О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА В ОБЛАСТИ С ПИКОМ

В. Г. Мазья, С. В. Поборчий

Введение

Рассмотрим задачу Неймана для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка в многомерной области Ω. При определенных условиях исследование ее разрешимости сводится к описанию пространства $W^1_p(\Omega)^*$ – сопряженного к пространству Соболева $W^1_p(\Omega)$ или к описанию пространства $TW^1_p(\Omega)^*$ – сопряженного к пространству граничных следов функций из класса $W^1_p(\Omega)$. В настоящей работе мы явным образом характеризуем пространства $W^1_p(\Omega)^*$ и $TW^1_p(\Omega)^*$ для области с вершиной пика на границе.

Работа состоит из пяти параграфов. В первом приводится постановка задачи Неймана и выясняется связь ее разрешимости с задачей описания упомянутых выше сопряженных пространств. Фактически § 1 является развернутым введением. В § 2 доказана теорема 1, в которой дается характеристика пространства $W^1_p(\Omega)^*$ для области с вершиной внешнего пика на границе. В § 3 устанавливаются некоторые вспомогательные утверждения, используемые далее. В § 4 дано описание пространства $TW^1_p(\Omega)^*$ для области с внешним пиком (теорема 2). Это пространство характеризуется в терминах классов $(W^{1-1/p}_p(S))^*$ на липшицевых поверхностях, и в терминах некоторых пространств функций на интервале $(0,1)$.

Доказательство теоремы 2 основано на явном описании класса $TW^1_p(\Omega)$ [7], [8, 7.2]. Характеризация пространства $TW^1_p(\Omega)^*$ позволяет, например, сформулировать явное необходимое и достаточное условие на граничную функцию из класса $L_q(\partial\Omega)$, обеспечивающее разрешимость задачи Неймана. Наконец, в § 5 рассмотрен случай области с внутренним пиком. Основные результаты работы сформулированы в теореме 1 (§ 2), в теореме 2 (§ 4) и в теореме 3 (§ 5).

§ 1. Предварительные сведения

Начнем со следующего простого наблюдения общего характера.

Лемма 1. *Пусть X – банахово пространство и X_0 – его подпространство. Обозначим через $\dot X$ фактор-пространство X/X_0 с нормой*

$$\|\dot x\| = \inf\{\|y\| : y \in \dot x\}.$$

(i) *Если* $f \in X^*$, *т.е.* f *– непрерывный линейный функционал в* X, *и* $f|_{X_0} = 0$, *то функционал*

$$\dot{X} \ni \dot{x} \mapsto \dot{f}(\dot{x}) = f(x)$$

принадлежит пространству $(\dot{X})^*$ *и* $\|\dot{f}\| = \|f\|$.

(ii) *Если* $\dot{f} \in (\dot{X})^*$, *то функционал*

$$X \ni x \mapsto f(x) = \dot{f}(\dot{x})$$

принадлежит X^* *и* $f|_{X_0} = 0$.

Доказательство этого утверждения легко следует из определения фактор-пространства.

Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ и $p \in (1, \infty)$. Через $W_p^1(\Omega)$ обозначим пространство функций на Ω, характеризующихся конечностью нормы

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L_p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{1/p}.$$

Пусть еще $TW_p^1(\Omega)$ – пространство следов $u|_{\partial\Omega}$ функций из $W_p^1(\Omega)$, снабженное нормой

$$\|v\|_{TW_p^1(\Omega)} = \inf\{\|u\|_{W_p^1(\Omega)} : u|_{\partial\Omega} = v\}.$$

В случае области с "достаточно хорошей" границей пространство $TW_p^1(\Omega)$ допускает явное описание. Так, согласно теореме Гальярдо [1], для областей класса $C^{0,1}$ (т.е. для областей с компактным замыканием, граница которых локально является графиком липшицевой функции) пространство $TW_p^1(\Omega)$ совпадает с пространством $W_p^{1-1/p}(S)$, $S = \partial\Omega$, функций на поверхности S с конечной нормой

$$\|v\|_{W_p^{1-1/p}(S)} = \|v\|_{L_p(S)} + [v]_{p,S},$$

где

$$[v]_{p,S} = \left(\iint\limits_{S\times S} |v(x) - v(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}} \right)^{1/p}, \tag{1.1}$$

а ds_x, ds_ξ – элементы площади на S.

В общем случае можно положить $TW_p^1(\Omega) = W_p^1(\Omega)/\mathring{W}_p^1(\Omega)$, где $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ означает замыкание в $W_p^1(\Omega)$ пространства $C_0^\infty(\Omega)$ гладких в Ω финитных функций.

Пусть граница области Ω компактна и содержит конечное число нелипшицевых точек (например, Ω имеет вершину изолированного пика на границе). Тогда почти везде на $\partial\Omega$ относительно $(n-1)$-мерной площади существует нормаль. Предположим, что площадь $\partial\Omega$ конечна и рассмотрим в Ω задачу Неймана[1]

$$-\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + a|u|^{p-2}u = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{1.2}$$

[1] мы рассматриваем модельную задачу (1.2), (1.3) для простоты изложения. На самом деле сказанное ниже справедливо и для эллиптических уравнений более общего вида [2].

$$|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = f, \tag{1.3}$$

где $p \in (1,\infty)$, ν – единичный вектор внешней нормали в точке границы, $a \in L_\infty(\Omega)$, $a(x) \geq \mathrm{const} > 0$ почти всюду в Ω, а f – функционал, однородный и аддитивный на множестве $\mathcal{V} = W_p^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ и обращающийся в нуль на $C_0^\infty(\Omega)$.

Решением задачи (1.2), (1.3) назовем функцию $u \in W_p^1(\Omega)$, которая при всех $v \in \mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству

$$L(u,v) = \langle f, v\rangle, \tag{1.4}$$

где $\langle f, v\rangle$ – значение функционала f на элементе v,

$$L(u,v) = \int_\Omega \Big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v + a|u|^{p-2}uv\Big)\,dx.$$

Заметим, что при фиксированном $u \in W_p^1(\Omega)$ левая часть в (1.4) является непрерывным линейным функционалом относительно $v \in W_p^1(\Omega)$, а множество $\mathcal{V}$ плотно в $W_p^1(\Omega)$ [5, 3.1.2]. Отсюда следует, что если указанная задача имеет решение, то функционал f единственным образом продолжается до функционала из $W_p^1(\Omega)^*$, который обращается в нуль на функциях $v \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$, и, значит, принадлежит пространству $TW_p^1(\Omega)^*$ по лемме 1.

Пусть теперь F – однородный и аддитивный функционал на множестве $\mathcal{V}$ (но не обязательно $\operatorname{Ker} F \supset C_0^\infty(\Omega)$). Наряду с задачей (1.4) рассмотрим еще задачу о нахождении функции $u \in W_p^1(\Omega)$, для которой равенство

$$L(u,v) = \langle F, v\rangle, \tag{1.5}$$

верно для всех $v \in \mathcal{V}$. Если эта задача разрешима, то функционал F опять продолжается (единственным образом) до функционала из $W_p^1(\Omega)^*$.

Обратно, покажем теперь, что если $F \in W_p^1(\Omega)^*$ (но не обязательно $F \in TW_p^1(\Omega)^*$), то существует единственная функция $u \in W_p^1(\Omega)$, удовлетворяющая (1.5) при всех $v \in W_p^1(\Omega)$. Если предположить, что таких функций две (u_1 и u_2), то из (1.5) следует, что

$$L(u_1, u_1 - u_2) - L(u_2, u_1 - u_2) = 0$$

или

$$\int_\Omega \Big(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2\Big)(\nabla u_1 - \nabla u_2)dx +$$
$$+\int_\Omega a\,(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2)(u_1-u_2)dx = 0. \tag{1.6}$$

Так как функция $\mathbf{R}^n \ni \xi \mapsto |\xi|^p$ строго выпукла при $p > 1$, для $\xi \neq \eta$ выполнено неравенство $(\nabla\psi(\xi) - \nabla\psi(\eta))(\xi-\eta) > 0$, т.е.

$$(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta)(\xi-\eta) > 0, \quad \xi \neq \eta. \tag{1.7}$$

Отсюда и из (1.6) следует, что обе подынтегральные функции в (1.6) почти всюду в Ω равны нулю. Но тогда $u_1 = u_2$ почти всюду в силу (1.7). Единственность функции $u \in W_p^1(\Omega)$ в (1.5) установлена.

Перейдем к проверке существования. Заметим, что величина $p\,L(u,v) - p\,\langle F, v\rangle$ является вариацией функционала

$$W_p^1(\Omega) \ni v \mapsto G(v) = \int_\Omega (|\nabla v|^p + a|v|^p)dx - p\,\langle F, v\rangle,$$

поэтому (1.5) выполнено для всех $v \in W_p^1(\Omega)$, если u доставляет минимум функционалу G на $W_p^1(\Omega)$. Убедимся, что $\min\{G(v) : v \in W_p^1(\Omega)\}$ достигается. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{v_k\}$ для $G(v)$. Так как функционал F непрерывен в $W_p^1(\Omega)$, то для некоторых констант $c_1, c_2 > 0$ имеем

$$G(v) \geq c_1\,\|v\|^p_{W_p^1(\Omega)} - c_2\,\|v\|_{W_p^1(\Omega)},$$

а поскольку $p > 1$, то $G(v) \to +\infty$, если $\|v\|_{W_p^1(\Omega)} \to \infty$. Отсюда следует, что минимизирующая последовательность ограничена, и, значит, существует ее подпоследовательность (которую мы снова обозначим $\{v_k\}$), слабо сходящаяся в $W_p^1(\Omega)$. Пусть u – ее предел. Проверим, что

$$G(u) = \min\{G(v) : v \in W_p^1(\Omega)\}. \tag{1.8}$$

Введем в $W_p^1(\Omega)$ норму

$$[v] = \left(\int_\Omega (|\nabla v|^p + a|v|^p)dx\right)^{1/p},$$

эквивалентную $\|\cdot\|_{W_p^1(\Omega)}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует функционал $f_0 \in W_p^1(\Omega)^*$, норма которого относительно новой нормы равна 1 и

$$[u]^p - \varepsilon < |\langle f_0, u\rangle|^p = \lim_{k\to\infty} |\langle f_0, v_k\rangle|^p.$$

Таким образом, $[v_k]^p > [u]^p - \varepsilon$ при всех достаточно больших k. При тех же k имеем

$$G(v_k) > [u]^p - \varepsilon - p\,\langle F, v_k\rangle,$$

а так как $\langle F, v_k\rangle \to \langle F, u\rangle$, то

$$\inf\{G(v) : v \in W_p^1(\Omega)\} \geq [u]^p - \varepsilon - p\,\langle F, u\rangle.$$

В силу произвольности ε отсюда следует (1.8).

Итак, если функционал в правой части (1.5) непрерывен в $W_p^1(\Omega)$, то (1.5) верно для некоторой единственной функции $u \in W_p^1(\Omega)$ и всех $v \in W_p^1(\Omega)$. Таким образом, исследование разрешимости задачи (1.2) – (1.3) (или, что то же задачи (1.4) с функционалом f, ядро которого содержит $C_0^\infty(\Omega)$), а также разрешимости более общей задачи (1.5) сводится к описанию пространств $TW^1_p(\Omega)^*$ и $W^1_p(\Omega)^*$ соответственно. Ниже мы даем явное описание этих пространств для области с вершиной пика на границе.

Далее для области $\Omega \in C^{0,1}$ мы пишем $W^{-1}_{p'}(\Omega)$ вместо $W^1_p(\Omega)^*$, где $p' = p/(p-1)$, и полагаем

$$\|f\|_{W^{-1}_{p'}(\Omega)} = \sup\{|\langle f, v\rangle| : v \in W^1_p(\Omega), \|v\|_{W^1_p(\Omega)} = 1\}.$$

Для липшицевой поверхности S вместо $(W^{1-1/p}_p(S))^*$ мы будем писать $W^{-1/p'}_{p'}(S)$, где $p' = p/(p-1)$, и полагаем

$$\|f\|_{W^{-1/p'}_{p'}(S)} = \sup\{|\langle f, v\rangle| : v \in W^{1-1/p}_p(S), \|v\| = 1\}.$$

Пространство $W^1_p(\Omega)^*$ для области с внешним пиком характеризуется в терминах пространств $W^{-1}_{p'}$ на областях класса $C^{0,1}$, а также в терминах некоторых пространств функций на интервале $(0,1)$ числовой оси. Аналогично пространство $(TW^1_p(\Omega))^*$ для области с пиком характеризуется в терминах классов $W^{-1/p'}_{p'}$ на липшицевых поверхностях, и в терминах некоторых пространств функций на интервале $(0,1)$.

§ 2. Пространство $W^1_p(\Omega)^*$ для области с внешним пиком

Дадим описание области с внешним пиком. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ $(n > 2)$, точка O принадлежит $\partial\Omega$ и поверхность $\partial\Omega \setminus \{O\}$ может быть локально представлена графиком липшицевой функции. В точке O расположим начало декартовых координат $x = (y, z)$, $y \in \mathbf{R}^{n-1}$, $z \in \mathbf{R}^1$. Пусть φ – возрастающая функция из $C^{0,1}([0,1])$, такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) \to 0$ при $t \to +0$, и пусть ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^{n-1}$ класса $C^{0,1}$.

Определение. Точка O называется *вершиной пика, направленного во внешность* Ω, если существует окрестность U этой точки, для которой

$$U \cap \Omega = \{x = (y, z) : z \in (0,1),\ y/\varphi(z) \in \omega\}.$$

Для простоты изложения будем далее считать, что

$$\partial\Omega \cap U = \{x : 0 < z < 1, y/\varphi(z) \in \partial\omega\}. \tag{2.1}$$

Введем некоторые обозначения. Если $F \in W^1_p(\Omega)^*$ и λ – функция, удовлетворяющая условию Липшица на Ω, то мы полагаем

$$\langle \lambda F, v\rangle = \langle F, \lambda v\rangle, \quad v \in W^1_p(\Omega).$$

Для функции v, заданной на $\Omega \cap U$, определим ее среднее значение на сечении $z = \text{const}$

$$\tilde{v}(z) = \frac{1}{|\omega|}\int_\omega v(\varphi(z)y, z)dy, \tag{2.2}$$

где $|\omega|$ – площадь ω.

Если $F \in W_p^1(\Omega)^*$ и носитель функции $v \in W_p^1(\Omega)$ лежит в $\Omega \cap U$, то мы полагаем по определению $\langle \tilde{F}, v\rangle = \langle F, \tilde{v}\rangle$.

Далее важную роль играет некоторое специальное разбиение единицы на Ω. Построим последовательность $\{z_k\}$ по правилу

$$z_0 \in (0,1), \quad z_{k+1} + \varphi(z_{k+1}) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Ясно, что $\{z_k\}$ убывает, а, кроме того,

$$z_k \to 0, \quad z_{k+1}^{-1} z_k \to 1, \quad \varphi(z_{k+1})^{-1}\varphi(z_k) \to 1.$$

Рассмотрим гладкое разбиение единицы $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$ на промежутке $(0, z_1]$, подчиненное покрытию интервалами $\Delta_k = (z_{k+1}, z_{k-1})$, т.е. набор функций $\mu_k \in C_0^\infty(\Delta_k)$, удовлетворяющих требованиям

$$0 \leq \mu_k \leq 1, \quad \sum\nolimits_{k\geq 1} \mu_k(z) = 1, \quad z \in (0, z_1].$$

Указанное разбиение можно построить так, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\mu_k, \mathbf{R}^1 \setminus \Delta_k) \geq \mathrm{const} \cdot \varphi(z_k), \quad |\mu_k'| \leq \mathrm{const} \cdot \varphi(z_k)^{-1} \tag{2.3}$$

с константами, зависящими только от φ, а равенство $\sum_{k\geq 1} \mu_k(z) = 1$ было верно при $z \in (0, \delta]$ для некоторого $\delta > z_1$.

Введем еще набор функций $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$,

$$0 \leq \lambda_k \leq 1, \quad \lambda_k \in C_0^\infty(\Delta_k), \quad \lambda_k|_{\operatorname{supp}\mu_k} = 1.$$

Тогда $\lambda_k \mu_k = \mu_k$ при всех $k \geq 1$. Положим $\mu_0(z) = 0$ при $z < z_1$ и $\mu_0(z) = 1 - \mu_1(z)$ при $z \geq z_1$. При этом очевидно $\sum_{k\geq 0} \mu_k(z) = 1$ для всех $z \in (0, 1]$. Построенное разбиение единицы и набор функций $\{\lambda_k\}$ зависят только от функции φ. Далее мы считаем их фиксированными и не отмечаем зависимость от них фигурирующих ниже констант.

Введем области

$$\Omega_k = \{(y, z) \in \Omega \cap U : z \in \Delta_k\}, \quad \Delta_k = (z_{k+1}, z_{k-1}), \quad k = 1, 2 \dots$$

и положим еще

$$\Omega_0 = \Omega \setminus \{x \in \Omega \cap U : z \leq z_1\}.$$

Отметим, что построенное выше разбиение единицы на $(0, 1]$ индуцирует разбиение единицы на Ω, если определить $\mu_0 = 1$ на $\Omega_0 \setminus (\Omega \cap U)$ и $\mu_k(x) = \mu_k(z)$ при $x \in \Omega \cap U$, $k \geq 0$, а при $k \geq 1$ положить $\mu_k = 0$ на $\Omega \setminus U$. Построенное разбиение единицы в Ω подчинено покрытию $\{\Omega_k\}_{k\geq 0}$ в том смысле, что $\mu_k = 0$ на $\Omega \setminus \Omega_k$

Будем говорить, что носитель функционала $F \in W_p^1(\Omega)^*$ лежит в Ω_k (и писать $\operatorname{supp} F \subset \Omega_k$), если из того, что $v|_{\Omega_k} = 0$ следует $\langle F, v\rangle = 0$.

Нам потребуются некоторые оценки для среднего значения, определенного в (2.2).

Лемма 2. *Для* $v \in L_p(\Omega \cap U)$ *верна оценка*

$$\int_a^b |\tilde{v}(z)|^p \varphi(z)^{n-1} dz \le c \int_a^b dz \int_{\{y/\varphi(z) \in \omega\}} |v(y,z)|^p dy,$$

а для $v \in W_p^1(\Omega \cap U)$ *справедлива оценка*

$$\int_a^b |\tilde{v}'(z)|^p \varphi(z)^{n-1} dz \le c \int_a^b dz \int_{\{y/\varphi(z) \in \omega\}} |\nabla v(y,z)|^p dy, \tag{2.4}$$

где $0 \le a < b \le 1$, *а константы не зависят от* a, b, v.

Доказательство. Первая из требуемых оценок является простым следствием неравенства Гёльдера.

Установим (2.4). Покажем, что функция $(0,1) \ni z \mapsto \tilde{v}(z)$ абсолютно непрерывна и оценим ее производную. Отметим, что функция

$$\omega \times (0,1) \ni (y,z) \mapsto w(y,z) = v(\varphi(z)y, z)$$

принадлежит классу $W_p^1(\omega \times (\varepsilon, 1))$ при любом $\varepsilon \in (0,1)$. Следовательно, функция $w(y,\cdot)$ абсолютно непрерывна при п.в. $y \in \omega$. Отсюда для любой функции $\eta \in C_0^\infty(0,1)$ получаем

$$\int_0^1 \tilde{v}(z)\eta'(z) dz = -\frac{1}{|\omega|} \int_\omega dy \int_0^1 \frac{\partial w}{\partial z}(y,z)\eta(z) dz.$$

Таким образом, функция $\tilde{v}$ абсолютно непрерывна на интервале $(0,1)$, и при п.в. $z \in (0,1)$

$$\tilde{v}'(z) = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega \Big(\frac{\partial v}{\partial z}(\varphi(z)y, z) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial v}{\partial y_i}(\varphi(z)y, z)\varphi'(z) y_i \Big) dy.$$

С помощью неравенства Гёльдера найдем, что

$$\int_a^b |\tilde{v}'(z)|^p \varphi(z)^{n-1} dz \le$$

$$\le \frac{1}{|\omega|} \int_a^b \varphi(z)^{n-1} dz \int_\omega \left| \frac{\partial v}{\partial z}(\varphi(z)y, z) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial v}{\partial y_i}(\varphi(z)y, z)\varphi'(z) y_i \right|^p dy \le$$

$$\le c \int_a^b dz \int_{\varphi(z)\omega} |\nabla v(y,z)|^p dy \le c \, \|\nabla v\|_{L_p(\Omega)}^p.$$

Доказательство леммы закончено.

В формулируемой ниже теореме дается описание пространства $W_p^1(\Omega)^*$, сопряженного к $W_p^1(\Omega)$ для области с внешним пиком. Предварительно введем пространство $X_p(0,1)$ функций из $L_{p,loc}(0,1)$, характеризующихся конечностью нормы

$$\|u\|_{X_p(0,1)} = \left(\int_0^1 (|u(z)|^p + |u'(z)|^p)\varphi(z)^{n-1}dz\right)^{1/p}.$$

Теорема 1. *Пусть Ω – область с внешним пиком и $\{\mu_k\}_{k\geq 0}$ – построенное выше разбиение единицы на Ω.*
(i) *Пусть $F \in W_p^1(\Omega)^*$. Тогда F можно записать в виде суммы трех слагаемых*

$$F = \mu_0 F + (1-\mu_0)\tilde{F} + (1-\mu_0)(F-\tilde{F}) = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)}$$

из $W_p^1(\Omega)^*$ со следующими свойствами. Носитель $F^{(1)}$ лежит в Ω_0 и $F^{(1)} \in W_{p'}^{-1}(\Omega_0)$. Функционал $F^{(2)}$, определяемый формулой

$$W_p^1(\Omega) \ni v \mapsto \langle F^{(2)}, v\rangle = \langle F, (1-\mu_0)\tilde{v}\rangle,$$

имеет носитель в множестве $\{x \in \Omega\cap U : z \leq z_0\}$ и принадлежит пространству $X_p(0,1)^*$ в том смысле, что

$$|\langle F^{(2)}, v\rangle| \leq \mathrm{const}\cdot \|\tilde{v}\|_{X_p(0,1)}. \tag{2.5}$$

Функционал $F^{(3)}$ имеет носитель в $\{x \in \Omega\cap U : z \leq z_0\}$, верно представление

$$\langle F^{(3)}, v\rangle = \sum\nolimits_{k\geq 1}\langle \mu_k(F-\tilde{F}), v\rangle, \quad v \in W_p^1(\Omega),$$

и справедлива оценка

$$\left(\sum\nolimits_{k\geq 1}\|\mu_k(F-\tilde{F})\|^{p'}_{W_{p'}^{-1}(\Omega_k)}\right)^{1/p'} \leq c\,\|(1-\mu_0)(F-\tilde{F})\|_{W_p^1(\Omega)^*} \tag{2.6}$$

с константой, зависящей только от p, Ω.
(ii) *Предположим, что при $k \geq 1$ функционалы $F_k \in W_{p'}^{-1}(\Omega_k)$ удовлетворяют условиям $\operatorname{supp} F_k \subset \Omega_k$, F_k обращается в нуль на таких функциях $v \in W_p^1(\Omega_k)$, что $v(y,z)$ зависит только от z, и выполнено неравенство*

$$\sum\nolimits_{k\geq 1}\|\lambda_k F_k\|^{p'}_{W_{p'}^{-1}(\Omega_k)} < \infty. \tag{2.7}$$

Тогда функционал

$$W_p^1(\Omega) \ni v \mapsto \langle F^{(3)}, v\rangle = \sum\nolimits_{k\geq 1}\langle \lambda_k F_k, v\rangle \tag{2.8}$$

непрерывен, имеет носитель в $\{x \in \Omega\cap U : z \leq z_0\}$ и верна оценка

$$\|F^{(3)}\|_{W_p^1(\Omega)^*} \leq c\left(\sum\nolimits_{k\geq 1}\|\lambda_k F_k\|^{p'}_{W_{p'}^{-1}(\Omega_k)}\right)^{1/p'} \tag{2.9}$$

с константой, зависящей только от p, Ω. Пусть еще $h \in W_{p'}^{-1}(\Omega_0)$ и $g \in X_p(0,1)^*$. Положим $F^{(1)} = \mu_0 h$,

$$\langle F^{(2)}, v\rangle = \langle g, (1-\mu_0)\tilde{v}\rangle, \quad v \in W_p^1(\Omega), \tag{2.10}$$

Тогда $F^{(1)}$, $F^{(2)} \in W_p^1(\Omega)^*$, а также $F^{(1)} \in W_{p'}^{-1}(\Omega_0)$.

Доказательство. (i) Принадлежность $F^{(1)} = \mu_0 F \in W_p^1(\Omega)^*$ вытекает из оценок

$$|\langle F^{(1)}, v\rangle| = |\langle F, \mu_0 v\rangle| \le c\,\|F\|_{W_p^1(\Omega)^*}\|\mu_0 v\|_{W_p^1(\Omega_0)} \le c\,\|v\|_{W_p^1(\Omega_0)}.$$

Рассмотрим слагаемое $F^{(2)}$. Здесь

$$|\langle F^{(2)}, v\rangle| = |\langle F, (1-\mu_0)\tilde{v}\rangle| \le$$

$$\le c(F)\,\|(1-\mu_0)\tilde{v}\|_{W_p^1(\Omega\cap U)} \le c(F)\|\tilde{v}\|_{X_p(0,1)},$$

откуда следует (2.5).

Включение $F^{(3)} \in W_p^1(\Omega)^*$ вытекает из того, что $F^{(1)}$, $F^{(2)} \in W_p^1(\Omega)^*$. Для доказательства неравенства (2.6) при каждом $k = 1, 2, \dots$ выберем элемент $v_k \in W_p^1(\Omega_k)$ с нормой, не превосходящей единицы, так, чтобы

$$\|\mu_k(F-\tilde{F})\|_{W_{p'}^{-1}(\Omega_k)} \le 2\,\langle \mu_k(F-\tilde{F}), v_k\rangle.$$

Полагая $\alpha_k = \|\mu_k(F-\tilde{F})\|_{W_{p'}^{-1}(\Omega_k)}$, для любого натурального N получим

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^{p'} \le 2\sum_{k=1}^N \alpha_k^{p'-1}\langle \mu_k(F-\tilde{F}), v_k\rangle =$$

$$= 2\,\langle F-\tilde{F}, \sum_{k=1}^N \alpha_k^{p'-1}\mu_k(v_k - \mathring{v}_k)\rangle, \tag{2.11}$$

где $\mathring{v}_k$ – среднее значение функции v_k на области Ω_k. Очевидно, что $\mu_k = (1-\mu_0)\mu_k$ при $k \ge 2$. Имеем также $\mu_1 = (1-\mu_0)\mu_1$ на промежутке $[z_2, z_1]$ и $\mu_1 = 1 - \mu_0$ на промежутке $[z_1, z_0]$. Таким образом, μ_1 можно представить произведением $(1-\mu_0)\nu_1$, где

$$\nu_1(z) = \begin{cases} \mu_1(z), & z \in [z_2, z_1], \\ \lambda_1(z), & z \in [z_1, z_0]. \end{cases} \tag{2.12}$$

Напомним, что $\lambda_k \in C_0^\infty(\Delta_k)$ – набор функций, для которых $\mu_k\lambda_k = \mu_k$, $k = 1, 2, \dots$ Таким образом, $\nu_1 \in C_0^\infty(z_2, z_0)$, $0 \le \nu_1 \le 1$. Полагая $\nu_k = \mu_k$ при $k = 2, 3, \dots$, перепишем неравенство (2.11) в виде

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^{p'} \le 2\,\langle (1-\mu_0)(F-\tilde{F}), \sum_{k=1}^N \alpha_k^{p'-1}\nu_k(v_k - \mathring{v}_k)\rangle. \tag{2.13}$$

Считая, что $\nu_k(z)v_k(x)=0$ вне Ω_k, определим на Ω функцию

$$v(x)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^{p'-1}\nu_k(z)w_k(x),\quad w_k(x)=v_k(x)-\mathring{v}_k,$$

и оценим $\|v\|_{W_p^1(\Omega)}$. Так как каждая точка $x\in\Omega$ принадлежит не более чем двум областям Ω_k, $k\geq 1$, то

$$\|v\|^p_{W_p^1(\Omega)}\leq c\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^{(p'-1)p}\|\nu_k w_k\|^p_{W_p^1(\Omega_k)}. \tag{2.14}$$

Используя (2.3) и неравенство Пуанкаре

$$\|w_k\|_{L_p(\Omega_k)}\leq c\,\varphi(z_k)\|\nabla v_k\|_{L_p(\Omega_k)},$$

получим

$$\|\nu_k w_k\|^p_{W_p^1(\Omega_k)}\leq c\,\|\nabla v_k\|^p_{L_p(\Omega_k)}.$$

Принимая во внимание, что $\|\nabla v_k\|_{L_p(\Omega_k)}\leq 1$, выводим из (2.14) неравенство

$$\|v\|_{W_p^1(\Omega)}\leq c\left(\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^{(p'-1)p}\right)^{1/p}.$$

Объединяя последнее с (2.13), приходим к оценке

$$\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^{p'}\leq c\,\|(1-\mu_0)(F-\tilde{F})\|_{W_p^1(\Omega)^*}\left(\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^{p'}\right)^{1/p}$$

с константой, не зависящей от k,α_k,N. Отсюда следует (2.6).

(ii) Пусть $v\in W_p^1(\Omega)$. Тогда

$$\sum\nolimits_{k\geq 1}|\langle\lambda_k F_k,v\rangle|\leq\sum\nolimits_{k\geq 1}|\langle\lambda_k F_k,\sum\nolimits_{|k-i|\leq 1}\mu_i(v-\mathring{v}_k)\rangle|\leq$$

$$\leq\sum\nolimits_{k\geq 1}\sum\nolimits_{|k-i|\leq 1}\|\lambda_k F_k\|_{W_{p'}^{-1}(\Omega_k)}\|\mu_i(v-\mathring{v}_k)\|_{W_p^1(\Omega_k)},$$

где $\mathring{v}_k$ – среднее значение v на Ω_k. Так как $|k-i|\leq 1$, то

$$\|\mu_i(v-\mathring{v}_k)\|_{W_p^1(\Omega_k)}\leq c\,\|\nabla v\|_{L_p(\Omega_k)},$$

поэтому

$$\sum\nolimits_{k\geq 1}|\langle\lambda_k F_k,v\rangle|\leq$$

$$\leq c\left(\sum\nolimits_{k\geq 1}\|\lambda_k F_k\|^{p'}_{W_{p'}^{-1}(\Omega_k)}\right)^{1/p'}\left(\sum\nolimits_{k\geq 1}\|\nabla v\|^p_{L_p(\Omega_k)}\right)^{1/p}.$$

Итак, при условии (2.7) функционал (2.8) корректно определен и верно неравенство (2.9).

Пусть $h \in W_{p'}^{-1}(\Omega_0)$. Тогда

$$|\langle F^{(1)}, v\rangle| = |\langle h, \mu_0 v\rangle| \leq c(h)\, \|\mu_0 v\|_{W_p^1(\Omega_0)} \leq c(h)\, \|v\|_{W_p^1(\Omega_0)},$$

и, значит, $F^{(1)} \in W_{p'}^{-1}(\Omega_0)$.

Наконец, если $g \in X_p(0,1)^*$, то

$$|\langle F^{(2)}, v\rangle| = |\langle g, (1-\mu_0)\tilde{v}\rangle| \leq \|g\|_{X_p(0,1)^*} \|(1-\mu_0)\tilde{v}\|_{X_p(0,1)} \leq$$

$$\leq c(g) \left(\int_0^1 (|\tilde{v}(z)|^p + |\tilde{v}'(z)|^p)\varphi(z)^{n-1} dz \right)^{1/p}.$$

По лемме 2 правая часть последнего неравенства не больше $c(g)\, \|v\|_{W_p^1(\Omega\cap U)}$. Следовательно, $F^{(2)} \in W_p^1(\Omega)^*$. Доказательство теоремы закончено.

Отметим некоторые следствия доказанной теоремы. Объединяя сказанное в § 1 с теоремой 1, приходим к такому утверждению.

Следствие 1. *Пусть Ω – область с внешним пиком. Если задача* (1.5) *разрешима, то функционал F единственным образом продолжается до функционала, определенного на $W_p^1(\Omega)$ и представимого в виде суммы трех слагаемых $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ со свойствами, описанными в утверждении* (i) *теоремы. Обратно, если функционал F определен на $W_p^1(\Omega)$ и равен сумме трех слагаемых $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ со свойствами, описанными в утверждении* (ii) *теоремы, то задача* (1.5) *однозначно разрешима.*

Положительные величины a, b назовем эквивалентными (обозначение $a \sim b$), если $c_1 \leq a/b \leq c_2$ для некоторых положительных констант c_1, c_2, не зависящих от a, b.

Следствие 2. *Пусть F –линейный функционал, определенный на функциях из $W_p^1(\Omega)$, а функционал $\tilde{F}$ определен на функциях с носителем в $\Omega \cap U$ формулой*

$$\langle \tilde{F}, v\rangle = \langle F, \tilde{v}\rangle.$$

Тогда функционал $(1-\mu_0)(F-\tilde{F})$ непрерывен в $W_p^1(\Omega)$ в том и только в том случае, если

$$\sum\nolimits_{k\geq 1} \|\mu_k(F-\tilde{F})\|^{p'}_{W_{p'}^{-1}(\Omega_k)} < \infty. \tag{2.15}$$

При этом верно соотношение эквивалентности

$$\left(\sum\nolimits_{k\geq 1} \|\mu_k(F-\tilde{F})\|^{p'}_{W_{p'}^{-1}(\Omega_k)}\right)^{1/p'} \sim \|(1-\mu_0)(F-\tilde{F})\|_{W_p^1(\Omega)^*}.$$

Константы в этом соотношении зависят только от p, Ω.

Доказательство. Нижняя оценка для $\|(1-\mu_0)(F-\tilde{F})\|_{W_p^1(\Omega)^*}$ доказана в утверждении (i) теоремы. Установим верхнюю оценку. Рассмотрим при $k =$

$1, 2, \ldots$ функционалы $F_k = \mu_k(F - \tilde{F})$, удовлетворяющие условию (2.15). Ясно, что $\operatorname{supp} F_k \subset \Omega_k$ и F_k обращается в нуль на функциях из $W_p^1(\Omega_k)$, зависящих только от переменной z. Так как $\lambda_k \mu_k = \mu_k$, то $\lambda_k F_k = \mu_k(F - \tilde{F}) = F_k$, поэтому утверждение (ii) теоремы дает

$$\| \sum_{k \geq 1} F_k \|_{W_p^1(\Omega)^*} \leq c \left(\sum_{k \geq 1} \|F_k\|^{p'}_{W_{p'}^{-1}(\Omega_k)} \right)^{1/p'},$$

чем и завершается доказательство следствия.

Предыдущее утверждение позволяет доказать принадлежность $F - \tilde{F} \in W_p^1(\Omega)^*$ в случае $F \in L_{q'}(\Omega)$ с минимально возможным показателем q', а также установить непрерывность линейного отображения

$$W_p^1(\Omega) \ni v \mapsto v - \tilde{v} \in L_q(\Omega \cap U)$$

с максимальным соболевским показателем q.

Следствие 3. *Пусть $q = np/(n-p)$ при $p < n$, $q \in [p, \infty)$ при $p = n$ и $q = \infty$ при $p > n$. Пусть еще $q^{-1} + q'^{-1} = 1$. Если $F \in L_{q'}(\Omega)$, то функционал*

$$W_p^1(\Omega) \ni v \mapsto \langle (1 - \mu_0)(F - \tilde{F}), v \rangle = \int_\Omega (1 - \mu_0(x)) F(x)(v(x) - \tilde{v}(z))dx$$

принадлежит пространству $W_p^1(\Omega)^*$ и верна оценка

$$\|(1 - \mu_0)(F - \tilde{F})\|_{W_p^1(\Omega)^*} \leq c \, \|F\|_{L_{q'}(\Omega)} \tag{2.16}$$

с константой, не зависящей от F. Кроме того, для всех $v \in W_p^1(\Omega \cap U)$ справедлива оценка

$$\|v - \tilde{v}\|_{L_q(\partial\Omega \cap U)} \leq c \, \|v\|_{W_p^1(\Omega \cap U)} \tag{2.17}$$

с константой, не зависящей от v.

Доказательство. Согласно следствию 2 требуется оценить сумму в левой части (2.15). Если $v \in W_p^1(\Omega_k)$, $k \geq 1$, то в силу неравенства Гёльдера

$$|\langle \mu_k(F - \tilde{F}), v \rangle| = \left| \int_\Omega F(x) \mu_k(z)(v(x) - \tilde{v}(z))dx \right| \leq$$
$$\leq \|F\|_{L_{q'}(\Omega_k)} \|v - \tilde{v}\|_{L_q(\Omega_k)}. \tag{2.18}$$

Так как область Ω_k принадлежит классу $C^{0,1}$, то по теореме Соболева [3, § 8] для произвольной функции $u \in W_p^1(\Omega_k)$ верна оценка

$$\|u\|_{L_q(\Omega_k)} \leq c \, \varphi(z_k)^{\frac{n}{q} - \frac{n}{p}} \|u\|_{L_p(\Omega_k)} + c \, \varphi(z_k)^{1 + \frac{n}{q} - \frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L_p,(\Omega_k)}.$$

Рассмотрим сначала случай $p \in (1, n)$. Тогда, полагая в предыдущем неравенстве $u = v - \tilde{v}$, получим

$$\|v - \tilde{v}\|_{L_q(\Gamma_k)} \leq c \, \varphi(z_k)^{-1} \|v - \tilde{v}\|_{L_p(\Omega_k)} + c \, \|\nabla(v - \tilde{v})\|_{L_p(\Omega_k)}. \tag{2.19}$$

Используем неравенство Пуанкаре на каждом сечении области Ω_k плоскостью $z = \text{const}$. В результате найдем, что

$$\|v - \tilde{v}\|_{L_p(\Omega_k)} = \left(\int_{z_{k+1}}^{z_{k-1}} dz \int_{y/\varphi(z)\in\omega} |v(y,z) - \tilde{v}(z)|^p dy \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq c \left(\int_{z_{k+1}}^{z_{k-1}} \varphi(z)^p dz \int_{y/\varphi(z)\in\omega} |\nabla_y v(y,z)|^p dy \right)^{1/p}.$$

Отсюда первое слагаемое в правой части (2.19) не больше $c\,\|\nabla v\|_{L_p(\Omega_k)}$. По лемме 2 такую же мажоранту имеет и последнее слагаемое в (2.19). Итак, при $p < n$ имеем

$$\|v - \tilde{v}\|_{L_q(\Omega_k)} \leq c\,\|\nabla v\|_{L_p(\Omega_k)}, \quad k \geq 1. \tag{2.20}$$

Аналогичные рассуждения при $p \geq n$ приводят к оценке

$$\|v - \tilde{v}\|_{L_q(\Omega_k)} \leq c\,\varphi(z_k)^{\max\{\frac{n}{q}, 1-\frac{n}{p}\}} \|\nabla v\|_{L_p(\Omega_k)},$$

поэтому неравенство (2.20) выполнено и при $p \geq n$. Объединяя (2.18) и (2.20), получаем

$$\|\mu_k(F - \tilde{F})\|_{W_{p'}^{-1}(\Omega_k)} \leq c\,\|F\|_{L_{q'}(\Omega_k)}.$$

Теперь из следствия 2 вытекает оценка

$$\|(1-\mu_0)(F - \tilde{F})\|_{W_p^1(\Omega)^*} \leq c \left(\sum\nolimits_{k\geq 1} \|F\|^{p'}_{L_{q'}(\Omega_k)} \right)^{1/p'}. \tag{2.21}$$

Применяя алгебраическое неравенство

$$\left(\sum\nolimits_{k\geq 1} a_k^{\gamma} \right)^{1/\gamma} \leq \left(\sum\nolimits_{k\geq 1} a_k^{\beta} \right)^{1/\beta}, \quad a_k \geq 0, \;\; \gamma > \beta > 0, \tag{2.22}$$

и принимая во внимание, что $q' \leq p'$, мажорируем правую часть (2.21) выражением

$$\left(\sum\nolimits_{k\geq 1} \|F\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega_k)} \right)^{1/q'} \leq c\,\|F\|_{L_{q'}(\Omega)}.$$

Неравенство (2.16) установлено.

Перейдем к оценке (2.17). Из (2.20) с помощью (2.22) получим

$$\left(\int_{\Omega'} |v(x) - \tilde{v}(z)|^q dx \right)^{1/q} \leq \left(\sum\nolimits_{k\geq 1} \int_{\Omega_k} |v - \tilde{v}|^q dx \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq c \left(\sum\nolimits_{k\geq 1} \|\nabla v\|^p_{L_p(\Omega_k)} \right)^{1/p} \leq c\,\|\nabla v\|_{L_p(\Omega\cap U)},$$

где $\Omega' = \cup_{k\geq 1}\Omega_k$. Остается заметить, что оценка

$$\left(\int_{(\Omega\cap U)\setminus\bar{\Omega}'} |v(x) - \tilde{v}(z)|^q dx \right)^{1/q} \leq c\,\|\nabla v\|_{L_p(\Omega\cap U)}$$

выводится с помощью теоремы Соболева для области $(\Omega \cap U) \setminus \bar{\Omega}'$ класса $C^{0,1}$ и неравенства Пуанкаре на сечении области $\Omega \cap U$ плоскостью $z = \mathrm{const}$. Доказательство следствия закончено.

Объединяя теорему 1 и последнее следствие, можно сформулировать такое утверждение.

Предложение 1. *Пусть $p \le q \le pn/(n-p)$ при $p < n$, $q \in [p, \infty)$ при $p = n$ и $p \le q \le \infty$ при $p > n$. Пусть еще $q^{-1} + q'^{-1} = 1$. Для области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с внешним пиком следующие утверждения равносильны*

(A) *Задача Неймана (1.5) разрешима для всех $F \in L_{q'}(\Omega)$.*

(B) *Пространство $W_p^1(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$.*

(C) *Для всех $F \in L_{q'}(\Omega)$ функционал*

$$W_p^1(\Omega) \ni v \mapsto \int_\Omega F v dx$$

непрерывен.

(D) *Отображение $W_p^1(\Omega \cap U) \ni v \mapsto \tilde{v} \in L_q(\Omega)$ непрерывно.*

(E) *Для всех $u \in X_p(0,1)$, таких, что $u(1) = 0$, верна оценка*

$$\left(\int_0^1 |u(z)|^q \varphi(z)^{n-1} dz \right)^{1/q} \le \mathrm{const} \cdot \left(\int_0^1 |u'(z)|^p \varphi(z)^{n-1} dz \right)^{1/p}. \tag{2.23}$$

Доказательство. (A) $\to$ (B). Положим

$$V = \{ v \in W_p^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) : \|v\|_{W_p^1(\Omega)} \le 1 \}$$

и при каждом $v \in V$ рассмотрим функционал

$$L_{q'}(\Omega) \ni F \mapsto \Phi_v(F) = \int_\Omega F v dx.$$

Функционалы Φ_v непрерывны и в силу (1.5) точечно ограничены при $v \in V$. Следовательно, их нормы ограничены в совокупности. Отсюда $\|v\|_{L_q(\Omega)} \le \mathrm{const}$ для $v \in V$, и, значит,

$$\|v\|_{L_q(\Omega)} \le \mathrm{const} \cdot \|v\|_{W_p^1(\Omega)}$$

для всех $v \in W_p^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$. Так как последнее множество плотно в $W_p^1(\Omega)$, то предыдущее неравенство верно для всех $v \in W_p^1(\Omega)$.

(B) $\to$ (C). По неравенству Гёльдера для всех $F \in L_{q'}(\Omega)$ и $v \in W_p^1(\Omega)$ имеем

$$\left| \int_\Omega F v dx \right| \le \|F\|_{L_{q'}(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)} \le c \, \|F\|_{L_{q'}(\Omega)} \|v\|_{W_p^1(\Omega)},$$

следовательно, функционал $W_p^1(\Omega) \ni v \mapsto \int_\Omega F v dx$ непрерывен.

(C) $\to$ (A). Разрешимость задачи (1.5) при условии (C) доказана в § 1.

Равносильность утверждений (B) и (D) вытекает из следствия 3.

(D) $\to$ (E). Пусть $u \in X_p(0,1)$, $u(1)=0$. Положим $v(x)=u(z)$ при $x \in \Omega \cap U$. Тогда утверждение (D) дает

$$\left(\int_0^1 |u(z)|^q \varphi(z)^{n-1} dz\right)^{1/q} \leq c\left(\int_0^1 \left(|u'(z)|^p + |u(z)|^p\right) \varphi(z)^{n-1} dz\right)^{1/p}. \qquad (2.24)$$

Заметим, что имеет место "неравенство Фридрихса"

$$\int_0^1 |u(z)|^p \varphi(z)^{n-1} dz \leq \int_0^1 |u'(z)|^p \varphi(z)^{n-1} dz,$$

которое является простым следствием неравенства Гёльдера и монотонности функции φ. Таким образом, (2.23) вытекает из (2.24).

(E) $\to$ (D). Пусть λ – гладкая функция на промежутке (0,1), $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda(z)=1$ при $z \in (0,1/2]$, $\lambda(z)=0$ при $z \in [2/3,1)$. Пусть $v \in W_p^1(\Omega \cap U)$. Положим $u(z)=\tilde{v}(z)$. Тогда неравенство (2.23) в сочетании с леммой 2 дают

$$\left(\int_0^1 |\lambda(z)\tilde{v}(z)|^q \varphi(z)^{n-1} dz\right)^{1/q} \leq c\left(\int_0^1 \left|\frac{d}{dz}(\lambda\tilde{v})\right|^p dz\right)^{1/p} \leq c\,\|v\|_{W_p^1(\Omega\cap U)}.$$

Кроме того, из непрерывности вложения $W_p^1(1/2,1) \subset L_q(1/2,1)$ и той же леммы выводим

$$\left(\int_0^1 |(1-\lambda(z))\tilde{v}(z)|^q \varphi(z)^{n-1} dz\right)^{1/q} \leq c\left(\int_{1/2}^1 |\tilde{v}(z)|^q dz\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq c\,\|\tilde{v}\|_{W_p^1(1/2,1)} \leq c\left(\int_{1/2}^1 \left(|\tilde{v}(z)|^p + |\tilde{v}'(z)|^p\right) \varphi(z)^{n-1} dz\right)^{1/p} \leq c\,\|v\|_{W_p^1(\Omega\cap U)}.$$

Итак, $\|\tilde{v}\|_{L_q(\Omega\cap U)} \leq c\,\|v\|_{W_p^1(\Omega\cap U)}$. Доказательство предложения закончено.

Замечание 1. Используя хорошо известное условие справедливости весового неравенства Харди (2.23) (см., например, [5, 1.3]), дополним предложение 1 следующим образом: каждое из утверждений (A) – (E) равносильно неравенству[2]

$$\sup_{r\in(0,1)} \left(\int_0^r \varphi(z)^{n-1} dz\right)^{1/q} \left(\int_r^1 \varphi(z)^{\frac{1-n}{p-1}} dz\right)^{(p-1)/p} < \infty.$$

При $q=\infty$ его следует заменить неравенством

$$\int_0^1 \varphi(z)^{\frac{1-n}{p-1}} dz < \infty.$$

[2] впрочем, равносильность непрерывности оператора вложения: $W_p^1(\Omega) \to L_q(\Omega)$ тому же неравенству также хорошо известна [5, 4.8.5] и была получена с помощью емкостных изопериметрических неравенств.

§ 3 Вспомогательные утверждения

В этом параграфе установлены леммы, использующиеся при доказательстве теоремы 2 в § 4. Предварительно введем некоторые обозначения.

Пусть Ω – область с внешним пиком в смысле определения, данного в начале § 2. Для простоты изложения будем дополнительно предполагать, что область ω вместе с замыканием лежит в шаре $\{y : |y| < 1\}$, а также $\varphi'(z) \leq 1/2$ при п.в. $z \in (0,1)$. Кроме того, считая выполненным условие (2.1), положим

$$\Gamma = \{x = (y,z) : \, z \in (0,1), \, y/\varphi(z) \in \partial\omega\}.$$

Если $f \in TW_p^1(\Omega)^*$ и λ – функция, удовлетворяющая условию Липшица на $\partial\Omega$, то мы полагаем

$$\langle \lambda f, v \rangle = \langle f, \lambda v \rangle, \quad v \in TW_p^1(\Omega).$$

Для функции v, заданной на Γ, определим ее среднее значение на сечении Γ плоскостью $z = \mathrm{const}$

$$\bar{v}(z) = \frac{1}{|\gamma|} \int\limits_{\gamma} v(\varphi(z)y, z) d\gamma(y), \quad \gamma = \partial\omega, \tag{3.1}$$

где $|\gamma|$ – площадь γ.

Если $f \in TW_p^1(\Omega)^*$ и носитель функции $v \in TW_p^1(\Omega)$ лежит в Γ, то мы полагаем по определению $\langle \bar{f}, v \rangle = \langle f, \bar{v} \rangle$.

Мы будем использовать разбиение единицы $\{\mu_k\}_{k \geq 0}$ на промежутке $(0,1]$, построенное в § 2. Однако потребуем, чтобы, кроме условия (2.3), число z_0 было выбрано столь малым, что при $z < 2\,z_0$

$$\varphi(z - 2\varphi(z)) > 3\varphi(z)/4 \;\text{ и }\; \varphi(z) < z/4. \tag{3.2}$$

Введем поверхности

$$\Gamma_k = \{(y,z) \in \Gamma : z \in \Delta_k\}, \quad \Delta_k = (z_{k+1}, z_{k-1}), \quad k = 1, 2 \ldots$$

и положим еще

$$\Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \{x \in \overline{\Gamma} : z \leq z_1\}.$$

Отметим, что упомянутое разбиение единицы на $(0,1]$ индуцирует разбиение единицы на $\partial\Omega \setminus \{O\}$, если определить $\mu_0 = 1$ на $\Gamma_0 \setminus \Gamma$, $\mu_k(x) = \mu_k(z)$ при $x \in \Gamma_k \cap \Gamma$, $k \geq 0$, а при $k \geq 1$ положить $\mu_k = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Это разбиение единицы подчинено покрытию $\{\Gamma_k\}_{k \geq 0}$ в том смысле, что $\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\,\mu_k, \partial\Omega \setminus \Gamma_k) > 0$, $k \geq 0$. Пусть еще $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ – набор функций, для которых $\lambda_k \in C_0^\infty(\Delta_k)$ и $\lambda_k \mu_k = \mu_k$ при всех $k \geq 1$.

Будем говорить, что носитель функционала $f \in TW_p^1(\Omega)^*$ лежит в Γ_k (и писать $\mathrm{supp}\, f \subset \Gamma_k$), если из того, что $v|_{\Gamma_k} = 0$ следует $\langle f, v \rangle = 0$.

Отметим, что пространство $TW_p^1(\Omega)$ для области с внешним пиком допускает явное описание (см. [7], [4], [8, 7.2]): оно состоит из функций на $\partial\Omega$, характеризующихся конечностью нормы

$$\left(\|v\|^p_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_0)} + \int_\Gamma |v(x)|^p\varphi(z)ds_x + |v|^p_{p,\Gamma}\right)^{1/p}, \tag{3.3}$$

где

$$|v|_{p,\Gamma} = \left(\iint\limits_{\Gamma\times\Gamma} |v(x)-v(\xi)|^p\chi\left(\frac{|z-\zeta|}{M(z,\zeta)}\right)\frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}\right)^{1/p}, \tag{3.4}$$

$x = (y,z), \xi = (\eta,\zeta)$, $M(z,\zeta) = \max\{\varphi(z),\varphi(\zeta)\}$, χ – характеристическая функция промежутка $(0,1)$, а ds_x, ds_ξ – элементы площади на Γ. При этом норма (3.3) эквивалентна норме в пространстве $TW_p^1(\Omega)$. Эквивалентность норм сохранится, если в (3.3) поверхность Γ_0 заменить поверхностью $\partial\Omega\backslash\{x\in\overline{\Gamma} : z\le\delta\}$, $\delta\in(0,1)$, и опустить интеграл по Γ (см. [7]).

Нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 3. *Для $v \in L_{p,loc}(0,1)$ верно соотношение эквивалентности*

$$\iint\limits_{\Gamma\times\Gamma} |v(z)-v(\zeta)|^p\chi\left(\frac{|z-\zeta|}{M(z,\zeta)}\right)\frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}} \sim$$

$$\sim \iint\limits_{\{z,\zeta\in(0,1)\}} |v(z)-v(\zeta)|^p\frac{M(z,\zeta)^{n-2}}{|z-\zeta|^p}\chi\left(\frac{|z-\zeta|}{M(z,\zeta)}\right)dzd\zeta \tag{3.5}$$

с константами, не зависящими от v, а для $v\in TW_p^1(\Omega)$ верна оценка

$$|\bar{v}|_{p,\Gamma} \le c(p,\Omega)\,\|v\|_{TW_p^1(\Omega)}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Левая часть (3.5) эквивалентна величине

$$\int\limits_0^1 dz\int\limits_{z-\varphi(z)}^{z} |v(z)-v(\zeta)|^p(\varphi(z)\varphi(\zeta))^{n-2}d\zeta \iint\limits_{\gamma\times\gamma}\frac{d\gamma(y)d\gamma(\eta)}{(|z-\zeta|+|\varphi(z)y-\varphi(\zeta)\eta|)^{n+p-2}},$$

а, кроме того, при $y,\eta\in\gamma$ имеем

$$|z-\zeta|+|\varphi(z)y-\varphi(\zeta)\eta| \sim |z-\zeta|+\varphi(\zeta)|y-\eta|.$$

Отсюда

$$(\varphi(z)\varphi(\zeta))^{n-2}\iint\limits_{\gamma\times\gamma}\frac{d\gamma(y)d\gamma(\eta)}{(|z-\zeta|+|\varphi(z)y-\varphi(\zeta)\eta|)^{n+p-2}} \sim$$

$$\sim \frac{(\varphi(z)\varphi(\zeta))^{n-2}}{|z-\zeta|^{n+p-2}}\int\limits_\gamma d\gamma(y)\int\limits_\gamma\frac{d\gamma(\eta)}{(1+\lambda|y-\eta|)^{n+p-2}}, \tag{3.7}$$

где $\lambda = \varphi(\zeta)|z-\zeta|^{-1}$. При фиксированном $y \in \gamma$ сделаем в последнем интеграле по γ замену $\eta = y + \lambda^{-1}t$. В результате выражение в правой части (3.7) перепишется в виде

$$\frac{\varphi(z)^{n-2}}{|z-\zeta|^p}\int_\gamma d\gamma(y)\int_{S_\lambda}\frac{dS_\lambda(t)}{(1+|t|)^{n+p-2}}.$$

Здесь через S_λ обозначена поверхность $t : t/\lambda + y \in \gamma$, а $dS_\lambda(t)$ – элемент $(n-2)$-мерной площади. Остается заметить, что при условии $|z-\zeta| < M(z,\zeta)$ имеем $\varphi(z) \sim \varphi(\zeta)$, поэтому $\lambda \geq \mathrm{const} > 0$, и последний интеграл ограничен сверху и снизу равномерно относительно λ.

Обратимся к оценке (3.6). Так как из (3.1) с помощью неравенства Гёльдера выводится оценка

$$|\bar v(z) - \bar v(\zeta)|^p \leq c\int_\gamma |v(\varphi(z)y, z) - v(\varphi(\zeta)y,\zeta)|^p d\gamma(y),$$

то в силу (3.5) достаточно установить неравенство

$$I_\gamma(v) \leq c\,\|v\|_{TW_p^1(\Omega)}, \tag{3.8}$$

где

$$I_\gamma(v)^p = \int\limits_0^1 \varphi(z)^{n-2}dz\int\limits_{z-\varphi(z)}^{z}\frac{d\zeta}{|z-\zeta|^p}\int_\gamma |v(\varphi(z)y,z) - v(\varphi(\zeta)y,\zeta)|^p d\gamma(y).$$

Предположим, что $v = u|_{\partial\Omega}$ для некоторой функции $u \in W_p^1(\Omega)$ и докажем оценку

$$I_\gamma(v) \leq c\,\|\nabla u\|_{L_p(\Omega\cap U)}. \tag{3.9}$$

Такая оценка известна, если $\omega = \{y : |y| < 1\}$ (см. лемма 7.5/3, неравенство (7.5/16) в [8]). В случае когда ω звездна относительно шара с центром в начале координат доказательство оценки (3.9) почти слово в слово повторяет рассуждения для случая $\omega = \{y : |y| < 1\}$. Мы их опустим. Предположим, что ω звездна относительно шара с центром в точке $y_0 \in \omega$, $y_0 \neq 0$. Тогда преобразование

$$x = (y,z) \mapsto x' = (y',z') :\ z' = z,\ y' = y - \varphi(z)y_0,$$

переводит область $\Omega \cap U$ в

$$\Omega' = \{(y',z') :\ z' \in (0,1),\ y'/\varphi(z') \in \omega - y_0\}$$

со звездной относительно шара с центром в нуле областью $\omega - y_0$. Определенная в Ω' функция

$$\Omega' \ni (y',z') \mapsto \tilde u(y',z') = u(y' + \varphi(z')y_0, z')$$

принадлежит $W_p^1(\Omega')$, а так как $|\nabla_{x'}\tilde{u}| \sim |\nabla_x u|$ и $dx' = dx$, то

$$\|\nabla\tilde{u}\|_{L_p(\Omega')} \sim \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Кроме того,

$$I_\gamma(v) = I_{\gamma-y_0}(\tilde{v}), \quad \tilde{v} = \tilde{u}|_{\partial\Omega'}.$$

В силу вышесказанного имеем

$$I_\gamma(v) = I_{\gamma-y_0}(\tilde{v}) \le c\,\|\nabla\tilde{u}\|_{L_p(\Omega')} \le c\,\|\nabla u\|_{L_p(\Omega\cap U)}.$$

Пусть, наконец, область ω является объединением конечного числа областей, звездных относительно шара: $\omega = \cup_{i=1}^N \omega_i$. В этом случае $\gamma = \partial\omega \subset \cup_{i=1}^N \gamma_i$, $\gamma_i = \partial\omega_i$ и, значит,

$$I_\gamma(v)^p \le \sum_{i=1}^N I_{\gamma_i}(v)^p \le c\,\|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega\cap U)}.$$

Остается заметить, что область $\omega \in C^{0,1}$ представляется конечным объединением областей, звездных относительно шара [6]. Итак, оценка (3.9) установлена. Чтобы получить (3.8) для функций из $TW_p^1(\Omega)$, продолжим данную функцию v с конечной нормой $\|v\|_{TW_p^1(\Omega)}$ внутрь Ω так, чтобы для ее продолжения u выполнялась оценка

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \le c\,\|v\|_{TW_p^1(\Omega)}.$$

Тогда (3.8) следует из (3.9). Лемма доказана.

Лемма 4. *Для функций $v \in TW_p^1(\Omega)$, $v(x) = 0$ при $x \in \Gamma,\ z > z_0$, полунорма $|v|_{p,\Gamma}$ эквивалентна полунорме*

$$\left(\iint\limits_{\Gamma\times\Gamma} |v(x) - v(\xi)|^p \chi\left(\frac{|z-\zeta|}{2\,M(z,\zeta)}\right) \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}} \right)^{1/p},$$

где приняты те же обозначения, что и в (3.4).

Доказательство. Достаточно установить оценку

$$\iint\limits_S |v(x) - v(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}} \le c\,|v|^p_{p,\Gamma}, \tag{3.10}$$

в левой части которой интегрирование производится по множеству

$$S = \{(x,\xi) \in \Gamma\times\Gamma :\ \varphi(z) < z - \zeta < 2\varphi(z)\}.$$

Так как $v(x) = 0$ при $z > z_0$, то подынтегральная функция в (3.10) отлична от нуля только если $z - 2\varphi(z) < z_0$. Поскольку функция $z \mapsto z - 2\,\varphi(z)$ монотонна и ее значение при $z = 2\,z_0$ не меньше z_0 в силу (3.2), то указанное неравенство верно только при $z < 2\,z_0$. Отметим еще, что $|x-\xi| \sim \varphi(z)$ при $(x,\xi) \in S$. Установим (3.10) с помощью т.н. фиктивного интегрирования. Введем точки

$$x' = (y', z') \in \Gamma : \ z' \in \delta_1(z) = (z - \varphi(z), z - 3\varphi(z)/4),$$
$$\xi' = (\eta', \zeta') \in \Gamma : \ \zeta' \in \delta_2(z) = (z - 3\varphi(z)/2, z - 5\varphi(z)/4),$$

Тогда

$$0 < z - z' < \varphi(z) = M(z, \zeta). \tag{3.11}$$

Ввиду (3.2) также имеем

$$0 < z' - \zeta' < 3\varphi(z)/4 < \varphi(z - 3\varphi(z)/2) < \varphi(z') = M(z', \zeta') \tag{3.12}$$

и

$$|\zeta' - \zeta| \le 3\varphi(z)/4 < \varphi(\zeta') \le M(\zeta, \zeta'). \tag{3.13}$$

Интегрируя неравенство

$$c\,|v(x) - v(\xi)|^p \le |v(x) - v(x')|^p + |v(x') - v(\xi')|^p + |v(\xi') - v(\xi)|^p$$

по переменным x', ξ' и замечая, что каждая из величин

$$|x - x'|, \ |x' - \xi'|, \ |\xi' - \xi|$$

не превосходит величины $c\,|x-\xi|$, эквивалентной $\varphi(z)$, получим

$$c\,\frac{|v(x) - v(\xi)|^p}{|x-\xi|^{n+p-2}} \le \frac{1}{\varphi(z)^{n-1}} \int_{\{x' \in \Gamma : z' \in \delta_1(z)\}} |v(x') - v(x)|^p \frac{ds_{x'}}{|x'-x|^{n+p-2}} +$$
$$+ \frac{1}{\varphi(z)^{2(n-1)}} \iint\limits_{\{x', \xi' \in \Gamma : z' \in \delta_1(z), \zeta' \in \delta_2(z)\}} |v(x') - v(\xi')|^p \frac{ds_{x'} ds_{\xi'}}{|x'-\xi'|^{n+p-2}} +$$
$$+ \frac{1}{\varphi(z)^{n-1}} \int_{\{\xi' \in \Gamma : \zeta' \in \delta_2(z)\}} |v(\xi') - v(\xi)|^p \frac{ds_{\xi'}}{|\xi'-\xi|^{n+p-2}}.$$

Проинтегрируем полученное неравенство по множеству S. Принимая во внимание (3.11) – (3.13) и меняя порядок интегрирования, придем к (3.10). Доказательство леммы закончено.

Замечание 2. Из вида нормы (3.3) следует, что линейное отображение $TW_p^1(\Omega) \ni v \mapsto \psi v \in TW_p^1(\Omega)$ непрерывно, если ψ удовлетворяет условию Липшица на $\partial\Omega$ [3].

---

[3]к тому же выводу мы придем в общем случае, если используем следующий факт: функцию с условием Липшица на $\partial\Omega$ можно продолжить до липшицевой функции на $\mathbf{R}^n$ с той же константой Липшица и тем же максимумом модуля (см. И. Стейн [9], гл. VI, § 2). Тогда

$$\|\psi v\|_{TW_p^1(\Omega)} = \inf\{\|u\|_{W_p^1(\Omega)} : u|_{\partial\Omega} = \psi v\} \le \inf\{\|\psi u\|_{W_p^1(\Omega)} : u|_{\partial\Omega} = v\} \le$$
$$\le c(\psi) \inf\{\|u\|_{W_p^1(\Omega)} : u|_{\partial\Omega} = v\} = c(\psi)\|v\|_{TW_p^1(\Omega)}.$$

В дальнейшем нам понадобится аналог неравенства Пуанкаре для функций, определенных на поверхности. Пусть σ – измеримое подмножество границы области класса $C^{0,1}$ с положительной площадью $|\sigma|$.

Лемма 5. *Если $v \in L_p(\sigma)$, $1 < p < \infty$, то*

$$\|v - \tilde{v}\|^p_{L_p(\sigma)} \leq (\operatorname{diam} \sigma)^{n+p-2} |\sigma|^{-1} [v]^p_{p,\sigma},$$

где $\tilde{v}$ – среднее значение функции v на σ:

$$\tilde{v} = |\sigma|^{-1} \int_\sigma v(x) ds_x$$

и $[\cdot]_{p,\sigma}$ – полунорма, определенная в (1.1).

Сформулированное утверждение легко доказывается с помощью неравенства Гёльдера.

Установим еще два утверждения технического характера.

Лемма 6. *Если Ω – область с внешним пиком и $v \in TW^1_p(\Omega)$, то в обозначениях, принятых в* (3.4), *верна оценка*

$$\iint\limits_{\Gamma\times\Gamma} |\mu_0(z) v(x) - \mu_0(\zeta) v(\xi)|^p \chi\left(\frac{|z-\zeta|}{2\, M(z,\zeta)}\right) \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}} \leq$$

$$\leq c\, \|v\|^p_{W^{1-1/p}_p(\Gamma_0)}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Левая часть в (3.14) не превосходит суммы $c\, I_1 + c\, I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_\Gamma |v(x)|^p ds_x \int\limits_{\{\xi\in\Gamma : \zeta \in (z-2\varphi(z), z)\}} \frac{|\mu_0(z) - \mu_0(\zeta)|^p ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}},$$

$$I_2 = \int\limits_\Gamma ds_x \int\limits_{\{\xi\in\Gamma : \zeta \in (z-2\varphi(z), z)\}} \frac{\mu_0(\zeta)^p |v(x) - v(\xi)|^p ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}.$$

Так как $\mu_0(z) = \mu_0(\zeta) = 0$ при $z, \zeta \in (0, z_1)$, то

$$I_1 \leq c \int\limits_{\{x\in\Gamma : z > z_1\}} |v(x)|^p ds_x \int\limits_{\{\xi\in\Gamma : \zeta\in(z-2\varphi(z), z)\}} \frac{ds_\xi}{|x-\xi|^{n-2}}.$$

Последний интеграл по переменной ξ не больше $c\,\varphi(z)$, откуда $I_1 \leq c\, \|v\|^p_{L_p(\Gamma_0)}$. Далее, в силу условия $\mu_0(\zeta) = 0$ при $\zeta < z_1$ интегрирование в I_2 фактически производится по множеству $z > \zeta > z_1$. Поэтому $I_2 \leq c\, [v]^p_{p,\Gamma_0}$, где $[\cdot]_{p,\Gamma_0}$ – полунорма, определенная в (1.1). Отсюда следует (3.14).

Замечание 3. Из (3.14), в частности, следует, что для $v \in TW^1_p(\Omega)$ верна оценка

$$\|\mu_0 v\|_{TW^1_p(\Omega)} \leq \text{const} \cdot \|v\|_{W^{1-1/p}_p(\Gamma_0)}.$$

Лемма 7. *Пусть Ω – область с внешним пиком, $v \in TW_p^1(\Omega)$ и $v(x) = 0$ вне множества $\{x \in \Gamma : z \le z_0\}$. Тогда $\|v\|_{TW_p^1(\Omega)} \sim |v|_{p,\Gamma}$, где $|\cdot|_{p,\Gamma}$ – полунорма, определенная в* (3.4).

Доказательство. Используем следующий факт: если функция w определена на Γ, $w(x) = 0$ при $z > z_0$ и $|w|_{p,\Gamma} < \infty$, то существует такое линейное отображение $w \mapsto Ev = u \in W_p^1(\Omega)(\Omega \cap U)$ что $u|_\Gamma = w$, $u(y,z) = 0$ в окрестности $z = 1$ и

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega\cap U)} \le c\,|w|_{p,\Gamma}$$

с константой, не зависящей от w (см. [8], замечание 7.2/3). Положим $u = Ev$ на $\Omega \cap U$ и $u = 0$ на $\Omega \setminus U$. Тогда $u \in W_p^1(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega} = v$ и

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \le c\,|v|_{p,\Gamma}.$$

С другой стороны, по определению нормы в пространстве $TW_p^1(\Omega)$ верна оценка

$$\|v\|_{TW_p^1(\Omega)} \le c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)}.$$

Отсюда получаем $\|v\|_{TW_p^1(\Omega)} \le c\,|v|_{p,\Gamma}$. Обратное неравенство очевидно.

§ 4. Пространство $TW_p^1(\Omega)^*$ для области с внешним пиком

В формулируемой ниже теореме дается описание пространства $TW_p^1(\Omega)^*$, сопряженного к $TW_p^1(\Omega)$ для области с внешним пиком. Предварительно введем пространство $Y_p(0,1)$ функций из $L_{p,loc}(0,1)$, характеризующихся конечностью нормы

$$\|u\|_{Y_p(0,1)} = \Big(\int_0^1 |u(z)|^p \varphi(z)^{n-1} dz +$$

$$+ \iint\limits_{\{z,\zeta\in(0,1)\}} |u(z) - u(\zeta)|^p \frac{M(z,\zeta)^{n-2}}{|z-\zeta|^p} \chi\left(\frac{|z-\zeta|}{M(z,\zeta)}\right) dz d\zeta \Big)^{1/p},$$

где, как и выше, $M(z,\zeta) = \max\{\varphi(z), \varphi(\zeta)\}$, а χ – характеристическая функция промежутка $(0,1)$.

Теорема 2. *Пусть Ω – область с внешним пиком и $\{\mu_k\}_{k\ge 0}$ – построенное выше разбиение единицы на $\partial\Omega \setminus \{O\}$.*
(i) *Пусть $f \in TW_p^1(\Omega)^*$. Тогда f можно записать в виде суммы трех слагаемых*

$$f = \mu_0 f + (1-\mu_0)\bar{f} + (1-\mu_0)(f - \bar{f}) = f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)}$$

из $TW_p^1(\Omega)^*$ со следующими свойствами. Носитель $f^{(1)}$ лежит в Γ_0 и $f^{(1)} \in W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_0)$. Функционал $f^{(2)}$, определяемый формулой

$$TW_p^1(\Omega) \ni v \mapsto \langle f^{(2)}, v\rangle = \langle f, (1-\mu_0)\bar{v}\rangle,$$

имеет носитель в множестве $\{x \in \Gamma : z \le z_0\}$ и принадлежит пространству $Y_p(0,1)^*$ в том смысле, что

$$|\langle f^{(2)}, v\rangle| \le \mathrm{const} \cdot \|\bar{v}\|_{Y_p(0,1)}. \tag{4.1}$$

Функционал $f^{(3)}$ имеет носитель в $\{x \in \Gamma : z \le z_0\}$, верно представление

$$\langle f^{(3)}, v\rangle = \textstyle\sum_{k\ge 1} \langle \mu_k(f - \bar{f}), v\rangle, \quad v \in TW_p^1(\Omega),$$

и справедлива оценка

$$\left(\textstyle\sum_{k\ge 1} \|\mu_k(f-\bar{f})\|^{p'}_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_k)}\right)^{1/p'} \le c\,\|(1-\mu_0)(f-\bar{f})\|_{TW_p^1(\Omega)^*} \tag{4.2}$$

с константой, зависящей только от p, Ω.

(ii) *Предположим, что при $k \ge 1$ функционалы $f_k \in W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_k)$ удовлетворяют условиям $\operatorname{supp} f_k \subset \Gamma_k$, f_k обращается в нуль на таких функциях $v \in W_p^{1-1/p}(\Gamma_k)$, что $v(y,z)$ зависит только от z, и выполнено неравенство*

$$\textstyle\sum_{k\ge 1} \|\lambda_k f_k\|^{p'}_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_k)} < \infty. \tag{4.3}$$

Тогда функционал

$$TW_p^1(\Omega) \ni v \mapsto \langle f^{(3)}, v\rangle = \textstyle\sum_{k\ge 1} \langle \lambda_k f_k, v\rangle \tag{4.4}$$

непрерывен, имеет носитель в $\{x \in \Gamma : z \le z_0\}$ и верна оценка

$$\|f^{(3)}\|_{TW_p^1(\Omega)^*} \le c\left(\textstyle\sum_{k\ge 1} \|\lambda_k f_k\|^{p'}_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_k)}\right)^{1/p'} \tag{4.5}$$

с константой, зависящей только от p, Ω. Пусть еще $h \in W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_0)$ и $g \in Y_p(0,1)^*$. Положим $f^{(1)} = \mu_0 h$,

$$\langle f^{(2)}, v\rangle = \langle g, (1-\mu_0)\bar{v}\rangle, \quad v \in TW_p^1(\Omega), \tag{4.6}$$

Тогда $f^{(1)}$, $f^{(2)} \in TW_p^1(\Omega)^*$, а также $f^{(1)} \in W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_0)$.

Доказательство. (i) Принадлежность $f^{(1)} = \mu_0 f \in TW_p^1(\Omega)^*$ вытекает из замечания 2. Кроме того,

$$|\langle f^{(1)}, v\rangle| = |\langle f, \mu_0 v\rangle| \le c\,\|f\|_{TW_p^1(\Omega)^*}\|\mu_0 v\|_{TW_p^1(\Omega)}.$$

Так как $\|\mu_0 v\|_{TW_p^1(\Omega)} \le c\,\|v\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_0)}$ (см. замечание 3 перед леммой 7), то $f^{(1)} \in W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_0)$.

Рассмотрим слагаемое $f^{(2)}$. Здесь

$$|\langle f^{(2)}, v\rangle| = |\langle f, (1-\mu_0)\bar{v}\rangle|, \tag{4.7}$$

где $\bar{v} = \bar{v}(z)$ – среднее значение функции $v|_\Gamma$, определенное в (3.1). Используя непрерывность f и лемму 7, убедимся, что величина (4.7) оценивается сверху выражением $c(f)|(1-\mu_0)v|_{p,\Gamma}$ (полунорма $|\cdot|_{p,\Gamma}$ определена в (3.4)). Применяя лемму 3, получим мажоранту для p-ой степени величины (4.7) в виде

$$c\iint\limits_S |(1-\mu_0(z))\bar{v}(z) - (1-\mu_0(\zeta))\bar{v}(\zeta)|^p M(z,\zeta)^{n-2}\frac{dzd\zeta}{|z-\zeta|^p}, \tag{4.8}$$

где $S = \{(z,\zeta) \in (0,1)\times(0,1) : |z-\zeta| < M(z,\zeta)\}$. Выражение (4.8) оценим сверху суммой

$$c\iint\limits_S \frac{|\bar{v}(z)-\bar{v}(\zeta)|^p}{|z-\zeta|^p} M(z,\zeta)^{n-2}dzd\zeta +$$

$$+c\iint\limits_S \frac{|\mu_0(z)-\mu_0(\zeta)|^p}{|z-\zeta|^p}|\bar{v}(z)|^p M(z,\zeta)^{n-2}dzd\zeta.$$

Последнее слагаемое не больше

$$c\int_0^1 \bar{v}(z)^p\varphi(z)^{n-1}dz,$$

что не превосходит $c\int_\Gamma |v(x)|^p\varphi(z)ds_x$, и мы приходим к оценке (4.1) с константой, не зависящей от v. Остается заметить, что правая часть в (4.1) не больше $c\|v\|_{TW_p^1(\Omega)}$ ввиду леммы 3. Отсюда $f^{(2)} \in TW_p^1(\Omega)^*$.

Рассмотрим теперь $f^{(3)}$. Принадлежность $f^{(3)} \in TW_p^1(\Omega)^*$ вытекает из того, что $f^{(1)}$, $f^{(2)} \in TW_p^1(\Omega)^*$. Для доказательства неравенства (4.2) при каждом $k = 1, 2, \dots$ выберем $v_k \in W_p^{1-1/p}(\Gamma_k)$ с нормой, не превосходящей единицы, так, чтобы

$$\|\mu_k(f-\bar{f})\|_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_k)} \le 2\,\langle \mu_k(f-\bar{f}), v_k\rangle.$$

Полагая $\alpha_k = \|\mu_k(f-\bar{f})\|_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_k)}$, для любого натурального N получим

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^{p'} \le 2\sum_{k=1}^N \alpha_k^{p'-1}\langle \mu_k(f-\bar{f}), v_k\rangle =$$

$$= 2\,\langle f-\bar{f}, \sum_{k=1}^N \alpha_k^{p'-1}\mu_k(v_k - \mathring{v}_k)\rangle, \tag{4.9}$$

где $\mathring{v}_k$ – среднее значение функции v_k на поверхности Γ_k. При $k \ge 2$ имеем $\mu_k = (1-\mu_0)\mu_k$ и $\mu_1 = (1-\mu_0)\nu_1$, где функция ν_1 определена в (2.12). Полагая $\nu_k = \mu_k$ при $k = 2, 3, \dots$, перепишем неравенство (4.9) в виде

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^{p'} \le 2\,\langle (1-\mu_0)(f-\bar{f}), \sum_{k=1}^N \alpha_k^{p'-1}\nu_k(v_k-\mathring{v}_k)\rangle. \tag{4.10}$$

Считая, что $\nu_k(z)v_k(x)=0$ вне Γ_k, определим на $\partial\Omega$ функцию

$$v(x)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^{p'-1}\nu_k(z)w_k(x),\quad w_k(x)=v_k(x)-\mathring{v}_k,$$

и оценим $\|v\|_{TW^1_p(\Omega)}$. Так как $\operatorname{supp} v\subset\{x\in\Gamma : z\le z_0\}$, то по лемме 7 достаточно оценить полунорму $|v|_{p,\Gamma}$. Пусть $x,\xi\in\Gamma$. Имеем

$$v(x)-v(\xi)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^{p'-1}\left(\nu_k(z)w_k(x)-\nu_k(\zeta)w_k(\xi)\right),$$

причем в последней сумме присутствуют не более четырех ненулевых слагаемых. Отсюда

$$|v(x)-v(\xi)|^p\le c\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^{(p'-1)p}\left|\nu_k(z)w_k(x)-\nu_k(\zeta)w_k(\xi)\right|^p,$$

и, значит,

$$|v|^p_{p,\Gamma}\le c\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^{(p'-1)p}|\nu_k w_k|^p_{p,\Gamma}. \tag{4.11}$$

Заметим , что функция

$$\Gamma\times\Gamma\ni(x,\xi)\mapsto\nu_k(z)w_k(x)-\nu_k(\zeta)w_k(\xi)$$

равна нулю, если $x\notin\Gamma_k$ и $\xi\notin\Gamma_k$. Поэтому

$$\begin{gathered}|\nu_k w_k|^p_{p,\Gamma}\le c\,[\nu_k w_k]^p_{p,\Gamma_k}+\\ +c\int\limits_{\Gamma_k}|\nu_k(z)w_k(x)|^p ds_x\int\limits_{\{\xi\notin\Gamma_k:|z-\zeta|<M(z,\zeta)\}}|x-\xi|^{2-p-n}ds_\xi,\end{gathered}\tag{4.12}$$

где $[\cdot]_{p,\Gamma_k}$ – полунорма, определенная в (1.1). Далее, при $z\in\operatorname{supp}\nu_k$ и $\zeta\notin\Delta_k$ в силу (2.3) имеем $|z-\zeta|\ge c\,\varphi(z_k)$, так что в последнем интеграле $|x-\xi|\sim\varphi(z_k)$. Тем самым второе слагаемое в правой части (4.12) не больше

$$c\,\varphi(z_k)^{1-p}\int_{\Gamma_k}|v_k(x)-\mathring{v}_k|^p ds_x \tag{4.13}$$

с константой, не зависящей от k и функции v_k. Наконец, в силу леммы 5 выражение (4.13) не больше $c\,[v_k]^p_{p,\Gamma_k}$.

Для оценки величины $[\nu_k w_k]_{p,\Gamma_k}$ используем неравенство

$$[\nu_k w_k]^p_{p,\Gamma_k}\le c\,[v_k]^p_{p,\Gamma_k}+c\int\limits_{\Gamma_k}|v_k(x)-\mathring{v}_k|^p ds_x\int\limits_{\Gamma_k}\frac{|\nu_k(z)-\nu_k(\zeta)|^p}{|x-\xi|^{n+p-2}}ds_\xi. \tag{4.14}$$

Ввиду (2.3)

$$|\nu_k(z)-\nu_k(\zeta)|\le c\,\varphi(z_k)^{-1}|z-\zeta|,$$

поэтому последний интеграл по Γ_k не больше

$$c\,\varphi(z_k)^{-p}\int_{\Gamma_k}|x-\xi|^{2-n}ds_\xi \le c\,\varphi(z_k)^{1-p}.$$

Применяя затем лемму 5, мажорируем второе слагаемое в правой части (4.14) величиной $c\,[v_k]^p_{p,\Gamma_k}$.

Итак, мы установили оценку

$$|\nu_k w_k|_{p,\Gamma} \le c\,[v_k]_{p,\Gamma_k}$$

с константой, не зависящей от k и v_k, а поскольку $\|v_k\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_k)} \le 1$, то из этой оценки и (4.11) получаем

$$|v|^p_{p,\Gamma} \le c\sum\nolimits_{k=1}^N \alpha_k^{(p'-1)p} = c\sum\nolimits_{k=1}^N \alpha_k^{p'}.$$

Таким образом, правая часть в (4.10) не превосходит

$$c\,\|(1-\mu_0)(f-\bar f)\|_{TW_p^1(\Omega)^*}\left(\sum\nolimits_{k=1}^N \alpha_k^{p'}\right)^{1/p}.$$

Теперь из (4.10) выводим

$$\sum\nolimits_{k=1}^N \alpha_k^{p'} \le c\,\|(1-\mu_0)(f-\bar f)\|_{TW_p^1(\Omega)^*}\left(\sum\nolimits_{k=1}^N \alpha_k^{p'}\right)^{1/p}.$$

с константой, не зависящей от $\alpha_k = \|\mu_k(f-\bar f)\|_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_k)}$ и N. Отсюда следует (4.2).

(ii) Пусть $v \in TW_p^1(\Omega)$. Тогда

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{k\ge1}|\langle\lambda_k f_k, v\rangle| &\le \sum\nolimits_{k\ge1}|\langle\lambda_k f_k, \sum\nolimits_{|k-i|\le1}\mu_i(v-\mathring v_k)\rangle| \le \\ &\le \sum\nolimits_{k\ge1}\sum\nolimits_{|k-i|\le1}\|\lambda_k f_k\|_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_k)}\|\mu_i(v-\mathring v_k)\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_k)},\end{aligned} \tag{4.15}$$

где $\mathring v_k$ – среднее значение v на Γ_k. Ясно, что

$$\|\mu_i(v-\mathring v_k)\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_k)} \le \|v-\mathring v_k\|_{L_p(\Gamma_k)} + [\mu_i(v-\mathring v_k)]_{p,\Gamma_k}.$$

Оценим первое слагаемое справа по лемме 5:

$$\|v-\mathring v_k\|_{L_p(\Gamma_k)} \le c\,\varphi(z_k)^{1-1/p}[v]_{p,\Gamma_k}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}[\mu_i(v-\mathring v_k)]^p_{p,\Gamma_k} &\le c\,[v]^p_{p,\Gamma_k} + \\ +c\int\limits_{\Gamma_k}|v(x)-\mathring v_k|^p ds_x &\int\limits_{\Gamma_k}\frac{|\mu_i(z)-\mu_i(\zeta)|^p}{|x-\xi|^{n+p-2}}ds_\xi.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Поскольку $|k-i| \leq 1$, то $|\mu_i(z) - \mu_i(\zeta)| \leq c\,\varphi(z_k)^{-1}|z-\zeta|$, и второе слагаемое в правой части (4.16) мажорируется первым точно так же как второе слагаемое в правой части (4.14) мажорировалось первым. Итак, мы показали, что

$$\|\mu_i(v - \mathring{v}_k)\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_k)} \leq c\,[v]_{p,\Gamma_k}.$$

Теперь из (4.15) следует оценка

$$\sum\nolimits_{k\geq 1} |\langle \lambda_k f_k, v\rangle| \leq c \sum\nolimits_{k\geq 1} \|\lambda_k f_k\|_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_k)} [v]_{p,\Gamma_k} \leq$$

$$\leq c \left(\sum\nolimits_{k\geq 1} \|\lambda_k f_k\|^{p'}_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_k)}\right)^{1/p'} \left(\sum\nolimits_{k\geq 1} [v]^p_{p,\Gamma_k}\right)^{1/p}. \tag{4.17}$$

Заметим, что для $x, \xi \in \Gamma_k$ выполнено условие $|z-\zeta| < 2M(z,\zeta)$, поэтому

$$\sum\nolimits_{k\geq 1} [v]^p_{p,\Gamma_k} \leq \iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma:|\zeta-z|<2M(z,\zeta)\}} |v(x) - v(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}.$$

В силу леммы 4 и леммы 6 правая часть последней оценки не больше

$$c\,|(1-\mu_0)v|^p_{p,\Gamma} + c\,\|\mu_0 v\|^p_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_0)},$$

что не превосходит $c\,\|v\|^p_{TW_p^1(\Omega)}$ ввиду замечания 2. Теперь из (4.17) следует, что функционал (4.4) корректно определен, непрерывен, и для его нормы верна оценка (4.5).

Включение $f^{(1)} \in W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_0)$ вытекает из теоремы Гальярдо и замечания 2, а так как $TW_p^1(\Omega) \subset W_p^{1-1/p}(\Gamma_0)$, то $f^{(1)} \in TW_p^1(\Omega)^*$.

Проверка непрерывности функционала (4.6) в $TW_p^1(\Omega)$ при условии, что $g \in Y_p(0,1)^*$ проводится так же, как и в утверждении (i). Доказательство теоремы закончено.

Отметим некоторые следствия доказанной теоремы. Первое вытекает из определения решения задачи Неймана, рассмотренной в § 1.

Следствие 4. *Если Ω – область с внешним пиком и функционал $f : W_p^1(\Omega) \to \mathbf{R}^1$ представляется суммой трех слагаемых $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ со свойствами, описанными в в утверждении* (ii) *теоремы* 2, *то задача Неймана* (1.2), (1.3) *однозначно разрешима.*

Следствие 5. *Пусть f –линейный функционал, определенный на функциях из $TW_p^1(\Omega)$, а функционал $\bar{f}$ определен на функциях с носителем в Γ формулой*

$$\langle \bar{f}, v\rangle = \langle f, \bar{v}\rangle.$$

Тогда функционал $(1-\mu_0)(f-\bar{f})$ непрерывен в $TW_p^1(\Omega)$ в том и только в том случае, если

$$\sum\nolimits_{k\geq 1} \|\mu_k(f-\bar{f})\|^{p'}_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_k)} < \infty. \tag{4.18}$$

При этом верно соотношение эквивалентности

$$\left(\sum_{k\geq 1}\|\mu_k(f-\bar f)\|^{p'}_{W^{-1/p'}_{p'}(\Gamma_k)}\right)^{1/p'} \sim \|(1-\mu_0)(f-\bar f)\|_{TW^1_p(\Omega)^*}.$$

Константы в этом соотношении зависят только от p,Ω.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству следствия 2 в § 2 с заменой ссылок на теорему 1 ссылками на теорему 2.

С помощью предыдущего утверждения можно установить непрерывность линейного отображения

$$TW^1_p(\Omega)\ni v\mapsto v-\bar v\in L_q(\Gamma)$$

с максимальным соболевским показателем q, а также доказать включение $f-\bar f\in TW^1_p(\Omega)^*$ для $f\in L_{q'}(\partial\Omega)$ с показателем $q'=q/(q-1)$.

Следствие 6. *Пусть* $q=(n-1)p/(n-p)$ *при* $p<n$, $q\in[p,\infty)$ *при* $p=n$ *и* $q=\infty$ *при* $p>n$. *Пусть еще* $q'^{-1}+q^{-1}=1$. *Если* $f\in L_{q'}(\partial\Omega)$, *то функционал*

$$TW^1_p(\Omega)\ni v\mapsto\langle(1-\mu_0)(f-\bar f),v\rangle=\int_\Gamma f(x)(v(x)-\bar v(z))(1-\mu_0(z))ds_x$$

принадлежит пространству $TW^1_p(\Omega)^*$ *и верна оценка*

$$\|(1-\mu_0)(f-\bar f)\|_{TW^1_p(\Omega)^*}\leq c\,\|f-\bar f\|_{L_{q'}(\Gamma)} \tag{4.19}$$

с константой, не зависящей от f. *Кроме того, для всех* $v\in TW^1_p(\Omega)$ *справедлива оценка*

$$\|v-\bar v\|_{L_q(\Gamma)}\leq c\,\|v\|_{TW^1_p(\Omega)} \tag{4.20}$$

с константой, не зависящей от v.

Доказательство. Оценим сумму в левой части (4.18). Если $v\in W^{1-1/p}_p(\Gamma_k)$, то в силу неравенства Гёльдера

$$|\langle\mu_k(f-\bar f),v\rangle|=\left|\int_{\Gamma_k}\mu_k(f-\bar f)(v-\mathring v_k)ds_x\right|\leq$$

$$\leq\|f-\bar f\|_{L_{q'}(\Gamma_k)}\|\mu_k(v-\mathring v_k\|_{L_q(\Gamma_k)}, \tag{4.21}$$

где, как и выше, $\mathring v_k$ – среднее значение v на Γ_k. Так как область

$$\Omega_k=\{(y,z):z\in(z_{k+1},z_{k-1}),\ y/\varphi(z)\in\omega\}$$

принадлежит классу $C^{0,1}$, то по теореме Соболева [3, § 8] для произвольной функции $u\in W^{1-1/p}_p(\partial\Omega_k)$ верна оценка

$$\|u\|_{L_q(\partial\Omega_k)}\leq c\,\varphi(z_k)^{\frac{n-1}{q}-\frac{n-1}{p}}\|u\|_{L_p(\partial\Omega_k)}+$$

$$+c\,\varphi(z_k)^{1+\frac{n-1}{q}-\frac{n}{p}}[u]_{p,\partial\Omega_k}.$$

Рассмотрим сначала случай $p<n$. Тогда

$$\|u\|_{L_q(\partial\Omega_k)} \le c\,\varphi(z_k)^{-1/p'}\|u\|_{L_p(\partial\Omega_k)} + c\,[u]_{p,\partial\Omega_k}.$$

Здесь $[\cdot]_{p,\partial\Omega_k}$ – полунорма, определенная в (1.1). Подставим в последнее неравенство $u=\mu_k(v-\mathring{v}_k)$, считая $u=0$ на $\partial\Omega_k\setminus\Gamma_k$, и используем лемму 5 для оценки первого слагаемого в правой части. В результате получим

$$\|\mu_k(v-\mathring{v}_k\|_{L_q(\Gamma_k)} \le c\,[v]_{p,\Gamma_k} + c\,[\mu_k(v-\mathring{v}_k]_{p,\partial\Omega_k}. \tag{4.22}$$

Оценим последнее слагаемое. Ясно, что

$$[\mu_k(v-\mathring{v}_k]^p_{p,\partial\Omega_k} \le c\,[\mu_k(v-\mathring{v}_k]^p_{p,\Gamma_k}+$$

$$+c\int_{\Gamma_k}|\mu_k(z)(v(x)-\mathring{v}_k)|^p ds_x\int_{\partial\Omega_k\setminus\Gamma_k}|x-\xi|^{2-n-p}ds_\xi. \tag{4.23}$$

Если $x=(y,z)\in\Gamma_k$, $z\in\operatorname{supp}\mu_k$, а $\xi\notin\Gamma_k$, то $|x-\xi|\ge c\varphi(z_k)$ в силу условий (2.3). Поэтому последний член в (4.23) не больше

$$c\,\varphi(z_k)^{1-p}\int_{\Gamma_k}|v(x)-\mathring{v}_k|^p ds_x,$$

что не превосходит $c\,[v]^p_{p,\Gamma_k}$ по лемме 5. Для оценки величины $[\mu_k(v-\mathring{v}_k]^p_{p,\Gamma_k}$ мажорируем ее правой частью неравенства (4.14), где следует $v_k(x)$ заменить на $v(x)$ и ν_k заменить на μ_k. Далее те же рассуждения, что и в теореме 2, приводят нас к оценке

$$[\mu_k(v-\mathring{v}_k]_{p,\Gamma_k} \le c\,[v]_{p,\Gamma_k}.$$

Неравенства (4.22), (4.23) в сочетании с последними оценками показывают, что

$$\|\mu_k(v-\mathring{v}_k\|_{L_q(\Gamma_k)} \le c\,[v]_{p,\Gamma_k}. \tag{4.24}$$

Аналогичные рассуждения в случае $p\ge n$ показывают, что (4.24) верно и для $p\ge n$. Из (4.21) и (4.24) следует неравенство

$$\|\mu_k(f-\bar f)\|_{W^{-1/p'}_{p'}(\Gamma_k)} \le c\,\|f-\bar f\|_{L_{q'}(\Gamma_k)},$$

откуда

$$\left(\sum_{k\ge1}\|\mu_k(f-\bar f)\|^{p'}_{W^{-1/p'}_{p'}(\Gamma_k)}\right)^{1/p'} \le c\left(\sum_{k\ge1}\|f-\bar f\|^{p'}_{L_{q'}(\Gamma_k)}\right)^{1/p'}. \tag{4.25}$$

Применяя далее алгебраическое неравенство (2.22) так же, как и в следствии 3, мажорируем левую часть в (4.25) величиной $c\,\|f-\bar f\|_{L_{q'}(\Gamma)}$. Оценка (4.19) теперь вытекает из следствия 2.

Перейдем к оценке (4.20). Так как

$$\langle (1-\mu_0)f, v-\bar{v}\rangle = \langle (1-\mu_0)f-\bar{f}, v\rangle$$

и $\|\bar{f}\|_{L_{q'}(\Gamma)} \le c\,\|f\|_{L_{q'}(\Gamma)}$, то из (4.19) следует, что

$$|\langle f, (1-\mu_0)(v-\bar{v})\rangle| \le c\,\|f\|_{L_{q'}(\Gamma)}\|v\|_{TW^1_p(\Omega)} \tag{4.26}$$

для всех $f \in L_{q'}(\Gamma)$ и $v \in TW^1_p(\Omega)$. Пусть V означает единичный шар в $TW^1_p(\Omega)$. При каждом $v \in V$ рассмотрим функционал

$$L_{q'}(\Gamma) \ni f \mapsto F_v(f) = \langle f, (1-\mu_0)(v-\bar{v})\rangle = \int_\Gamma f(x)(1-\mu_0(z))(v(x)-\bar{v}(z))ds_x.$$

Ввиду (4.26) функционалы $F_v(\cdot)$ непрерывны и точечно ограничены при $v \in V$, следовательно их нормы ограничены равномерно относительно $v \in V$. Это означает, что

$$\|(1-\mu_0)(v-\bar{v})\|_{L_q(\Gamma)} \le \mathrm{const}\|v\|_{TW^1_p(\Omega)}$$

для всех $v \in TW^1_p(\Omega)$.

Для завершения доказательства оценки (4.20) проверим неравенство

$$\|\mu_0(v-\bar{v})\|_{L_q(\Gamma)} \le \mathrm{const}\cdot\|v\|_{TW^1_p(\Omega)}.$$

В самом деле, из определения (3.1) и неравенства Гёльдера получаем

$$|\bar{v}(z)|^q\varphi(z)^{n-2}|\gamma| \le \int_{y\in\varphi(z)\gamma} |v(y,z)|^q d\gamma(y).$$

Интегрирование по $z \in (z_1, 1)$ дает

$$\|\mu_0\bar{v}\|^q_{L_q(\Gamma\cap\Gamma_0)} \le c\,\|\mu_0 v\|^q_{L_q(\Gamma\cap\Gamma_0)}.$$

Остается заметить, что по теореме Соболева последняя норма не больше $c\,\|\mu_0 v\|_{W^{1-1/p}_p(\Gamma_0)}$, что не превосходит $\|v\|_{TW^1_p(\Omega)}$ согласно замечанию 2. Доказательство следствия 6 закончено.

В заключение сформулируем еще одно утверждение, вытекающее из предыдущего следствия.

Предложение 2. *Пусть $1 \le q \le p(n-1)/(n-p)$ при $p < n$, $q \in [1,\infty)$ при $p = n$ и $1 \le q \le \infty$ при $p > n$. Пусть еще $q^{-1} + q'^{-1} = 1$. Для области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с внешним пиком следующие условия равносильны.*

(A) *Задача Неймана (1.2), (1.3) разрешима для всех $f \in L_{q'}(\partial\Omega)$.*

(B) *Пространство $TW^1_p(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\partial\Omega)$.*

(C) *Для всех $f \in L_{q'}(\partial\Omega)$ функционал $TW^1_p(\Omega) \ni v \mapsto \int_{\partial\Omega} fv ds_x$ непрерывен.*

(D) *Отображение $TW^1_p(\Omega) \ni v \mapsto \bar{v} \in L_q(\Gamma)$ непрерывно.*

(E) *Пространство $Y_p(0,1)$ вложено в весовое пространство L_q с нормой*

$$u \mapsto \left(\int_0^1 |u(z)|^q \varphi(z)^{n-2} dz\right)^{1/q}.$$

Доказательство. (A) $\to$ (B). Рассуждая так же, как при доказательстве (A) $\to$ (B) в предложении 1, придем к оценке

$$\|v\|_{L_q(\partial\Omega)} \le \text{const}\, \|v\|_{W_p^1(\Omega)}$$

для всех v из множества $W_p^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, а так как это множество плотно в $W_p^1(\Omega)$, то последняя оценка выполнена для всех $v \in W_p^1(\Omega)$. Тем самым оператор сужения на границу $W_p^1(\Omega) \ni v \mapsto v|_{\partial\Omega} \in L_q(\partial\Omega)$ непрерывен, откуда вытекает непрерывность оператора вложения $TW_p^1(\Omega) \subset L_q(\partial\Omega)$.

(B) $\to$ (C). Пусть $f \in L_{q'}(\partial\Omega)$ и $v \in TW_p^1(\Omega)$. Так как $TW_p^1(\Omega)$ вложено в $L_q(\partial\Omega)$, то

$$\left|\int_{\partial\Omega} fv ds_x\right| \le \|f\|_{L_{q'}(\partial\Omega)} \|v\|_{L_q(\partial\Omega)} \le c\, \|f\|_{L_{q'}(\partial\Omega)} \|v\|_{TW_p^1(\Omega)},$$

откуда вытекает требуемый результат.

(C) $\to$ (A) Как было показано в § 1, из непрерывности функционала $v \in TW_p^1(\Omega) \mapsto \int_{\partial\Omega} fv ds_x$ вытекает разрешимость задачи Неймана.

Эквивалентность утверждений (B) и (D) вытекает из следствия 6.

(D) $\to$ (E). Пусть $u \in Y_p(0,1)$. Пусть еще $\lambda \in C^\infty(0,1)$,

$$0 \le \lambda \le 1, \quad \lambda|_{(0,z_2)} = 1, \quad \lambda|_{(z_1,1)} = 0.$$

Определим $v \in TW_p^1(\Omega)$: $v(x) = \lambda(z)u(z)$ при $x \in \Gamma$, $v = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Ввиду леммы 3 неравенство $\|\bar{v}\|_{L_q(\Gamma)} \le c\, \|v\|_{TW_p^1(\Omega)}$ равносильно неравенству

$$\left(\int_0^1 |\lambda(z)u(z)|^q \varphi(z)^{n-2} dz\right)^{1/q} \le c\, \|\lambda u\|_{Y_p(0,1)}.$$

Рассуждения, примененные при выводе оценки (4.1) в теореме 2, показывают, что правая часть последнего неравенства не больше $c(\lambda)\, \|u\|_{Y_p(0,1)}$. Таким образом,

$$\|\lambda u\|_{L_q(\Gamma)} \le c\, \|u\|_{Y_p(0,1)}. \tag{4.27}$$

Далее, очевидно

$$\|(1-\lambda)u\|_{L_q(\Gamma)} \le c\, \left(\int_{z_2}^1 |u(z)|^q dz\right)^{1/q}.$$

По условию имеем $1 - n/p + (n-1)/q \ge 0$, откуда $1 - 2/p + 1/q > 0$ при $q \ge p$ и, значит, пространство $W_p^{1-1/p}(z_2, 1)$ непрерывно вложено в $L_q(z_2, 1)$, (см., например, [11, § 16]). При $q < p$ непрерывность указанного вложения следует из неравенства Гёльдера. Отсюда

$$\left(\int_0^1 |(1-\lambda(z))u(z)|^q \varphi(z)^{n-2} dz\right)^{1/q} \le c\,\|u\|_{W_p^{1-1/p}(z_2,1)} \le c\,\|u\|_{Y_p(0,1)}.$$

Объединяя последнее с (4.27), приходим к утверждению (E).

(E) $\to$ (D). Пусть $v \in TW_p^1(\Omega)$. В силу леммы 3 $\|\bar v\|_{Y_p(0,1)} \le c\,\|v\|_{TW_p^1(\Omega)}$. Поэтому

$$\left(\int_0^1 |\bar v(z)|^q \varphi(z)^{n-2} dz\right)^{1/q} \le c\,\|v\|_{TW_p^1(\Omega)},$$

что означает непрерывность отображения $TW_p^1(\Omega) \ni v \mapsto \bar v \in L_q(\Gamma)$. Доказательство предложения закончено.

Замечание 4. Используя результаты работы [10], можно дополнить последнее утверждение. Именно, любое из условий (A) – (E) равносильно справедливости неравенства

$$\int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^z \varphi(t)^{n-2} dt \left(\int\limits_z^1 \frac{dt}{\varphi(t)^{\frac{n-1}{p-1}}}\right)^{q-1}\right]^{\frac{p}{p-q}} \frac{dz}{\varphi(z)^{\frac{n-1}{p-1}}} < \infty$$

в случае $q < p$ и неравенства

$$\sup_{r\in(0,1)} \left(\int_0^r \varphi(z)^{n-2} dz\right)^{1/q} \left(\int_r^1 \varphi(z)^{\frac{1-n}{p-1}} dz\right)^{(p-1)/p} < \infty$$

в случае $q \ge p$.

Пример. Рассмотрим степенной пик

$$\Omega = \{(y,z) \in \mathbf{R}^n : z \in (0,1), |y| < c\,z^\lambda\}, \quad \lambda > 1.$$

Тогда задача Неймана (1.2), (1.3) разрешима всех $f \in L_{q'}(\partial\Omega)$ в следующих случаях:

1) $p \ge 1 + \lambda(n-1)$ и $q \in [1, p)$;

2) $p < 1 + \lambda(n-1)$ и $1 \le q < p \min\{1, (1+\lambda(n-2))/(1+\lambda(n-1)-p)\}$.

3) $p > 1 + \lambda(n-1)$ и $p \le q \le \infty$;

4) $p = 1 + \lambda(n-1)$ и $p \le q < \infty$;

5) $1 < p < 1 + \lambda(n-1)$ и $p \le q \le (\lambda(n-2)+1)p/(1+\lambda(n-1)-p)$.

§ 5. Область с внутренним пиком

Перейдем к описанию пространств, сопряженных к W_p^1, TW_p^1 для области с внутренним пиком. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, как и выше, – область с внешним пиком при $n > 2$. Тогда ее дополнение $G = \mathbf{R}^n \setminus \bar\Omega)$ есть многомерная область с внутренним пиком. По теореме Джонса [12] существует линейный непрерывный оператор продолжения $E : W_p^1(G) \to W_p^1(\mathbf{R}^n)$. Отсюда следует, что пространство $W_p^1(G)^*$ является подпространством $W_p^1(\mathbf{R}^n)^*$, а линейное отображение

$$W_p^1(\mathbf{R}^n)^* \ni \mathcal{F} \mapsto F \in W_p^1(G)^*,$$

заданное формулой $\langle F, v\rangle = \langle \mathcal{F}, Ev\rangle$, есть непрерывный проектор, так что описание $W_p^1(G)^*$ сводится к описанию стандартного класса $W_p^1(\mathbf{R}^n)^*$.

Обратимся к описанию пространства $TW_p^1(G)^*$. В соответствии с результатами работы [7] (см. также [8, глава 7]) пространство $TW_p^1(G)$ характеризуется различным образом в случаях $p \in (1, n-1)$, $p = n-1$ и $p > n-1$. Так, при $1 < p < n-1$ норма в $TW_p^1(G)$ эквивалентна норме

$$\left(\|v\|^p_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_0)} + \int_\Gamma |v(x)|^p \varphi(z)^{1-p} ds_x + |v|^p_{p,\Gamma}\right)^{1/p},$$

где $|\cdot|_{p,\Gamma}$ – полунорма, определенная в (3.4). При $p = n-1 > 1$ верно соотношение

$$\|v\|_{TW_p^1(G)} \sim \left\{\|v\|^p_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_0)} + |v|^p_{p,\Gamma} + \int\limits_\Gamma \frac{|v(x)|^p ds_x}{(\varphi(z)\log(z/\varphi(z)))^{p-1}} + \|\!|v|\!\|^p_{p,\Gamma}\right\}^{1/p},$$

где

$$\|\!|v|\!\|_{p,\Gamma} = \left\{\iint\limits_S |v(x)-v(\xi)|^p \frac{M(z,\zeta)^{2-2p} ds_x ds_\xi}{|x-\xi|(1+\log(|x-\xi|/M(z,\zeta)))^p}\right\}^{1/p}. \qquad (5.1)$$

Здесь интегрирование производится по множеству

$$S = \{x, \xi \in \Gamma : |z-\zeta| > M(z,\zeta),\ 1/2 < z/\zeta < 2\},$$

использованы те же обозначения, что и в (3.4), причем в случае $p = n-1$ дополнительно предполагается, что $\varphi'(z) = O(\varphi(z)/z))$ при $z \to 0$, откуда, в частности, следует, что $\varphi(z) \sim \varphi(\zeta)$, если $2^{-1} \le z\zeta^{-1} \le 2$.

Наконец, при $p > n-1$ норма в пространстве $TW_p^1(G)$ эквивалентна норме

$$\left\{\|v\|^p_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_0)} + |v|^p_{p,\Gamma} + \int\limits_\Gamma |v(x)|^p \varphi(z)^{2-n} ds_x + (v)^p_{p,\Gamma}\right\}^{1/p},$$

где

$$(v)_{p,\Gamma} = \left\{\iint\limits_{\Gamma\times\Gamma} |v(x)-v(\xi)|^p \frac{(\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n}}{|x-\xi|^{p+2-n}} \chi\left(\frac{M(z,\zeta)}{|z-\zeta|}\right) ds_x ds_\xi\right\}^{1/p}. \qquad (5.2)$$

Указанные нормы индуцируют нормы в пространстве $Y_p(0,1)$, которые получаются как сужения норм в $TW_p^1(G)$ на подпространство функций с носителем в Γ, зависящих только от переменной z. Выпишем эти нормы. При $p \in (1, n-1)$ имеем

$$\|u\|_{Y_p(0,1)} =$$

$$= \left(\int\limits_0^1 |u(z)|^p \frac{dz}{\varphi(z)^{p+1-n}} + \iint\limits_{\{z,\zeta \in (0,1)\}} |u(z) - u(\zeta)|^p \frac{M(z,\zeta)^{n-2}}{|z-\zeta|^p} \chi \left(\frac{|z-\zeta|}{M(z,\zeta)} \right) dz d\zeta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

При $p = n-1$ можно положить

$$\|u\|_{Y_p(0,1)} = \left(\int\limits_0^1 \frac{|u(z)|^p dz}{(\log(z/\varphi(z)))^{p-1}} + \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{|u(z) - u(\zeta)|^p}{|z-\zeta|} \sigma(z,\zeta) dz d\zeta \right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$\sigma(z,\zeta) = \chi_{(1/2,2)}(z/\zeta) Q \left(|z-\zeta| (M(z,\zeta))^{-1} \right),$$

$\chi_{(1/2,2)}$ – характеристическая функция промежутка $(1/2, 2)$ и

$$Q(t) = \begin{cases} t^{1-p}, & t \in (0,1), \\ (\log(et))^{-p}, & t > 1. \end{cases}$$

Если $p > n-1$, то можно выбрать

$$\|u\|_{Y_p(0,1)} = \left(\int\limits_0^1 |u(z)|^p dz + \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{|u(z) - u(\zeta)|^p}{|z-\zeta|^{p+2-n}} \max \left\{ \frac{M(z,\zeta)^{n-2}}{|z-\zeta|^{n-2}}, 1 \right\} dz d\zeta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Формулируемая ниже теорема дает описание пространства $TW_p^1(G)^*$ для области с внутренним пиком.

Теорема 3. *Пусть* Ω *– область с внешним пиком,* $G = \mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ *и* $\{\mu_k\}_{k \geq 0}$ *– разбиение единицы из теоремы* 2.
(i) *Всякий функционал* f *из пространства* $TW_p^1(G)^*$ *можно представить в виде суммы*

$$f = \mu_0 f + (1-\mu_0)\bar{f} + (1-\mu_0)(f - \bar{f}),$$

где каждое слагаемое принадлежит тому же пространству. Кроме того, первое слагаемое принадлежит $W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_0)$ *и имеет носитель в* Γ_0. *Второе слагаемое имеет носитель в множестве* $\{x \in \Gamma : z \leq z_0\}$ *и принадлежит пространству* $Y_p(0,1)^*$ *в том смысле, что верна оценка*

$$|\langle f^{(2)}, v \rangle| \leq \mathrm{const} \cdot \|\bar{v}\|_{Y_p(0,1)}. \tag{5.3}$$

Для третьего слагаемого верно разложение

$$(1-\mu_0)(f - \bar{f}) = \sum\nolimits_{k \geq 1} \mu_k (f - \bar{f})$$

и справедлива оценка

$$\left(\sum_{k\geq 1}\|\mu_k(f-\bar f)\|^{p'}_{W^{-1/p'}_{p'}(\Gamma_k)}\right)^{1/p'} \leq c\,\|(1-\mu_0)(f-\bar f)\|_{TW^1_p(G)^*} \tag{5.4}$$

(ii) *Если при всех $k\geq 1$ функционалы $f_k \in W^{-1/p'}_{p'}(\Gamma_k)$ удовлетворяют условиям* (ii) *теоремы* 2, *а функционалы g и h принадлежат соответственно пространствам $Y_p(0,1)^*$ и $W^{-1/p'}_{p'}(\Gamma_0)$, то каждый из функционалов $f^{(1)} = \mu_0 h$,*

$$TW^1_p(G) \ni v \mapsto \langle f^{(2)}, v\rangle = \langle g, (1-\mu_0)\bar v\rangle,$$

$$TW^1_p(G)) \ni v \mapsto \langle f^{(3)}, v\rangle = \sum\nolimits_{k\geq 1}\langle \lambda_k f_k, v\rangle$$

непрерывен в $TW^1_p(G)$. Кроме того, $f^{(1)} \in W^{-1/p'}_{p'}(\Gamma_0)$, а для нормы функционала $f^{(3)}$ верна оценка

$$\|f^{(3)}\|_{TW^1_p(G)^*} \leq c\left(\sum\nolimits_{k\geq 1}\|\lambda_k f_k\|^{p'}_{W^{-1/p'}_{p'}(\Gamma_k)}\right)^{1/p'}. \tag{5.5}$$

Прежде, чем доказывать теорему, приведем отдельно некоторые оценки полунорм (и норм), фигурирующих в нормах $\|\cdot\|_{TW^1_p(G)}$.

Лемма 8. *Если $v \in TW^1_p(G)$, то*

$$\|\mu_0 v\|_{TW^1_p(G)} \leq \mathrm{const}\cdot\|v\|_{W^{1-1/p}_p(\Gamma_0)}.$$

Доказательство. Требуется проверить оценки

$$|\mu_0 v|^p_{p,\Gamma} \leq c\,\|v\|^p_{W^{1-1/p}_p(\Gamma_0)}, \quad p\in(1,\infty), \tag{5.6}$$

$$(\mu_0 v)^p_{p,\Gamma} \leq c\,\|v\|^p_{W^{1-1/p}_p(\Gamma_0)}, \quad p > n-1, \tag{5.7}$$

$$|\!|\!|\mu_0 v|\!|\!|^p_{p,\Gamma} \leq c\,\|v\|^p_{W^{1-1/p}_p(\Gamma_0)}, \quad p = n-1. \tag{5.8}$$

Нетрудно видеть, что при любом $p\in(1,\infty)$ пространство $TW^1_p(G)$ вложено в $TW^1_p(\Omega)$, поэтому оценка (5.6) следует из леммы 6. Для доказательства (5.7) заметим, что $|x-\xi| \sim |z-\zeta|$ при $|\zeta - z| > M(z,\zeta)$. Поэтому из (5.2) получаем мажоранту для левой части (5.7) в виде суммы $c\,I_1 + c\,I_2$, где

$$I_1 = \int_\Gamma \frac{|v(x)|^p}{\varphi(z)^{n-2}} ds_x \int_0^{z-\varphi(z)} \frac{|\mu_0(z)-\mu_0(\zeta)|^p}{|z-\zeta|^{p+2-n}} d\zeta,$$

$$I_2 = \int\limits_\Gamma \frac{ds_x}{\varphi(z)^p} \int\limits_{\{\xi\in\Gamma:\zeta<z-\varphi(z)\}} \frac{\mu_0(\zeta)^p |v(x)-v(\xi)|^p ds_\xi}{\varphi(\zeta)^{n-2}}.$$

Так как $\mu_0(t) = 0$ при $t \in (0, z_1)$, то

$$I_1 \le c \int_{\{x\in\Gamma: z>z_1\}} |v(x)|^p ds_x \int_0^1 |z-\zeta|^{n-2} d\zeta \le c\,\|v\|^p_{L_p(\Gamma_0)}$$

и

$$I_2 \le c \int\limits_{\{x\in\Gamma: z>z_1\}} ds_x \int\limits_{\{\xi\in\Gamma: \zeta>z_1\}} (|v(x)|^p + |v(\xi)|^p) ds_\xi \le c\,\|v\|^p_{L_p(\Gamma_0)}.$$

Отсюда следует (5.7).

Аналогично устанавливается и оценка (5.8). Из (5.1) получаем, что левая часть (5.8) мажорируется суммой

$$c \int_{\{x\in\Gamma: z>z_1\}} |v(x)|^p ds_x \int_0^{z-\varphi(z)} \frac{|\mu_0(z)-\mu_0(\zeta)|^p}{|z-\zeta|} d\zeta +$$

$$+c \int_{\{x\in\Gamma: z>z_1\}} ds_x \int_{\{\xi\in\Gamma: \zeta>z_1\}} (|v(x)|^p + |v(\xi)|^p) \mu_0(\zeta)^p ds_\xi,$$

что не превосходит $c\,\|v\|^p_{L_p(\Gamma_0)}$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $v \in TW^1_p(G)$ и v имеет носитель в множестве $\{x \in \Gamma : z \le z_0\}$. Тогда*

$$\|v\|^p_{TW^1_p(G)} \le c\,|v|^p_{p,\Gamma} + c \int_\Gamma |v(x)|^p \frac{ds_x}{\varphi(z)^{p-1}}. \tag{5.9}$$

Доказательство. Согласно лемме 7 верна оценка

$$\|v\|_{W^{1-1/p}_p(\Gamma_0)} \le c\,|v|_{p,\Gamma},$$

поэтому для доказательства (5.9) достаточно установить неравенства

$$(v)^p_{p,\Gamma} \le c \int_\Gamma |v(x)|^p \frac{ds_x}{\varphi(z)^{p-1}}, \quad p > n-1, \tag{5.10}$$

$$|\!|\!|v|\!|\!|^p_{p,\Gamma} \le c \int_\Gamma |v(x)|^p \frac{ds_x}{\varphi(z)^{p-1}}, \quad p = n-1, \tag{5.11}$$

где $|\!|\!|v|\!|\!|_{p,\Gamma}$ и $(v)_{p,\Gamma}$ – полунормы (5.1) и (5.2). Рассматривая два симметричных случая $z > \zeta$ и $z < \zeta$ и принимая во внимание соотношение $|z-\zeta| \sim |x-\xi|$ при $|z-\zeta| > M(z,\zeta)$, получим, что

$$(v)^p_{p,\Gamma} \le c \int\limits_\Gamma \frac{|v(x)|^p ds_x}{\varphi(z)^{n-2}} \int\limits_{\{\xi\in\Gamma: |z-\zeta|>\varphi(z)\}} \frac{\varphi(\zeta)^{2-n} ds_x}{|z-\zeta|^{p+2-n}} \le$$

$$\le c \int_\Gamma |v(x)|^p \frac{ds_x}{\varphi(z)^{n-2}} \int_{|z-\zeta|>\varphi(z)} \frac{d\zeta}{|z-\zeta|^{p+2-n}} \le c \int_\Gamma |v(x)^p \frac{ds_x}{\varphi(z)^{p-1}}.$$

В случае $p = n-1$ имеем $\varphi(z) \sim \varphi(\zeta)$ при $2^{-1} \le z\zeta^{-1} \le 2$, поэтому

$$\|v\|^p_{p,\Gamma} \le c \int\limits_{\Gamma} \frac{|v(x)|^p}{\varphi(z)^{2p-2}} ds_x \int\limits_{\{\xi\in\Gamma : |z-\zeta|>\varphi(z)\}} \frac{ds_\xi}{|z-\zeta|\left(1+\log\left|\frac{z-\zeta}{\varphi(z)}\right|\right)^p} \le$$

$$\le c \int\limits_{\Gamma} \frac{|v(x)|^p}{\varphi(z)^{p-1}} ds_x \int\limits_{|z-\zeta|>\varphi(z)} \frac{d\zeta}{|\zeta-z|\left(1+\log\left|\frac{\zeta-z}{\varphi(z)}\right|\right)^p} \le c\int_\Gamma |v(x)|^p \frac{ds_x}{\varphi(z)^{p-1}}.$$

Доказательство леммы закончено.

Следующее утверждение аналогично лемме 3.

Лемма 10. *Пусть* $v \in TW^1_p(G)$. *Тогда*

$$\|\bar v\|_{Y_p(0,1)} \le c\,\|v\|_{TW^1_p(G)}. \tag{5.12}$$

Доказательство. При $p \in (1,\infty)$ запишем норму в левой части (5.12) в виде

$$\|\bar v\|_{Y_p(0,1)} =$$

$$= \left(\int\limits_0^1 Q(z)|\bar v(z)|^p dz + |\bar v|^p_{p,\Gamma} + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \sigma(z,\zeta)|\bar v(z)-\bar v(\zeta)|^p \frac{dzd\zeta}{|z-\zeta|^{p+2-n}} \right)^{1/p}, \tag{5.13}$$

где

$$|\bar v|^p_{p,\Gamma} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 |u(z)-u(\zeta)|^p \frac{M(z,\zeta)^{n-2}}{|z-\zeta|^p} \chi\left(\frac{|z-\zeta|}{M(z,\zeta)}\right) dzd\zeta,$$

χ – характеристическая функция промежутка $(0,1)$, Q, σ – неотрицательные весовые функции,

$$Q(z) = \begin{cases} \varphi(z)^{n-1-p}, & p < n-1, \\ (\log(z/\varphi(z)))^{1-p}, & p = n-1, \\ 1, & p > n-1, \end{cases}$$

$$\sigma(z,\zeta) = \begin{cases} 0, & p < n-1, \\ \left(1+(\log\left(\frac{|z-\zeta|}{M(z,\zeta)}\right)\right)^{-p} \chi_{(1/2,2)}(z\zeta^{-1})\chi\left(\frac{M(z,\zeta)}{|z-\zeta|}\right), & p = n-1, \\ \chi(M(z,\zeta)/|z-\zeta|), & p > n-1. \end{cases}$$

Поскольку пространство $TW^1_p(G)$ вложено в $TW^1_p(\Omega)$, то оценка

$$|\bar v|_{p,\Gamma} \le c\,\|v\|_{TW^1_p(G)}. \tag{5.14}$$

является следствием леммы 3.

Далее, с помощью неравенства Гёльдера получим, что

$$|\bar v(z)|^p \le c\,\varphi(z)^{2-n} \int_{\gamma_z} |v(y,z)|^p d\gamma_z(y), \quad \gamma_z = \{y : y/\varphi(z) \in \gamma = \partial\omega\},$$

откуда

$$\int_0^1 Q(z)|\bar{v}(z)|^p dz \le c \int_\Gamma \frac{Q(z)}{\varphi(z)^{n-2}}|v(x)|^p ds_x,$$

где ds_x – элемент площади поверхности Γ. При $p < n-1$ желаемый результат вытекает из (5.14) и последнего неравенства.

При $p \ge n-1$ требуется оценить последнее слагаемое в (5.13). Используя опять неравенство Гёльдера для оценки среднего значения (3.1), найдем, что

$$|\bar{v}(z) - \bar{v}(\zeta)|^p \le c \int_\gamma |v(\varphi(z)Y, z) - v(\varphi(\zeta)Y, \zeta)|^p d\gamma(Y).$$

Интегрирование по фиктивной переменной $Y' \in \gamma$ дает

$$|\bar{v}(z) - \bar{v}(\zeta)|^p \le c \iint_{\gamma\times\gamma} |v(\varphi(z)Y, z) - v(\varphi(z)Y', z)|^p d\gamma(Y) d\gamma(Y') +$$

$$c \iint_{\gamma\times\gamma} |v(\varphi(z)Y', z) - v(\varphi(\zeta)Y, \zeta)|^p d\gamma(Y) d\gamma(Y').$$

Интегрируя по переменным z, ζ, придем к оценке

$$\int_0^1\int_0^1 \sigma(z,\zeta)|\bar{v}(z) - \bar{v}(\zeta)|^p \frac{dz d\zeta}{|z-\zeta|^{p+2-n}} \le c\, I_1 + c\, I_2,$$

где

$$I_1 = \iint_{\Gamma\times\Gamma} \frac{|v(x) - v(\xi)|^p}{|z-\zeta|^{p+2-n}} (\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n} \sigma(z,\zeta) ds_x ds_\xi,$$

$$I_2 = \int_0^1 dz \iint_{\gamma\times\gamma} |v(\varphi(z)Y, z) - v(\varphi(z)Y', z)|^p d\gamma(Y) d\gamma(Y') \int_0^1 \frac{\sigma(z,\zeta)}{|z-\zeta|^{p+2-n}} d\zeta.$$

Из определений (5.1), (5.2) следует, что

$$I_1 \le \begin{cases} c\, \|\!|v|\!\|^p_{p,\Gamma}, & p = n-1, \\ c\,(v)^p_{p,\Gamma}, & p > n-1. \end{cases}$$

Таким образом, для доказательства оценки (5.12) достаточно проверить неравенство $I_2 \le c\|v\|^p_{TW^1_p(G)}$.

Если $p > n-1$, то

$$\int_0^1 \frac{\sigma(z,\zeta) d\zeta}{|z-\zeta|^{p+2-n}} \le c \int_{|\zeta - z| > \varphi(z)} \frac{d\zeta}{|z-\zeta|^{p+2-n}} \le c\,\varphi(z)^{n-p-1}.$$

В случае $p = n - 1$ используем соотношение $\varphi(z) \sim \varphi(\zeta)$ при $2^{-1} \le z\zeta^{-1} \le 2$ и получим

$$\int\limits_0^1 \frac{\sigma(z,\zeta)d\zeta}{|z-\zeta|^{p+2-n}} \le c \int\limits_{|\zeta - z| > \varphi(z)} \frac{|\zeta - z|^{-1}d\zeta}{(1+\log(|\zeta - z|/\varphi(z)))^p} \le c.$$

Отсюда при $p \ge n - 1$ имеем

$$I_2 \le c \int\limits_0^1 dz \iint\limits_{\gamma_z \times \gamma_z} |v(y,z) - v(y',z)|^p \frac{d\gamma_z(y)d\gamma_z(y')}{\varphi(z)^{n+p-3}} \le$$

$$\le c \int\limits_0^1 dz \iint\limits_{\gamma_z \times \gamma_z} |v(y,z) - v(y',z)|^p \frac{d\gamma_z(y)d\gamma_z(y')}{|y-y'|^{n+p-3}},$$

где $\gamma_z = \partial\omega_z$, $\omega_z = \{y \in \mathbf{R}^{n-1} : y/\varphi(z) \in \omega\}$. Так как пространство $TW_p^1(G)$ вложено в $TW_p^1(\Omega)$, то существует такое продолжение $u \in W_p^1(\Omega)$ функции v с общей границы $\partial\Omega = \partial G$, для которого верна оценка $\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \le c\,\|v\|_{TW_p^1(G)}$. При почти всех $z \in (0,1)$ имеем $u(\cdot, z) \in W_p^1(\omega_z)$, и по теореме Гальярдо [1] справедлива оценка

$$\iint\limits_{\gamma_z \times \gamma_z} |v(y,z) - v(y',z)|^p \frac{d\gamma_z(y)d\gamma_z(y')}{|y-y'|^{n+p-3}} \le c\,\|\nabla u(\cdot, z)\|^p_{L_p(\omega_z)}$$

с константой, не зависящей от z, v. Интегрируя последнее неравенство по $z \in (0,1)$, найдем, что

$$I_2 \le c\,\|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega \cap U)} \le c\,\|v\|^p_{TW_p^1(G)},$$

чем и заканчивается доказательство леммы.

Доказательство теоремы 3. (i) Принадлежность $f^{(1)} = \mu_0 f \in TW_p^1(\Omega)^*$ вытекает из замечания 2. Кроме того,

$$|\langle f^{(1)}, v\rangle| = |\langle f, \mu_0 v\rangle| \le c\,\|f\|_{TW_p^1(G)^*} \|\mu_0 v\|_{TW_p^1(G)}.$$

По лемме 8 последняя норма не больше $c\,\|v\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_0)}$. Тем самым $f^{(1)} \in W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_0)$.

Проверим оценку (5.3). Так как

$$\|(1-\mu_0)\bar{v}\|_{TW_p^1(G)} \sim \|(1-\mu_0)\bar{v}\|_{Y_p(0,1)},$$

то

$$|\langle f^{(2)}, v\rangle| \le c(f)\,\|(1-\mu_0)\bar{v}\|_{Y_p(0,1)}.$$

Таким образом, (5.3) является следствием оценки

$$\|(1-\mu_0)\bar{v}\|_{Y_p(0,1)} \le c\,\|\bar{v}\|_{Y_p(0,1)}. \tag{5.15}$$

В случае $p < n-1$ доказательство последней дословно повторяет соответствующие рассуждения теоремы 2. Пусть $p > n-1$. Тогда

$$\|(1-\mu_0)\bar{v}\|^p_{Y_p(0,1)} \le \int_0^1 |(1-\mu_0(z))\bar{v}(z)|^p dz +$$

$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{|(1-\mu_0(z))\bar{v}(z)-(1-\mu_0(\zeta))\bar{v}(\zeta)|^p}{|z-\zeta|^{p+2-n}}\sigma(z,\zeta)dzd\zeta, \tag{5.16}$$

где

$$\sigma(z,\zeta) = \max\left\{\frac{M(z,\zeta)^{n-2}}{|z-\zeta|^{n-2}}, 1\right\}.$$

Ясно, что правая часть (5.16) не больше

$$c\,\|\bar{v}\|^p_{Y_p(0,1)} + c\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |\bar{v}(z)|^p \max\{M(z,\zeta)^{n-2}, |z-\zeta|^{n-2}\}dzd\zeta.$$

Интеграл по $(0,1)\times(0,1)$ не превосходит $\|\bar{v}\|^p_{L_p(0,1)}$, откуда следует (5.15).

В случае $p = n-1$ имеем оценку

$$\|(1-\mu_0)\bar{v}\|^p_{Y_p(0,1)} \le c\,\|\bar{v}\|^p_{Y_p(0,1)} + c\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{|\mu_0(z)-\mu_0(\zeta)|^p|\bar{v}(z)|^p}{|z-\zeta|}\sigma(z,\zeta)dzd\zeta,$$

где весовая функция σ отлична от нуля только на множестве $2^{-1} \le z\zeta^{-1} \le 2$ и допускает оценку $\sigma(z,\zeta)|z-\zeta|^{p-1} \le \mathrm{const}$. Так как $\mu_0|_{(0,z_1)} = 0$, то последний интеграл по $(0,1)\times(0,1)$ не превосходит

$$c\int\limits_{z_1/2}^1 |\bar{v}(z)|^p dz \int\limits_0^1 |z-\zeta|^{p-1}\sigma(z,\zeta)d\zeta,$$

что не больше $c\int_{z_1/2}^1 |\bar{v}(z)|^p dz$, и, следовательно, не превосходит $c\,\|\bar{v}\|^p_{Y_p(0,1)}$. Отсюда вытекает (5.15) и при $p = n-1$. Итак, оценка (5.3) установлена. Кроме того, непрерывность функционала

$$TW^1_p(G) \ni v \mapsto \langle(1-\mu_0)\bar{f}, v\rangle$$

вытекает из леммы 10.

Обратимся к оценке (5.4). Рассуждая так же, как при доказательстве неравенства (4.2) в теореме 2, придем к оценке (4.10), которую перепишем в виде

$$\textstyle\sum_{k=1}^N \alpha_k^{p'} \le 2\,\langle(1-\mu_0)(f-\bar{f}), v\rangle, \tag{5.17}$$

где
$$v(x)=\sum\nolimits_{k=1}^{N}\alpha_k^{p'-1}\nu_k(z)(v_k(x)-\mathring{v}_k),\quad x\in\partial\Omega,$$
$\nu_k(z)v_k(x)=0$ вне Γ_k, а все обозначения имеют тот же смысл, что и в теореме 2. Далее оценим $\|v\|_{TW_p^1(G)}$. Так как $v(x)=0$ вне множества $\{x\in\Gamma: z\le z_0\}$, то верна оценка (5.9). Полунорма $|v|_{p,\Gamma}$ оценивается так же, как и в теореме 2, и здесь верно неравенство
$$|v|_{p,\Gamma}^p\le c\sum\nolimits_{k=1}^{N}\alpha_k^{p'}. \tag{5.18}$$
Оценим последнее слагаемое в (5.9). Имеем
$$\int_\Gamma|v(x)|^p\frac{ds_x}{\varphi(z)^{p-1}}\le c\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^{(p'-1)p}\int_\Gamma\nu_k(z)^p|v_k(x)-\mathring{v}_k|^p\frac{ds_x}{\varphi(z)^{p-1}}\le$$
$$\le c\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^{p'}\varphi(z_k)^{1-p}\|v_k-\mathring{v}_k\|_{L_p(\Gamma_k)}^p\le c\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^{p'}[v_k]_{p,\Gamma_k}^p,$$
где на последнем шаге использована лемма 5. Так как по предположению $[v_k]_{p,\Gamma_k}\le 1$, то
$$\int_\Gamma|v(x)|^p\frac{ds_x}{\varphi(z)^{p-1}}\le c\sum\nolimits_{k=1}^{N}\alpha_k^{p'}. \tag{5.19}$$
Объединяя (5.9) и (5.18) – (5.19), получаем
$$\|v\|_{TW_p^1(G)}^p\le c\sum\nolimits_{k=1}^{N}\alpha_k^{p'}.$$
Отсюда и из (5.17) следует неравенство
$$\sum\nolimits_{k=1}^{N}\alpha_k^{p'}\le c\,\|(1-\mu_0)(f-\bar f)\|_{TW_p^1(G)^*}\left(\sum\nolimits_{k=1}^{N}\alpha_k^{p'}\right)^{1/p},$$
а, значит, и оценка (5.4).

(ii) Если $h\in W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_0)$, то $f^{(1)}=\mu_0 h\in W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma_0)$ в силу теоремы Гальярдо и замечания 2, а так как $TW_p^1(G)\subset W_p^{1-1/p}(\Gamma_0)$, то $f^{(1)}\in TW_p^1(G)^*$.

В условиях теоремы функционал
$$v\mapsto\langle f^{(3)},v\rangle=\sum\nolimits_{k\ge1}\langle\lambda_k f_k,v\rangle$$
непрерывен в пространстве $TW_p^1(\Omega)$ по теореме 2, а значит, и в пространстве $TW_p^1(G)$ поскольку последнее вложено в $TW_p^1(\Omega)$. Отсюда и из (4.5) следует также оценка (5.5).

В заключение убедимся в непрерывности функционала $TW_p^1(G)\ni v\mapsto\langle f^{(2)},v\rangle$. Так как $g\in Y_p(0,1)^*$, то
$$|\langle f^{(2)},v\rangle|\le c(g)\,\|(1-\mu_0)\bar v\|_{Y_p(0,1)}.$$
Теперь требуемый результат вытекает из оценки (5.15) и леммы 10. Доказательство теоремы закончено.

Список литературы

[1] *Gagliardo E.* Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in più variabili// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 284–305.

[2] *Leray J., Lions J-L.* Quelques résultats de Višik sur les problèm elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty – Browder // Bull. Soc. Math. Fr. 1965. V. 93. P. 97 – 107.

[3] *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950, 255 с.

[4] *Мазья В. Г.* Функции с конечным интегралом Дирихле в области с вершиной пика на границе// Зап. научн. семин. ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1983. Т. 126. С. 117–137.

[5] *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева.–Л., 1985. 415 с.

[6] *Глушко В. П.* Об областях, которые звездны относительно шара// Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. С. 1215–1216.

[7] *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* Следы функций из пространств Соболева на границе области с пиком// Современные проблемы геометрии и анализа.–Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. 1989. Т. 14. С. 182–208.

[8] *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* Теоремы вложения и продолжения для функций в нелипшицевых областях. Изд. СПбГУ, 2006, 399с.

[9] *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.–М.: Мир, 1973. 342 с.

[10] *С. В. Поборчий.* О непрерывности оператора граничного следа: $W_p^1(\Omega) \to L_q(\partial\Omega)$ для области с внешним пиком// Вестник С-Петербург. ун-та. 2005. Сер. 1. Вып. 3. С. 51–60.

[11] *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.–М.: Наука, 1996. 480 с.

[12] *Jones P. W.* Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces// Acta Math. V. 147. P. 71–88.

Мазья Владимир Гилелевич
Department of Mathematics
Linköping University
58183 Linköping, Sweden
vlmaz@mai.liu.se

Поборчий Сергей Всеволодович
198904, Санкт-Петербург,
Петродворец, Библиотечная пл. 2
Математико-механический ф-т СПбГУ
Sergei.Poborchi@paloma.spbu.ru
дом. тел. 4305164

УДК 517.5

В. Г. Мазья, С. В. Поборчий. О разрешимости задачи Неймана в области с пиком.

Рассматривается задача Неймана для эллиптического квазилинейного уравнения второго порядка в многомерной области с вершиной пика на гпанице. При определенных условиях исследование разрешимости задачи Неймана сводится к описанию пространства, сопряженного к пространству Соболева $W_p^1(\Omega)$, $1 < p < \infty$ или (в случае однородного уравнения с неоднородным краевым условием) к описанию пространства, сопряженного к пространству $TW_p^1(\Omega)$ граничных следов функций из класса $W_p^1(\Omega)$. Упомянутые сопряженные пространства характеризуются в терминах классов Соболева с отрицательными показателями гладкости на липшицевых областях или липшицевых поверхностях, а также в терминах некоторых весовых классов функций на интервале $(0,1)$ числовой оси. Доказательство основных результатов базируется на известном явном описании пространств $TW_p^1(\Omega)$ в области с вершиной внешнего или внутреннего пика на границе.

Библиогр. 12 назв.

Ключевые слова: задача Неймана, пространства Соболева, области с пиками, граничные следы, сопряженные пространства.

Key words: Neumann problem, Sobolev spaces, domains with cusps, boundary traces, dual spaces.

РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача Неймана для эллиптического квазилинейного уравнения второго порядка в области с вершиной пика на границе. При определенных условиях исследование ее разрешимости сводится к описанию пространств $W_p^1(\Omega)^*$ или $TW_p^1(\Omega)^*$, сопряженных к пространству Соболева $W_p^1(\Omega)$ или к пространству граничных следов $TW_p^1(\Omega)$ функций из класса $W_p^1(\Omega)$. Дано явное описание указанных сопряженных пространств для области с вершиной внешнего или внутреннего пика на границе.