, такой, что $u(y,z) = 0$ при $z > \delta$, была получена оценка (4.4), где $A(\delta)$ определяется в (4.5)–(4.6) для $p > 1$ и в (4.16) для $p = 1$. Пусть

$$\eta \in C^\infty([0,\infty)), \quad 0 \le \eta \le 1, \quad \eta|_{[0,1/2]} = 1, \quad \eta|_{(1,\infty)} = 0.$$

При $\delta \in (0, 1/2)$ положим $\eta_\delta(x) = \eta(z/\delta)$ при $x = (y,z) \in \Omega$. В силу вышесказанного для любой функции $u \in W_p^l(\Omega)$ имеем

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \le c\, A(\delta) \|\nabla_l(\eta_\delta u)\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_q(\Omega^{(\delta/2)})},$$

где

$$\Omega^{(\varepsilon)} = \{x = (y,z) \in \mathbf{R}^n : z \in (\varepsilon, 1),\ |y| < \varphi(z)\}.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\|u\|_{q,\Omega} \le c\, A(\delta) \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} + M_\delta \|u\|_{W_p^{l-1}(\Omega^{(\delta/2)})} + \|u\|_{L_q(\Omega^{(\delta/2)})} \tag{4.17}$$

с положительной константой $M_\delta$, не зависящей от $u$. Заметим, что из условия теоремы следует равенство $\lim_{\delta\to 0} A(\delta) = 0$, а из оценки (4.7) – неравенство $l - n/p + n/q > 0$. В этих условиях пространство $W_p^l(\Omega^{(\varepsilon)})$ компактно вложено в $L_q(\Omega^{(\varepsilon)})$ и в $W_p^{l-1}(\Omega^{(\varepsilon)})$ для любого $\varepsilon \in (0,1)$ (см. [2, § 11], [3]). Теперь оценка (4.17) позволяет с помощью известного диагонального процесса выделить из любой ограниченной в $W_p^l(\Omega)$ последовательности сходящуюся в $L_q(\Omega)$ подпоследовательность.

*Необходимость условий* (1.6), (1.7). Пусть пространство $W_p^l(\Omega)$ компактно вложено в $L_q(\Omega)$ при $p > 1$. Обозначим через $U$ единичный шар в пространстве функций $f \in L_{p,loc}(0,1)$ с конечной нормой $\|f\varphi^{(n-1)/p}\|_{L_p(0,1)}$. Тогда множество функций

$$\Omega \ni (y,z) \mapsto (Tf)(y,z) = \int_z^1 (t-z)^{l-1} f(t)\,dt, \tag{4.18}$$

где $f \in U$, ограничено в $W_p^l(\Omega)$ по лемме 2.1. Таким образом, существует последовательность $\{f_k\}_{k\geq 1} \subset U$, для которой последовательность $\{Tf_k\}$ сходится в $L_q(\Omega)$, что равносильно сходимости последовательности

$$(0,1) \ni z \mapsto \int_z^1 (t-z)^{l-1} f_k(t)dt, \quad k = 1, 2, \dots,$$

в пространстве функций $g \in L_{q,loc}(0,1)$ с нормой $\|g\varphi^{(n-1)/q}\|_{L_q(0,1)}$. Итак, если рассматривать $Tf$ в (4.18) как функцию переменной $z \in (0,1)$, то оператор $f \mapsto Tf$ вполне непрерывен как оператор, действующий в указанных весовых пространствах на интервале $(0,1)$. Тогда условие (1.6) следует из леммы 4.2.

Пусть пространство $W_1^l(\Omega)$ компактно вложено в $L_q(\Omega)$. Проверим условие (1.7). Если предположить, что оно не выполнено, то существуют такие последовательности положительных чисел $\{r_k\}$ и $\{\varepsilon_k\}$, которые сходятся к нулю и

$$\varphi(r_k+\varepsilon_k)^{1-n} \left(\int_0^{r_k} (r_k - t)^{(l-1)q} \varphi(t)^{n-1} dt\right)^{1/q} \geq \mathrm{const} > 0.$$

Положим

$$u_k(x) = \int_z^1 (t-z)^{l-1} \chi_{(r_k, r_k+\varepsilon_k)}(t) dt, \quad x = (y,z) \in \Omega$$

(здесь $\chi_E$ –характеристическая функция множества $E$). Тогда по лемме 2.1

$$\|u_k\|_{W_1^l(\Omega)} \sim \|\nabla_l u_k\|_{L_1(\Omega)} \leq c \int_{r_k}^{r_k+\varepsilon_k} \varphi(z)^{n-1} dz \leq c\,\varphi(r_k+\varepsilon_k)^{n-1}\varepsilon_k.$$

Из определения $u_k$ также следует, что

$$\|u_k\|_{L_q(\Omega)}^q \geq c \int_0^{r_k} \varphi(z)^{n-1} dz \left(\int_{r_k}^{r_k+\varepsilon_k} (t-z)^{l-1} dt\right)^q \geq$$

$$\geq c\,\varepsilon_k^q \int_0^{r_k} \varphi(z)^{n-1} (r_k - z)^{(l-1)q} dz.$$

Таким образом, для последовательности $v_k = u_k / \|u_k\|_{W_1^l(\Omega)}$ имеем

$$\|v_k\|_{L_q(\Omega)} \geq \frac{c}{\varphi(r_k+\varepsilon_k)^{n-1}} \left(\int\limits_0^{r_k} (r_k - t)^{(l-1)q} \varphi(t)^{n-1} dt\right)^{\frac{1}{q}} \geq \mathrm{const} > 0.$$

В силу полной непрерывности оператора вложения: $W_1^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ существует подпоследовательность $\{v_k\}$, сходящаяся в $L_q(\Omega)$. Из предыдущего неравенства вытекает, что этот предел – ненулевая функция. Но $v_k(x) = 0$ при $z > r_k + \varepsilon_k$, и упомянутая подпоследовательность может иметь только нулевой предел. Полученное противоречие доказывает равенство (1.7) и теорему.

**Доказательство следствия 1.1.** Полагая $p' = p/(p-1)$, из определения (4.6) и монотонности $\varphi$ выводим

$$A_\gamma(z,\delta) \leq z^{1/q+(l-1)(1-\gamma)}\varphi(z)^{\frac{n-1}{q}} \left(\int\limits_z^\delta \varphi(t)^{\frac{n-1}{1-p}} t^{(l-1)p'\gamma} dt\right)^{1/p'} \leq$$

$$\leq z^{1/q} \left(\int_z^\delta t^{(l-1)p'} \varphi(t)^{(n-1)(1/q-1/p)p'} dt\right)^{1/p'} \leq$$

$$\leq z^{1/q}\,\Psi(\delta) \left(\int_z^\infty t^{-p'/q}\frac{dt}{t}\right)^{1/p'} \leq (q/p')^{1/p'}\Psi(\delta), \qquad (4.19)$$

где $\Psi(\delta) = \sup\{\Phi(t) : t \in (0,\delta)\}$. Таким образом, величина $A_\gamma$ в (1.4) не больше константы, зависящей только от $p, q$, умноженной на супремум в (1.8).

При $p = 1$ имеем

$$\varphi(z)^{1-n}\left(\int_0^z (z-t)^{(l-1)q}\varphi(t)^{n-1} dt\right)^{1/q} \leq \Phi(z), \quad z \in (0,1). \qquad (4.20)$$

Итак, из условия (1.8) следует (1.5) при $p = 1$ и конечность величин $A_0, A_1$ при $p > 1$.

Пусть имеет место (1.9). Ввиду (4.20) тогда верно и (1.7). При $p > 1$ проверим равенства (1.6). Принимая во внимание (4.19), для $0 < z < \delta < 1$ получим

$$A_\gamma(z) \leq c\,(p,q) \sup_{t\in(0,\delta)} \Phi(t) + \left(\int_0^z g(z,t)dt\right)^{1/q} \left(\int_\delta^1 h(z,t)dt\right)^{1/p'}, \qquad (4.21)$$

где

$$g(z,t) = (z-t)^{(l-1)q(1-\gamma)}\varphi(t)^{n-1}, \quad h(z,t) = (t-z)^{(l-1)p'\gamma}\varphi(t)^{\frac{1-n}{p-1}}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. В силу (1.9) существует такое число $\delta \in (0,1)$, для которого первое слагаемое в правой части (4.21) меньше $\varepsilon/2$. Для оценки второго слагаемого в правой части (4.21), равного произведению двух сомножителей, заметим, что первый из сомножителей стремится к нулю при $z \to 0$, а второй имеет мажоранту $\varphi(\delta)^{(1-n)/p}$. Поэтому при фиксированном $\delta$ найдется такое число $\zeta \in (0,\delta)$, что произведение указанных сомножителей меньше $\varepsilon/2$ при всех $z \in (0,\zeta)$. При тех же $z$ имеем $A_\gamma(z) < \varepsilon$. Отсюда следует (1.6).

Достаточность условий (1.8) и (1.9) соответствено для непрерывности и полной непрерывности оператора вложения: $W_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ теперь следует из теорем 1.1 и 1.2.

Пусть $\varphi(2z) \sim \varphi(z)$, $z \in (0,1/2)$. При $p > 1$ из определения $A_\gamma(z)$ (см. теорему 1.1) выводим

$$A_1(z) \geq \left(\int_{z/2}^z \varphi(t)^{n-1} dt\right)^{1/q} \left(\int_z^{2z} \varphi(t)^{\frac{1-n}{p-1}}(t-z)^{(l-1)p'} dt\right)^{1/p'} \geq$$

$$\geq c\,(z\varphi(z)^{n-1})^{1/q}\varphi(z)^{(1-n)/p}\left(\int_0^z \tau^{(l-1)p'}d\tau\right)^{1/p'},$$

откуда $A_1(z) \geq c\,\Phi(z)$.

Легко также проверяется, что при $p = 1$ левая часть (4.20) не меньше $c\,\Phi(z)$. Необходимость условий (1.8), (1.9) теперь вытекает из теорем 1.1, 1.2. Доказательство следствия 1.1 закончено.

**Доказательство теоремы 1.3.** *Необходимость.* Пусть пространство $W_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Проверим неравенство (1.10). При малом $\delta > 0$ положим

$$u_\delta(x) = \int_z^1 (t-z)^{l-1} g_\delta(t)dt, \quad x = (y,z) \in \Omega,$$

где

$$g_\delta(t) = t^{(l-1)/(p-1)}\varphi(t)^{(1-n)/(p-1)}\chi_{(\delta,1-\delta)}(t)$$

и $\chi$ означает характеристическую функцию. Ясно, что $u_\delta(x) = 0$ при $z > 1-\delta$, $u_\delta \in C^{l-1}(\Omega) \cap W_\infty^l(\Omega)$ и, кроме того, $|(\nabla_l u)(x)| \sim g_\delta(z)$ для $x \in \Omega$. Ввиду леммы 2.1 верна оценка

$$\|u_\delta\|_{W_p^l(\Omega)} \leq c\,\|\nabla_l u_\delta\|_{L_p(\Omega)},$$

следовательно,

$$\|u_\delta\|^p_{W_p^l(\Omega)} \leq c\,I_\delta, \quad I_\delta = \int_\delta^{1-\delta} t^{(l-1)p/(p-1)}\varphi(t)^{(1-n)/(p-1)}dt.$$

Пусть $x = (y,z) \in \Omega$, $z \in (0,\delta)$. Для таких $x$ имеем

$$u_\delta(x) = \int_\delta^1 (t-z)^{l-1} g_\delta(t)dt \leq c\,\|u_\delta\|_{W_p^l(\Omega)}.$$

По теореме Лебега в последнем интеграле возможен предельный переход при $z \to 0$, поэтому

$$I_\delta = \int_\delta^1 t^{l-1} g_\delta(t)dt \leq c\,I_\delta^{1/p}.$$

Так как $I_\delta < \infty$, то

$$\int_\delta^{1-\delta} t^{(l-1)p/(p-1)}\varphi(t)^{(1-n)/(p-1)}dt \leq c.$$

В силу произвольности малого параметра $\delta$ неравенство (1.10) вытекает из последней оценки и теоремы Фату.

Установим неравенство (1.11) в предположении существования непрерывного оператора вложения: $W_1^l(\Omega) \to C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Если (1.11) неверно, то найдется такая бесконечно малая последовательность положительных чисел

$\{r_k\}$, что $r_k^{l-1}\varphi(r_k)^{1-n} \to \infty$. Пусть $\eta$ – функция, введенная при доказательстве достаточности в теореме 1.2. Положим

$$u_k(x) = r_k^{l-1}\varphi(r_k)^{1-n}\eta(z/r_k), \quad x = (y, z) \in \Omega, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.22}$$

Тогда $u_k \in C^\infty(\Omega)$, $u_k(x) = 0$ при $z > r_k$ и $u_k(x) = r_k^{l-1}\varphi(r_k)^{1-n}$ при $z \in (0, r_k/2)$. Кроме того,

$$\|\nabla_l u_k\|_{L_1(\Omega)} \le c\, r_k^{-1}\varphi(r_k)^{1-n}\int_{r_k/2}^{r_k}\varphi(z)^{n-1}dz \le c.$$

Отсюда и из леммы 2.1 вытекает ограниченность последовательности $\{u_k\}$ в пространстве $W_1^l(\Omega)$. Однако

$$\|u_k\|_{L_\infty(\Omega)} \ge r_k^{l-1}\varphi(r_k)^{1-n} \to \infty,$$

что противоречит непрерывности вложения пространства $W_1^l(\Omega)$ в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Итак, (1.11) установлено.

Пусть оператор вложения: $W_1^l(\Omega) \to C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ вполне непрерывен. Проверим равенство (1.12). Если (1.12) нарушено, то существует такая последовательность положительных чисел $\{r_k\}$, что $r_k \to 0$ и

$$\inf\{r_k^{l-1}\varphi(r_k)^{1-n}\} = c > 0.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $r_{k+1} < r_k/2$ при $k = 1, 2, \ldots$ Как было показано выше, последовательность $\{u_k\}$, построенная в (4.22), ограничена в $W_1^l(\Omega)$. Пусть $i > k$, $z \in (r_i, r_k/2)$ и $x = (y, z) \in \Omega$. Для этих $x$ имеем $u_i(x) = 0$, $u_k(x) = r_k^{l-1}\varphi(r_k)^{1-n}$, поэтому $\|u_i - u_k\|_{L_\infty(\Omega)} \ge c$, и последовательность $\{u_k\}$ не имеет подпоследовательности, сходящейся в $L_\infty(\Omega)$. Тем самым доказательство теоремы в части необходимости закончено.

*Достаточность.* Пусть выполнено условие (1.10). Установим компактность оператора вложения: $W_p^l(\Omega) \to C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Как и в доказательстве достаточности предыдущих теорем, можно ограничиться случаем $\omega = B_1^{(n-1)}$ для пика (1.3). Можно также считать, что функция $\varphi$ удовлетворяет дополнительным требованиям (4.3).

Пусть $\delta \in (0, 1)$, $u \in W_p^l(\Omega)$ и $u(y, z) = 0$ при $z > \delta$. Покажем, что верна оценка (4.4), где $q = \infty$ и

$$A(\delta) = \left(\int_0^\delta \frac{z^{(l-1)p'}}{\varphi(z)^{(n-1)/(p-1)}}dz\right)^{1/p'}, \quad 1/p + 1/p' = 1. \tag{4.23}$$

Заметим, что

$$A(\delta) \ge c\,\varphi(\delta)^{(1-n)/p}\delta^{l-1+1/p'} \ge c\,\varphi(\delta)^{l-n/p}, \tag{4.24}$$

значит, $lp > n$, поскольку $A(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Отсюда и из теоремы Соболева, в частности следует, что функция $u$ совпадает почти всюду с функцией из $C(\Omega)$.

Как и в теореме 1.1, введем квазиполином $Q$ и проверим оценки (4.8), (4.9) при $q = \infty$. Вывод неравенства (4.9) повторяет соответствующие рассуждения доказательства теоремы 1.1, приводящие к оценке (4.15) при $q = \infty$. Из этой оценки получаем

$$\|u - Q\|_{L_\infty(\Omega)} \le c\,\varphi(\delta)^{l-n/p}\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Отсюда и из (4.24) вытекает (4.9).

Обратимся к (4.8). Как и выше, положим $Q_\alpha(x) = u_\alpha(z)y^\alpha$ при $\alpha \in \mathbf{Z}_+^{n-1}$, $|\alpha| < l$. Тогда

$$\|Q_\alpha\|_{L_\infty(\Omega)} \le \|u_\alpha \varphi^{|\alpha|}\|_{L_\infty(0,1)}.$$

Имеет место представление (4.10), и по лемме 4.2 наилучшая константа $C(\delta)$ в неравенстве

$$\operatorname{ess\,sup}_{z\in(0,1)}\{\varphi(z)^{|\alpha|}|u_\alpha(z)|\} \le C(\delta)\left(\int\limits_0^\delta \varphi(z)^{p|\alpha|+n-1}|u_\alpha^{(l)}(z)|^p dz\right)^{1/p} \tag{4.25}$$

дается формулой

$$C(\delta) = \sup_{z\in(0,1)} \varphi(z)^{|\alpha|}\left(\int_z^\delta (t-z)^{(l-1)p'}\varphi(t)^{(n-1+p|\alpha|)/(1-p)}dt\right)^{1/p'}.$$

Так как $C(\delta)$ мажорируется величиной (4.23), то $\|Q_\alpha\|_{L_\infty(\Omega)}$ не превосходит правой части (4.25), если $C(\delta)$ заменить на $A(\delta)$. Остается заметить, что с помощью леммы 3.1 правая часть (4.25) оценивается сверху выражением $c\,A(\delta)\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}$. Отсюда следует (4.8).

Пусть $u \in W_p^l(\Omega)$ – произвольная функция. Как и в доказательстве теоремы 1.2, введем гладкую срезку $\eta_\delta(x) = \eta(z/\delta)$ и получим оценку

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \le c\,A(\delta)\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} + M(\delta)\,\|u\|_{W_p^{l-1}(\Omega^{(\delta/2)})} + \|u\|_{L_\infty(\Omega^{(\delta/2)})}, \tag{4.26}$$

где $\Omega^{(\varepsilon)} = \{x \in \Omega : z > \varepsilon\}$ – срезанный пик, а $M(\delta)$ – положительное число, не зависящее от $u$. Поскольку $lp > n$ и $\Omega^{(\varepsilon)} \in C^{0,1}$ при $\varepsilon \in (0,1)$, то пространство $W_p^l(\Omega^{(\varepsilon)})$ компактно вложено в $L_\infty(\Omega^{(\varepsilon)})$ и в $W_p^{l-1}(\Omega^{(\varepsilon)})$ (см. [2, § 11], [3]). Принимая во внимание, что $\lim_{\delta\to 0} A(\delta) = 0$, из (4.26) стандартными рассуждениями выводим относительную компактность в $L_\infty(\Omega)$ множества, ограниченного в $W_p^l(\Omega)$. Доказательство достаточности при $p > 1$ закончено. С очевидными изменениями оно переносится и на случай $p = 1$.

Предположим, что область $\omega$ в (1.3) принадлежит классу $C^{0,1}$. По лемме 4.1 любую функцию из $W_p^l(\Omega)$ можно продолжить в круговой пик $G = \{(y,z) : z \in (0,1), |y| < \varphi(z)\}$ с сохранением класса $W_p^l$. Граница области $G$ локально представима графиком непрерывной функции, поэтому ([3], [15, 1.1.6]) множество $C^\infty(\overline{G})$ плотно в $W_p^l(G)$. В этом случае $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $W_p^l(\Omega)$.

Таким образом, если выполнены условия теоремы 1.3, то каждая функция из $W_p^l(\Omega)$ является пределом в $L_\infty(\Omega)$ последовательности элементов $C(\overline{\Omega})$ и, следовательно, совпадает с функцией из $C(\overline{\Omega})$ почти всюду. Доказательство теоремы 1.3 закончено.

*Приложение теоремы 1.1 к задаче Неймана*

Пусть $\Omega$ – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $l$ – натуральное число и $a_{\alpha\beta}$ – вещественные функции из $L_\infty(\Omega)$, где $\alpha, \beta$ – произвольные мультииндексы размерности $n$, удовлетворяющие условию $|\alpha| = |\beta| = l$. Предположим, что $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ и существует такая постоянная $c > 0$, что для всех векторов $\{\xi_\alpha\}_{|\alpha|=l}$ с вещественными компонентами верна оценка

$$\sum\nolimits_{|\alpha|=|\beta|=l} a_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \geq c\sum\nolimits_{|\alpha|=l}\xi_\alpha^2.$$

Пусть еще $a \in L_\infty(\Omega)$, $a(x) \geq \mathrm{const} > 0$.

При $2 \leq q < \infty$ оператор $A_q$ задачи Неймана для дифференциального оператора

$$u \mapsto (-1)^l \sum\nolimits_{|\alpha|=|\beta|=l} D^\alpha\left(a_{\alpha\beta}D^\beta u\right) + au$$

задается условиями

1) $u \in L_q(\Omega) \cap L_2^l(\Omega),\ A_q u \in L_{q'}(\Omega),\ 1/q + 1/q' = 1;$

2) для всех $v \in L_q(\Omega) \cap L_2^l(\Omega)$ верно равенство

$$\int_\Omega vA_q u dx = \int_\Omega \left(\sum\nolimits_{|\alpha|=|\beta|=l} a_{\alpha\beta}(x)D^\beta u\ D^\alpha v + a(x)uv\right)dx.$$

Известно [15, 4.10], [27], что если множество $L_q(\Omega) \cap L_2^l(\Omega)$ плотно в $W_2^l(\Omega)$ при $q \in [2, \infty)$, то разрешимость уравнения

$$A_q u = f \tag{4.27}$$

для всех $f \in L_{q'}(\Omega)$ равносильна непрерывности вложения $W_2^l(\Omega) \subset L_q(\Omega)$. Применяя сказанное к области (1.3) и используя теорему 1.1, приходим к такому утверждению.

Пусть $\Omega$ – пик в $\mathbf{R}^n$ вида (1.3), в котором $\omega \in C^{0,1}$. Тогда задача Неймана (4.27) однозначно разрешима при всех $f \in L_{q'}(\Omega)$, $q \geq 2$, в том и только в том случае, если

$$\sup_{z\in(0,1)}\left\{\left(\int_0^z (z-t)^{q(l-1)}\varphi(t)^{n-1}dt\right)^{1/q}\left(\int_z^1 \varphi(t)^{1-n}dt\right)^{1/2}\right\} < \infty$$

и

$$\sup_{z\in(0,1)}\left\{\left(\int_0^z \varphi(t)^{n-1}dt\right)^{1/q}\left(\int_z^1 \varphi(t)^{1-n}(t-z)^{2(l-1)}dt\right)^{1/2}\right\} < \infty.$$

## § 5. Гёльдеровы области

Используя полученные выше результаты, мы сформулируем в данном параграфе теорему вложения пространства $W_p^l(\Omega)$ в пространство $L_q(\Omega)$ и в $C(\overline{\Omega})$ для гёльдеровых областей. Опишем упомянутый класс областей.

Пусть $a \in (0, \infty]$ и $\omega : [0, a) \to [0, \infty)$ – непрерывная возрастающая вогнутая функция, удовлетворяющая условию $\omega(0) = 0$. Будем говорить, что ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ принадлежит классу $C^{0,\omega}$,[1] если для каждой точки $X \in \partial\Omega$ существуют локальная система декартовых координат $x = (x', x_n) : x' \in \mathbf{R}^{n-1}, x_n \in \mathbf{R}^1$ с началом в точке $X$ и цилиндрическая окрестность $U = \{(x', x_n) : |x'| < r, x_n \in (-b, b)\}$, $r < a/2$, такие, что

$$U \cap \Omega = \{(x', x_n) : |x'| < r,\ -b < x_n < f(x')\}$$

и

$$U \cap \partial\Omega = \{(x', x_n) : |x'| < r,\ x_n = f(x')\},$$

где функция $f$ удовлетворяет в замкнутом шаре $\bar{B}_r^{(n-1)}$ условиям

$$f(x') \in (-b, b), \quad |f(x') - f(y')| \leq \omega(|x' - y'|).$$

Отметим, что если $x = (x', x_n) \in U \cap \overline{\Omega}$, $y = (y', y_n) \in U$ и

$$x_n - y_n > \omega(|x' - y'|),$$

то $y_n < f(y')$, т.е. $y \in U \cap \Omega$. Отсюда следует, что для $\Omega \in C^{0,\omega}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ каждая точка замыкания $\overline{\Omega}$ является вершиной содержащегося в $\Omega$ пика, конгруэнтного пику

$$\{x : x_n \in (0, \varepsilon),\ |x'| < \omega^{-1}(x_n)\}. \tag{5.1}$$

Положим $\varphi = \omega^{-1}$. Тогда $\varphi$ – непрерывная возрастающая выпуклая функция на промежутке $[0, \varepsilon]$. Следовательно, $\varphi$ удовлетворяет условию Липшица на том же промежутке и существует $\lim_{t\to+0} \varphi'(t) \geq 0$. Если последний предел положителен, то $\Omega$ удовлетворяет условию конуса, и для области $\Omega$ верна теорема вложения Соболева. Будем далее считать, что

$$\varphi(0) = \lim_{t\to+0} \varphi'(t) = 0.$$

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 5.1.** *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – область класса $C^{0,\omega}$ и $\varphi = \omega^{-1}$.*
(i) *Если $l \geq 1$ – целое, $1 \leq p \leq q < \infty$ и*

$$\sup\{t^{l-1/p+1/q}\varphi(t)^{(n-1)(1/q-1/p)} : t \in [0, \varepsilon]\} < \infty \tag{5.2}$$

[1] при $\omega(t) = t^\lambda$, $\lambda \in (0, 1]$ этот класс обозначается $C^{0,\lambda}$

*при некотором $\varepsilon > 0$, то пространство $W_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$.*
(ii) *Предположим, что при некотором $\varepsilon > 0$*

$$\int_0^\varepsilon t^{(l-1)p'}\varphi(t)^{(1-n)p'/p}dt < \infty, \quad 1/p + 1/p' = 1. \tag{5.3}$$

*Тогда пространство $W_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $C(\overline{\Omega})$.*

Для доказательства теоремы нам потребуется хорошо известное "транзитивное свойство" вложений $L_p^l(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ (см., например, [15, 4.9]).

**Лемма 5.1.** *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – область конечного объема. Если пространство $L_1^1(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_s(\Omega)$ при $s \geq 1$, то при целом $l \geq 1$ и $p \in [1, \infty)$, удовлетворяющих условию $pl(1-s^{-1}) < 1$, пространство $L_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$ при*

$$q = p/(1 - pl(1 - s^{-1})). \tag{5.4}$$

*В случае $pl(1 - s^{-1}) = 1$ пространство $L_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$ при любом $q < \infty$.*

**Доказательство теоремы 5.1.** (i) Заметим прежде всего, что для области $\Omega \in C^{0,\omega}$ пространства $W_p^l(\Omega)$ и $L_p^l(\Omega)$ совпадают [15, 1.1.11].

Предположим, что функция $[0, \varepsilon] \ni t \mapsto t^{1/s}\varphi(t)^{(1-n)(1-1/s)}$ ограничена для некоторых $\varepsilon > 0, s \geq 1$. Тогда, согласно работе Д. А. Лабутина [21], пространство $W_1^1(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_s(\Omega)$.

Пусть выполнено условие (5.2). Параметр $s$, определенный уравнением (5.4), удовлетворяет условию $s \geq 1$, причем левая часть (5.2) равна

$$\Big(\sup\{t^{1/s}\varphi(t)^{(1-n)(1-1/s)} : t \in [0, \varepsilon]\}\Big)^l < \infty.$$

В силу вышесказанного и леммы 5.1 пространство $W_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$.

(ii) Так как из (5.3) следует, что $lp > n$, то любая функция из $W_p^l(\Omega)$ совпадает почти всюду с непрерывной функцией. Пусть $x \in \Omega$ и $G_x$ – пик с вершиной $x$, конгруэнтный пику (5.1) и содержащийся в $\Omega$. По теореме 1.3 для всех $u \in W_p^l(\Omega) \cap C(\Omega)$ верна оценка

$$|u(x)| \leq c\,\|u\|_{W_p^l(G_x)}$$

с константой, не зависящей от $x, u$. Тем более верна оценка

$$|u(x)| \leq c\,\|u\|_{W_p^l(\Omega)}.$$

Таким образом, пространство $W_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Поскольку в $W_p^l(\Omega)$ плотно множество $W_p^l(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ [3], то отсюда следует непрерывность оператора вложения: $W_p^l(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$. Теорема доказана.

**Замечание 5.1.** Условие (5.2) точно в следующем смысле: существует область $\Omega \in C^{0,\omega}$, для которой условие (5.2) необходимо для непрерывности оператора вложения: $W_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$. Из теоремы 1.1 и следствия 1.1 вытекает, что в качестве такой области можно выбрать пик (5.1), если $\omega^{-1}(2z) \leq \mathrm{const} \cdot \omega^{-1}(z)$ при малых $z > 0$.

В том же смысле точно и условие (5.3).

# Список литературы


[1] Соболев С. Л., *Об одной теореме функционального анализа*, Мат. сб. **4** (1938), 471–497.

[2] Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Л., 1950, 255 с.

[3] Gagliardo E., *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ric. Mat. **7** (1958), 102–137.

[4] Бесов О. В., *Интегральное представление функций и теоремы вложения для области с гибким условием рога*, Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **170** (1984), 12–30.

[5] Бесов О. В., *Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей*, Мат. сб. **192** (2001), N 3, 3–26.

[6] Решетняк Ю. Г., *Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей*, Сиб. мат. журнал **21** (1980), N 6, 108–116.

[7] Bojarski B., *Remarks on Sobolev imbedding inequalities*, Proceedings of the conference on Complex Analysis, Joensuu, 1987. Lecture Notes in Mathematics 1351.–Berlin a.o.:Springer, 1988. P. 52–68.

[8] Buckley S., Koskela P., *Sobolev–Poincaré implies John*, Math. Research Letters **2** (1995), 577–594.

[9] Hajłasz P., Koskela P., *Isoperimetric inequalities and imbedding theorems in irregular domains*, J. London Math. Soc. **58** (1998), N 2, 425–450.

[10] Kilpeläinen T., Malý J., *Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries*, Z. Anal. Anwendungen **19** (2000), N 2, 369–380.

[11] Поборчий С. В., *Некоторые контрпримеры к теоремам вложения для пространств Соболева*, Вестник С-Петербург. ун-та **4** (1998), N 22, 49–58.

[12] Мазья В. Г., *Классы областей и теоремы вложения функциональных пространств*, Докл. АН СССР **133** (1960), 527–530.

[13] Мазья В. Г., *О непрерывности и ограниченности функций из пространств Соболева*, Проблемы матем. анализа.–Л., Вып. 4, 1973, 46–77.

[14] Мазья В. Г., *О суммируемости функций из пространств С. Л. Соболева*, Проблемы матем. анализа.–Л., Вып. 5, 1975, 66–98.

[15] Мазья В. Г. *Пространства С. Л. Соболева*, Л., 1985. 415 с.

[16] Мазья В. Г., Поборчий С. В., *Продолжение функций из классов Соболева во внешность области с вершиной пика на границе II*, Чехословацкий мат. журн. **37** (1987), 128–150.

[17] Maz'ya V. G., Poborchi S. V., *Imbedding theorems for Sobolev spaces in domains with cusps*, Linköping University, 1992, 34 p. (Preprint/ LiTH–MAT–R–92–14).

[18] Maz'ya V. G., Poborchi S. V., *Differentiable functions on bad domains*, World Scientific, 1997, 504p.

[19] Глобенко И. Г., *Некоторые вопросы теории вложения для областей с особенностями на границе*, Мат. сб. **57** (1962), 201–224.

[20] Лабутин Д. А., *Интегральное представление функций и вложение пространств Соболева на областях с нулевыми углами*, Матем. Заметки **61** (1997), N 2, 201–219.

[21] Лабутин Д. А., *Вложение пространств Соболева на гёльдеровых областях*, Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН **227** (1999), 170–179.

[22] Лабутин Д. А., *Неулучшаемость неравенств Соболева для области с нерегулярной границей*, Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН **232** (2001), 218–222.

[23] Adams R. A., *Sobolev Spaces*, New York: Academic Press, 1975.

[24] Fukushima M., Tomisaki M., *Construction and decomposition of reflecting diffusions on Lipschitz domains with Hölder cusps*, Probability Theory and Related Fields **106** (1996), 521–557.

[25] Fraenkel L. E., *Formulae for high derivatives of composite functions*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **83** (1978), 159–165.

[26] Степанов В. Д., *Двухвесовые оценки для интегралов Римана–Лиувилля*, Изв. АН СССР **54** (1990), 645–656.

[27] Поборчий С. В. *О разрешимости задачи Неймана для эллиптических уравнений высокого порядка*, Вестник С-Петербург. ун-та, Вып. 3 (1998), N 15, 63–66.

Мазья Владимир Гилелевич
Department of Mathematics
Linköping University
58183 Linköping, Sweden
vlmaz@mai.liu.se

Поборчий Сергей Всеволодович
198904, Санкт-Петербург,
Петродворец, Библиотечная пл. 2 Математико-механический ф-т СПбГУ
Sergei.Poborchi@paloma.spbu.ru
дом. тел. 4305164

УДК 517.5

В. Г. Мазья, С. В. Поборчий. Теоремы вложения пространств Соболева в области с пиком и в гёльдеровой области.

Рассматривается область в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, имеющая вершину изолированного внешнего пика на границе. Выясняются необходимые и достаточные условия на функцию, описывающую заострение пика, при которых пространство Соболева в указанной области непрерывно (или компактно) вложено в пространство $L_q$ и в пространство $C \cap L_\infty$. Приводятся более наглядные достаточные условия, которые являются и необходимыми для широкого класса областей. В качестве приложения полученных результатов сформулированы условия разрешимости задачи Неймана для эллиптических уравнений порядка $2l$, $l \geq 1$, в области с внешним пиком. Приведена теорема вложения пространства Соболева в $L_q$ и в $C$ для гёльдеровой области.

Библиогр. 27 назв.

Ключевые слова: пространства Соболева, теоремы вложения, нерегулярные границы, области с пиками.

Key words: Sobolev spaces, imbedding theorems, irregular boundaries, domains with cusps.

**РЕЗЮМЕ**

Получены необходимые и достаточные условия непрерывности и компактности операторов вложения: $W_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$, $W_p^l(\Omega) \to C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ для области с внешним пиком. Приводятся более простые достаточные условия. Даны приложения полученных результатов к разрешимости задачи Неймана для эллиптических уравнений порядка $2l$, $l \geq 1$, в области с пиком. Сформулирована теорема вложения пространства Соболева в $L_q$ и в $C$ для гёльдеровой области.