В. Г. Мазья, С. В. Поборчий

Однозначная разрешимость интегрального уравнения для гармонического потенциала простого слоя на границе области с пиком

Отыскание решения задачи Дирихле

$$\Delta u = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad u\big|_{\Gamma} = f, \quad \Gamma = \partial\Omega$$

для области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ в виде потенциала простого слоя $u = V\varrho$ приводит к граничному интегральному уравнению для нахождения плотности ϱ в виде $V\varrho = f$. Разрешимость граничных интегральных уравнений теории потенциала исследовалась в многочисленных работах при различных предположениях относительно гладкости Γ (см. обзор [1], недавнюю работу [2] и имеющуюся там литературу).

Оператор V есть псевдодифференциальный оператор, главная часть символа которого совпадает с главной частью символа оператора $(-\delta)^{-1/2}$, где δ – оператор Бельтрами на Γ. Принимая во внимание этот факт, можно показать, что для достаточно гладкой поверхности Γ оператор V^{-1} отображает $W_2^s(\Gamma)$ на $W_2^{s-1}(\Gamma)$ при любом вещественном s.

Если $\Gamma \in C^{0,1}$, то уравнение $V\varrho = f$ однозначно разрешимо в классе $W_2^{-1/2}(\Gamma)$ при всех $f \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ [2]. Разрешимость интегральных уравнений теории потенциала на плоском контуре с точкой возврата изучалась в работах [3] – [5]. Настоящей работой мы начинаем исследование граничных интегральных уравнений теории потенциала для многомерной области с изолированным пиком. Мы показываем, что если Γ – граница упомянутой области, то потенциал простого слоя $C(\Gamma) \ni \varrho \mapsto V\varrho \in Tr(\Gamma)$, действующий в пространство $Tr(\Gamma)$ следов на Γ функций с конечным интегралом Дирихле на $\mathbf{R}^n$, может быть единственным образом расширен до изоморфизма между пространством, сопряженным к $Tr(\Gamma)$ и самим пространством $Tr(\Gamma)$. Используя явное описание пространства $Tr(\Gamma)$ [6], [7, глава 7], можно привести необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости уравнения $V\varrho = f$ в терминах функции, описывающей заострение пика.

Дадим точное определение поверхности Γ, с которой далее будем иметь дело. Рассмотрим ограниченную односвязную область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n > 2$, граница которой содержит начало координат, $\partial\Omega \setminus \{O\} \in C^{0,1}$, а точка $\{O\}$ имеет такую окрестность, которая пересекается с Ω или с $\mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ по множеству

$$\{x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n : x_n \in (0,1), x'/\varphi(x_n) \in \omega\},$$

где φ – возрастающая функция класса $C^{0,1}([0,1])$, такая, что $\varphi(0) = \lim_{t\to 0} \varphi'(t) = 0$, а ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^{n-1}$ с границей класса $C^{0,1}$. Положим $\Gamma = \partial\Omega$.

Далее $B_r(x)$ означает открытый шар в $\mathbf{R}^n$ радиуса r с центром в x, $B_r = B_r(0)$. Если G – область в $\mathbf{R}^n$, то $C_0^\infty(G)$ есть множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в G.

Обозначим через $\mathring{L}_2^1(\mathbf{R}^n)$ замыкание множества $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ относительно нормы $\|\nabla u\|_{L_2(\mathbf{R}^n)}$, где ∇u означает градиент функции u.

Лемма 1. *При $n > 2$ пространство $\mathring{L}_2^1(\mathbf{R}^n)$ состоит из функций $u \in L_q(\mathbf{R}^n)$, $q = 2n/(n-2)$, для которых $\nabla u \in L_2(\mathbf{R}^n)$. Оно гильбертово со скалярным произведением*

$$\mathring{L}_2^1(\mathbf{R}^n) \ni u, v \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} \nabla u \nabla v dx.$$

Доказательство. Пусть $W_{2,q}^1(\mathbf{R}^n)$ – банахово пространство функций в $\mathbf{R}^n$ с конечной нормой $u \mapsto \|u\|_{L_q(\mathbf{R}^n)} + \|\nabla u\|_{L_2(\mathbf{R}^n)}$. В силу неравенства Соболева [8]

$$\|v\|_{L_q(\mathbf{R}^n)} \le \mathrm{const}\, \|\nabla v\|_{L_2(\mathbf{R}^n)}, \quad v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n),$$

последовательность элементов $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, фундаментальная в $\mathring{L}_2^1(\mathbf{R}^n)$, фундаментальна и в $L_q(\mathbf{R}^n)$. Отсюда и из неравенства Соболева следует, что пространство $\mathring{L}_2^1(\mathbf{R}^n)$ непрерывно вложено в $W_{2,q}^1(\mathbf{R}^n)$. Обратное вложение вытекает из того факта, что $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ плотно в $W_{2,q}^1(\mathbf{R}^n)$. Установим последнее.

Пусть $u \in W_{2,q}^1(\mathbf{R}^n)$ и пусть $\eta \in C_0^\infty(B_2)$, $\eta|_{B_1} = 1$, $0 \le \eta \le 1$. Положим $\eta_k(x) = \eta(x/k)$, $k = 1, 2, \ldots$, и проверим, что u аппроксимируется функциями $u_k = \eta_k u$. В самом деле,

$$\|u - u_k\|_{L_q(\mathbf{R}^n)} \le \|u\|_{L_q(\mathbf{R}^n \setminus B_k)} \to 0.$$

Далее
$$\|\nabla(u_k-u)\|_{L_2(\mathbf{R}^n)} \le \|(1-\eta_k)\nabla u\|_{L_2(\mathbf{R}^n)}+$$
$$+\mathrm{const}\,\||x|^{-1}u\|_{L_2(B_{2k}\setminus B_k)}. \qquad (1)$$
Так как $\eta_k|_{B_k}=1$, то первое слагаемое в правой части (1) стремится к нулю. Покажем, что функция $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto |x|^{-1}u(x)$ принадлежит $L_2(\mathbf{R}^n)$. Тогда последнее слагаемое в (1) также стремится к нулю. Используя сферические координаты в $\mathbf{R}^n$, получим
$$\||x|^{-1}u\|^2_{L_2(\mathbf{R}^n)} = \int_{S^{n-1}} dS^{n-1}(\alpha)\int_0^\infty |u(r,\alpha)/r|^2 r^{n-1}dr.$$
Применяя неравенство Харди, мажорируем последний интеграл по $(0,\infty)$ величиной
$$\mathrm{const}\int_0^\infty \left|\frac{\partial u}{\partial r}(r,\alpha)\right|^2 r^{n-1}dr,$$
и значит,
$$\||x|^{-1}u\|^2_{L_2(\mathbf{R}^n)} \le \mathrm{const}\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla u(x)|^2dx<\infty.$$
Итак, мы установили, что $\lim_{k\to\infty}\|u-u_k\|_{W^1_{2,q}(\mathbf{R}^n)}=0$. Остается аппроксимировать функции u_k средними функциями, которые принадлежат $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ поскольку $\mathrm{supp}\,u_k\subset \overline{B}_{2k}$. Таким образом, мы получаем $\mathring{L}^1_2(\mathbf{R}^n)=W^1_{2,q}(\mathbf{R}^n)$ с эквивалентностью норм. Доказательство леммы закончено.

Введем пространство $Tr(\Gamma)$ следов $u|_\Gamma$ функций $u\in\mathring{L}^1_2(\mathbf{R}^n)$ с нормой
$$\|f\|_{Tr(\Gamma)}=\inf\{\|\nabla u\|_{L_2(\mathbf{R}^n)}:\, u\in\mathring{L}^1_2(\mathbf{R}^n), u|_\Gamma=f\}.$$
Сопряженное к $Tr(\Gamma)$ пространство обозначим через $Tr(\Gamma)^*$.

Пусть $H(\Gamma)$ – подпространство $\mathring{L}^1_2(\mathbf{R}^n)$ функций, гармонических в каждой из областей Ω и $\mathbf{R}^n\setminus\bar{\Omega}$.

Лемма 2. *Отображение*
$$H(\Gamma)\ni u\mapsto Tu=u|_\Gamma\in Tr(\Gamma) \qquad (2)$$
есть изоморфизм между пространствами $H(\Gamma)$ *и* $Tr(\Gamma)$.

Доказательство. Если $Tu = f$, то функция u решает как внутреннюю, так и внешнюю задачи Дирихле для уравнения Лапласа с граничным условием $u|_\Gamma = f$. Существование и единственность такой функции для всех $f \in Tr(\Gamma)$ хорошо известны [9, §12], так что отображение (2) взаимно однозначно и сюръективно. Равенство $\|f\|_{Tr(\Gamma)} = \|\nabla u\|_{L_2(\mathbf{R}^n)}$ следует из того, что минимум интеграла Дирихле на множестве функций, имеющих одинаковый след на границе области, достигается на функции, гармонической вне Γ.

Изучим свойства некоторых интегралов типа потенциала.

Лемма 3. *При* $\lambda \in (0,1]$ *интеграл*

$$\int_\Gamma |\xi - x|^{1-n+\lambda} d\Gamma(\xi)$$

ограничен равномерно относительно $x \in \mathbf{R}^n$.

Доказательство. Если $x' \in \Gamma$ – такая точка, что

$$|x' - x| = \min\{|\xi - x| : \xi \in \Gamma\},$$

то

$$|x' - \xi| \le |x' - x| + |x - \xi| \le 2\,|x - \xi|, \quad \xi \in \Gamma,$$

поэтому достаточно доказать лемму в предположении, что $x \in \Gamma$ – точка, близкая к вершине пика. Положим $x = (\varphi(z)y, z)$, $\xi = (\varphi(\zeta)\eta, \zeta)$, $z, \zeta \in (0,1)$, $y, \eta \in \partial\omega$. Пусть еще

$$\Gamma_1(x) = \{\xi : \zeta \in (0, z - \varphi(z))\}; \quad \Gamma_2(x) = \{\xi : \zeta \in (z - \varphi(z), z + \varphi(z))\};$$

$$\Gamma_3(x) = \{\xi : \varphi(z) < \zeta - z < \varphi(\zeta)\}; \quad \Gamma_4(x) = \{\xi : \zeta \in (z + \varphi(\zeta), 1)\}.$$

Достаточно показать, что каждый из интегралов

$$J_i(x) = \int_{\Gamma_i(x)} |\xi - x|^{1-n+\lambda} d\Gamma(\xi), \quad i = 1,2,3,4,$$

ограничен равномерно относительно x.

Имеем

$$J_1(x) \le c \int_0^{z-\varphi(z)} \frac{\varphi(\zeta)^{n-2} d\zeta}{(z-\zeta)^{n-1-\lambda}} =$$

$$= c \int_1^{z/\varphi(z)} \frac{\varphi(z - t\varphi(z))^{n-2}\varphi(z)dt}{(\varphi(z)t)^{n-1-\lambda}} \le c\,\varphi(z)^\lambda \int_1^{z/\varphi(z)} t^{\lambda+1-n} \le c,$$

где c – положительная константа, не зависящая от x.

Далее, полагая $\gamma = \partial\omega$, заметим, что

$$J_2(x) \le c \int_{z-\varphi(z)}^{z+\varphi(z)} \varphi(\zeta)^{n-2} d\zeta \int_\gamma \frac{d\gamma(\eta)}{|x-\xi|^{n-1-\lambda}}.$$

Так как

$$|x-\xi| = (|\zeta - z|^2 + |\varphi(z)y - \varphi(\zeta)\eta|^2)^{1/2} \ge c\,(|\zeta - z| + \varphi(z)|y-\eta|), \quad (3)$$

и $\varphi(\zeta) \le c\,\varphi(z)$, то

$$J_2(x) \le c\,\varphi(z)^{n-2} \int_{z-\varphi(z)}^{z+\varphi(z)} d\zeta \int_\gamma \frac{d\gamma(\eta)}{(|\zeta - z| + \varphi(z)|y-\eta|)^{n-1-\lambda}},$$

Поменяем порядок интегрирования и в интеграле по переменной ζ сделаем замену $\zeta - z = t\varphi(z)$. В результате получим

$$J_2(x) \le c\,\varphi(z)^{\lambda} \int_\gamma d\gamma(\eta) \int_{-1}^{1} (|t| + |y-\eta|)^{1+\lambda-n} dt. \quad (4)$$

Еще одна замена $t = |y-\eta|s$ приводит правую часть (4) к виду

$$c\,\varphi(z)^{\lambda} \int_\gamma \frac{d\gamma(\eta)}{|y-\eta|^{n-2-\lambda}} \int_{-1/|y-\eta|}^{1/|y-\eta|} \frac{ds}{(1+|s|)^{n-1-\lambda}}.$$

Таким образом, если $n \ne 3$ или $\lambda \ne 1$, то

$$J_2(x) \le c \int_\gamma \frac{d\gamma(\eta)}{|y-\eta|^{n-2-\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(1+|s|)^{n-1-\lambda}} \le c \int_\gamma \frac{d\gamma(\eta)}{|y-\eta|^{n-2-\lambda}}.$$

Поскольку γ – поверхность класса $C^{0,1}$, то последний интеграл ограничен равномерно относительно $y \in \gamma$, и, значит, величина $J_2(x)$ ограничена равномерно относительно x.

В случае $n = 3$, $\lambda = 1$ имеем

$$J_2(x) \le c\,\varphi(z) \int_\gamma \log(1 + |y-\eta|^{-1}) d\gamma(\eta),$$

и выражение в правой части снова мажорируется константой , не зависящей от x.

Обращаясь к оценке $J_3(x)$, заметим, что $z > \zeta - \varphi(\zeta)$ при $\xi \in \Gamma_3(x)$, поэтому $\varphi(z) > \varphi(\zeta)(1 - o(1))$, где $o(1)$ – положительная бесконечно малая при $\zeta \to 0$. Таким образом, существует константа $c_0 > 1$, зависящая только от функции φ, для которой $\varphi(\zeta) < c_0\varphi(z)$ при $\xi \in \Gamma_3(x)$. Отсюда

$$\Gamma_3(x) \subset \{\xi = (\varphi(\zeta)\eta, \zeta) : 1 < \varphi(z)^{-1}(\zeta - z) < c_0,\ \eta \in \gamma\}.$$

Принимая еще во внимание неравенство (3), получим

$$J_3(x) \le c \int\limits_{\{1<(\zeta-z)/\varphi(z)<c_0\}} \varphi(\zeta)^{n-2} d\zeta \int\limits_{\gamma} \frac{d\gamma(\eta)}{(\zeta - z + \varphi(z)|y-\eta|)^{n-1-\lambda}} \le$$

$$\le c\,\varphi(z)^{\lambda} \int_{\gamma} d\gamma(\eta) \int_1^{c_0} \frac{dt}{(t + |y-\eta|)^{n-1-\lambda}} \le$$

$$\le c \int_{\gamma} \frac{d\gamma(\eta)}{|y-\eta|^{n-2-\lambda}} \int_{1/|y-\eta|}^{c_0/|y-\eta|} \frac{ds}{(1+s)^{n-1-\lambda}}.$$

Рассуждая как и выше при оценке $J_2(x)$, убедимся, что правая часть последнего неравенства мажорируется константой, не зависящей от x. Наконец

$$J_4(x) \le c \int_{\zeta - \varphi(\zeta) > z} \frac{\varphi(\zeta)^{n-2}}{(\zeta - z)^{n-1-\lambda}} \le c \int_z^1 (\zeta - z)^{\lambda - 1} d\zeta \le \mathrm{const},$$

чем и заканчивается доказательство леммы.

Лемма 4. *Операторы*

$$L_2(\Gamma) \ni v \mapsto \int_{\Gamma} \frac{v(y)d\Gamma(y)}{|x-y|^{n-1-\lambda}} \in L_2(\Gamma), \quad \lambda \in (0,1],$$

$$L_2(\mathbf{R}^n) \ni v \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} \frac{v(y)dy}{|x-y|^{n-1}} \in L_2(\Gamma)$$

непрерывны.

Доказательство. Применяя неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{v(y)d\Gamma(y)}{|x-y|^{n-1-\lambda}} \right|^2 \le \int_{\Gamma} \frac{v(y)^2 d\Gamma(y)}{|x-y|^{n-1-\lambda}} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma(y)}{|x-y|^{n-1-\lambda}}.$$

По лемме 3 последний интеграл ограничен равномерно относительно x, поэтому

$$\int_{\Gamma} d\Gamma(x) \left| \int_{\Gamma} \frac{v(y)d\Gamma(y)}{|x-y|^{n-1-\lambda}} \right|^2 \le c \int_{\Gamma} v(y)^2 d\Gamma(y) \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma(x)}{|x-y|^{n-1-\lambda}}.$$

Выражение в правой части не больше $c\,\|v\|^2_{L_2(\Gamma)}$, и первое утверждение леммы доказано.

Переходя ко второму утверждению, положим при $x \in \Gamma \setminus \{O\}$

$$u_1(x) = \int_{\{|x-y|<|x|\}} \frac{|v(y)|dy}{|x-y|^{n-1}}, \quad u_2(x) = \int_{\{|x-y|>|x|\}} \frac{|v(y)|dy}{|x-y|^{n-1}}.$$

Достаточно установить оценки

$$\|u_i\|_{L_2(\Gamma)} \le c\,\|v\|_{L_2(\mathbf{R}^n)}, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

По неравенству Коши – Буняковского имеем

$$u_1(x)^2 \le \int_{\{|x-y|<|x|\}} \frac{v(y)^2 dy}{|x-y|^{n-3/2}} \int_{\{|x-y|<|x|\}} \frac{dy}{|x-y|^{n-1/2}} \le$$

$$\le c\,|x|^{1/2} \int_{B_r} \frac{v(y)^2 dy}{|x-y|^{n-3/2}}, \quad r = 2\,\mathrm{diam}(\Gamma).$$

Интегрируя по Γ, получим

$$\int_{\Gamma} u_1(x)^2 dx \le \int_{B_r} v(y)^2 dy \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma(x)}{|x-y|^{n-3/2}}.$$

В силу леммы 3 последний интеграл ограничен равномерно относительно y, и оценка (5) при $i = 1$ установлена. Переходя ко второй оценке (5), вновь используем неравенство Коши – Буняковского

$$u_2(x)^2 \le \int_{\{|x-y|>|x|\}} v(y)^2 dy \int_{\{|x-y|>|x|\}} \frac{dy}{|x-y|^{2n-2}},$$

откуда

$$\int_{\Gamma} u_2(x)^2 dx \le c\,\|v\|^2_{L_2(\mathbf{R}^n)} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma(x)}{|x|^{n-2}}.$$

По лемме 3 последний интеграл конечен, и мы приходим к оценке (5) при $i = 2$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Для* $u \in \mathring{L}^1_2(\mathbf{R}^n)$ *и п.в.* $x \in \Gamma$ *верно интегральное представление*

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \nabla u(y)(\nabla_x E)(x,y)dy, \qquad (6)$$

где $E(x,y) = ((2-n)|S^{n-1}||x-y|^{n-2})^{-1}$ *– фундаментальное решение уравнения Пуассона.*

Это утверждение вытекает из леммы 4 и хорошо известной формулы (6) для $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $x \in \mathbf{R}^n$.

Лемма 5. *Для* $v \in L_2(\Gamma)$ *положим*

$$(S_\alpha v)(x) = \int_\Gamma \frac{v(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}.$$

Тогда $S_1 : L_2(\Gamma) \to L_2(\mathbf{R}^n)$ *и* $S_2 : L_2(\Gamma) \to L_{2,loc}(\mathbf{R}^n)$ *– непрерывные линейные операторы.*

Доказательство. Зафиксируем такое $R > 0$, что $\Gamma \subset B_R$. При $x \in B_R$ применим неравенство Коши – Буняковского

$$(S_1 v)(x)^2 \le \int_\Gamma \frac{v(y)^2 d\Gamma(y)}{|x-y|^{n-1/2}} \int_\Gamma \frac{d\Gamma(y)}{|x-y|^{n-3/2}}.$$

Последний интеграл равномерно ограничен по лемме 3, поэтому

$$\int\limits_{B_R} (S_1 v)(x)^2 dx \le c \int\limits_\Gamma v(y)^2 d\Gamma(y) \int\limits_{|x-y|<2R} \frac{dx}{|x-y|^{n-1/2}} \le c\, R^{1/2} \|v\|^2_{L_2(\Gamma)}. \qquad (7)$$

В случае $|x| \ge R$ применим неравенство Коши – Буняковского в виде

$$(S_1 v)(x)^2 \le \int_\Gamma v(y)^2 d\Gamma(y) \int_\Gamma \frac{d\Gamma(y)}{|x-y|^{2(n-1)}}.$$

Отсюда

$$\int\limits_{|x|>R} (S_1 v)(x)^2 dx \le \|v\|^2_{L_2(\Gamma)} \int\limits_\Gamma d\Gamma(y) \int\limits_{|x-y|>\mathrm{dist}(\partial B_R,\Gamma)} \frac{dx}{|x-y|^{2(n-1)}} \le$$

$$\le c\, \mathrm{dist}(\partial B_R, \Gamma)^{2-n} \|v\|^2_{L_2(\Gamma)}. \qquad (8)$$

Из (7) и (8) следует утверждение леммы относительно S_1.

Для оператора S_2 достаточно при $r > 0$ проверить оценку

$$\int_{B_r} S_2 v^2 dx \le c(r, \Gamma, n) \int_\Gamma v(y)^2 d\Gamma(y). \tag{9}$$

Применяя неравенство Коши – Буняковского, получим

$$(S_2 v)(x)^2 \le \int_\Gamma \frac{v(y)^2 d\Gamma(y)}{|x-y|^{n-2}} \int_\Gamma \frac{d\Gamma(y)}{|x-y|^{n-2}}.$$

Последний интеграл равномерно ограничен по лемме 3, и левая часть (9) не больше

$$c \int_\Gamma v(y)^2 d\Gamma(y) \int_{|x|<r} \frac{dx}{|x-y|^{n-2}},$$

что не превосходит правой части (9).

Последняя лемма позволяет сформулировать такое утверждение.

Следствие 2. *Потенциал простого слоя*

$$(V\varrho)(x) = \int_\Gamma \varrho(y) E(x,y) d\Gamma(y) \tag{10}$$

является непрерывным оператором: $L_2(\Gamma) \to H(\Gamma)$.

Доказательство. Положим при малом $\varepsilon > 0$

$$\varrho_\varepsilon(y) = \begin{cases} \varrho(y), & \text{если } |\varrho(y)| < \varepsilon^{-1}, \\ 0, & \text{если } |\varrho(y)| \ge \varepsilon^{-1}. \end{cases}$$

Тогда $u_\varepsilon = V\varrho_\varepsilon \in C(\mathbf{R}^n)$ и u_ε гармоническая в каждой из областей Ω и $\mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Кроме того,

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \int_\Gamma \varrho_\varepsilon(y) \nabla_x E(x,y) d\Gamma(y), \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus \Gamma,$$

а так как $|\nabla_x E(x,y)| \le c\,|x-y|^{1-n}$, то по лемме 5 $u_\varepsilon \in \mathring{L}_2^1(\mathbf{R}^n)$. Следовательно, $u_\varepsilon \in H(\Gamma)$. Используя тот факт, что $\varrho_\varepsilon \to \varrho$ в $L_2(\Gamma)$ при $\varepsilon \to 0$ и применяя лемму 5, получим

$$\|\nabla(u_\varepsilon - u_\delta)\|_{L_2(\mathbf{R}^n)} \le c\,\|\varrho_\varepsilon - \varrho_\delta\|_{L_2(\Gamma)},$$

$$u_\varepsilon \to u = V\varrho \;\text{ в }\; L_{2,loc}(\mathbf{R}^n) \;\text{ при }\; \varepsilon \to 0.$$

Отсюда вытекает, что $u \in \mathring{L}_2^1(\mathbf{R}^n)$ и $u_\varepsilon \to u$ в $\mathring{L}_2^1(\mathbf{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$. Так как u_ε гармоническая в каждой из областей Ω и $\mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, то такова же и предельная функция. Остается заметить, что оценка $u(x) = O(|x|^{2-n})$ следует из определения (10).

Замечание 1. Объединяя следствие 2 с леммой 2, получаем непрерывность оператора $V : L_2(\Gamma) \to Tr(\Gamma)$.

Для доказательства основного результата работы понадобится еще одна лемма.

Лемма 6. *Рассмотрим потенциал простого слоя* (10) *как оператор* $V : L_2(\Gamma) \to H(\Gamma)$ *или как оператор* $V : L_2(\Gamma) \to Tr(\Gamma)$. *Его образ есть плотное множество как в* $H(\Gamma)$, *так и в* $Tr(\Gamma)$, *а его ядро тривиально в обоих случаях.*

Доказательство. В силу леммы 2 достаточно получить результат для пространства $H(\Gamma)$. Найдем оператор $V^* : H(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$, такой, что

$$(V\varrho, u)_{H(\Gamma)} = (\varrho, V^* u)_{L_2(\Gamma)}$$

для всех $\varrho \in L_2(\Gamma)$, $u \in H(\Gamma)$. Имеем

$$(V\varrho, u)_{H(\Gamma)} = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \nabla(V\varrho)\nabla u dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \nabla u(x) dx \nabla_x \int\limits_{\Gamma} \varrho(y) E(x,y) d\Gamma(y). \quad (11)$$

Покажем, что дифференцирование ∇_x можно внести под знак интеграла по Γ. В самом деле, пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. По лемме 5 интеграл по Γ от модуля подынтегральной функции есть функция из $L_{2,loc}(\mathbf{R}^n)$, и теорема Фубини дает

$$\int_{\mathbf{R}^n} (\nabla\psi)(x) dx \int_\Gamma \varrho(y) E(x,y) d\Gamma(y) =$$

$$= \int_\Gamma \varrho(y) d\Gamma(y) \int_{\mathbf{R}^n} (\nabla\psi)(x) E(x,y) dx. \quad (12)$$

Функция $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto E(x,y)$ имеет в $\mathbf{R}^n$ локально суммируемые производные первого порядка, и последний интеграл по $\mathbf{R}^n$ равен

$$-\int_{\mathbf{R}^n} \psi(x)(\nabla_x E)(x,y) dx. \quad (13)$$

Функция ψ ограничена и имеет компактный носитель, поэтому интеграл от модуля подынтегральной функции в (13) ограничен. Применяя теорему Фубини, перепишем выражение (12) в виде

$$-\int_{\mathbf{R}^n}\psi(x)dx\int_\Gamma \varrho(y)\nabla_x E(x,y)d\Gamma(y).$$

В силу произвольности функции $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ отсюда следует, что функция $V\varrho$ имеет обобщенный градиент в $\mathbf{R}^n$, равный

$$\int_\Gamma \varrho(y)\nabla_x E(x,y)d\Gamma(y).$$

Мы показали, что правая часть (11) может быть записана в виде

$$\int_{\mathbf{R}^n}\nabla u(x)dx\int_\Gamma \varrho(y)\nabla_x E(x,y)d\Gamma(y). \tag{14}$$

С помощью леммы 5 обосновывается возможность перемены порядка интегрирования в (14), так что интеграл (14) равен

$$\int_\Gamma \varrho(y)d\Gamma(y)\int_{\mathbf{R}^n}\nabla u(x)\nabla_x E(x,y)dx.$$

Ввиду следствия 1 последний интеграл по $\mathbf{R}^n$ есть $-u(y)$, и мы приходим к формуле

$$\int_{\mathbf{R}^n}\nabla(V\varrho)\nabla u dx=-\int_\Gamma \varrho u d\Gamma, \tag{15}$$

справедливой для всех $\varrho\in L_2(\Gamma)$, $u\in H(\Gamma)$. Итак, $V^*u=-u|_\Gamma$ при $u\in H(\Gamma)$.

Хорошо известно (см., например, [10, гл. 3, § 3]), что оператор V индуцирует разложения пространств $L_2(\Gamma)$ и $H(\Gamma)$ в виде

$$L_2(\Gamma)=\operatorname{Ker}V\oplus\overline{\operatorname{Im}V^*},\quad H(\Gamma)=\operatorname{Ker}V^*\oplus\overline{\operatorname{Im}V}, \tag{16}$$

где символы Ker и Im означают ядро и образ оператора, а $\oplus$ – ортогональную сумму подпространств гильбертова пространства.

Поскольку $\operatorname{Ker}V^*=0$, формулы (16) дают $\overline{V(L_2(\Gamma))}=H(\Gamma)$. Из (16) также следует, что условие $\operatorname{Ker}V=0$ равносильно условию $\overline{\operatorname{Im}V^*}=L_2(\Gamma)$, т.е. плотности множества $Tr(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$. Проверим последнее. Достаточно убедиться, что $Tr(\Gamma)$ содержит пространство $C^{0,1}(\Gamma)$ функций на Γ, удовлетворяющих условию Липшица, и множество $C^{0,1}(\Gamma)$ плотно в $L_2(\Gamma)$.

Пусть $f \in C^{0,1}(\Gamma)$. Тогда для некоторого $M > 0$ имеем

$$\sup\{|f(x) - f(y)|/|x - y| : x, y \in \Gamma, x \neq y\} \leq M.$$

Функция U, определенная в $\mathbf{R}^n$ равенством

$$U(x) = \sup\{f(y) - M\,|x - y| : y \in \Gamma\},$$

совпадает с f на Γ и удовлетворяет условию Липшица

$$|U(x) - U(y)| \leq M\,|x - y|, \quad x, y \in \mathbf{R}^n.$$

Пусть $\eta \in C_0^\infty(B_2)$, $\eta|_{B_1} = 1$. Ясно, что при достаточно большом $R > 0$ функция $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto \eta(x/R)U(x)$ принадлежит классу $\mathring{L}_2^1(\mathbf{R}^n)$ и имеет на Γ след f. Тем самым $C^{0,1}(\Gamma) \subset Tr(\Gamma)$.

При малом $\varepsilon > 0$ положим $\Gamma_\varepsilon = \partial(\Omega \setminus B_\varepsilon)$. Чтобы установить плотность множества $C^{0,1}(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$, достаточно аппроксимировать функцию из $L_2(\Gamma_\varepsilon)$ липшицевыми на Γ_ε функциями, равными нулю на ∂B_ε. Так как поверхность Γ_ε можно покрыть конечным числом окрестностей, в каждой из которых указанная поверхность является в локальных координатах графиком липшицевой функции, то требуемая аппроксимация может быть построена с помощью конечного разбиения единицы, подчиненного упомянутому покрытию, и аппроксимации функции из L_2 липшицевыми функциями в локальных координатах. Доказательство леммы закончено.

Мы теперь можем установить следующий результат.

Теорема. *Отображение*

$$L_2(\Gamma) \ni \varrho \mapsto V\varrho \in Tr(\Gamma)$$

может быть единственным образом продолжено до изоморфизма между пространствами $Tr(\Gamma)^*$ и $Tr(\Gamma)$, если отождествить элемент $\varrho \in L_2(\Gamma)$ с функционалом[1]

$$\langle \varrho, g \rangle = \int_\Gamma \varrho g d\Gamma, \quad g \in Tr(\Gamma). \tag{17}$$

[1]угловыми скобками обозначается результат действия функционала на элемент

Доказательство. Требуется проверить условия

1) $\|\varrho\|_{Tr(\Gamma)^*} = \|V\varrho\|_{Tr(\Gamma)}, \quad \varrho \in L_2(\Gamma)$;

2) $\overline{V(L_2(\Gamma))} = Tr(\Gamma)$;

3) функционалы вида (17) образуют плотное множество в $Tr(\Gamma)^*$.

Утверждение 2) установлено в предыдущей лемме. Проверим равенство 1). Пусть $g \in Tr(\Gamma)$ и $u \in H(\Gamma)$ – такая функция, что $u|_\Gamma = g$. Используя формулу (15), получим

$$|\langle \varrho, g\rangle| = \left| \int_{\mathbf{R}^n} \nabla(V\varrho)\nabla u dx \right| \leq$$
$$\leq \|\nabla(V\varrho\|_{L_2(\mathbf{R}^n)} \|\nabla u\|_{L_2(\mathbf{R}^n)} = \|V\varrho\|_{Tr(\Gamma)} \|g\|_{Tr(\Gamma)}.$$

Отсюда следует неравенство $\|\varrho\|_{Tr(\Gamma)^*} \leq \|V\varrho\|_{Tr(\Gamma)}$. Обратное неравенство вытекает из цепочки

$$\|V\varrho\|^2_{Tr(\Gamma)} = \|\nabla(V\varrho)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^n)} = |\langle \varrho, V\varrho\rangle| \leq \|\varrho\|_{Tr(\Gamma)^*} \|V\varrho\|_{Tr(\Gamma)},$$

верной на основании (15).

Перейдем к проверке условия 3). Пусть $F \in Tr(\Gamma)^*$ и T – оператор взятия следа (2). По теореме Рисса существует такая функция $f \in Tr(\Gamma)$, что

$$\langle F, g\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} \nabla(T^{-1}f)\nabla(T^{-1}g)dx$$

для всех $g \in Tr(\Gamma)$. Ввиду леммы 6 найдется последовательность $\varrho_k \in L_2(\Gamma)$, для которой

$$\|V\varrho_k - f\|_{Tr(\Gamma)} = \|\nabla(V\varrho_k - T^{-1}f)\|_{L_2(\mathbf{R}^n)} \to 0.$$

Полагая

$$\langle F_k, g\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} \nabla(V\varrho_k)\nabla(T^{-1}g)dx, \quad g \in Tr(\Gamma),$$

получим, что

$$\|F - F_k\|_{Tr(\Gamma)^*} \leq \|V\varrho_k - f\|_{Tr(\Gamma)} \to 0.$$

Заметим, что благодаря (15) функционал $F_k \in Tr(\Gamma)^*$ может быть записан в виде

$$\langle F_k, g\rangle = -\int_\Gamma \varrho_k g d\Gamma, \quad g \in Tr(\Gamma).$$

Итак, функционалы вида (17) образуют плотное множество в $Tr(\Gamma)^*$. Доказательство теоремы закончено.

Непосредственно из теоремы вытекает такое утверждение.

Следствие 3. *Решение двусторонней задачи Дирихле*

$$u \in H(\Gamma), \quad u|_\Gamma = f$$

при любом $f \in Tr(\Gamma)$ *может быть представлено потенциалом простого слоя* $u = V\varrho$, *где плотность* $\varrho \in Tr(\Gamma)^*$ *определяется из уравнения* $V\varrho = f$ *единственным образом.*

Объединяя теорему с результатами работы [6], (см. также [7, гл. 7]) можно сформулировать явное условие разрешимости уравнения $V\varrho = f$.

Следствие 4. *Необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости уравнения*

$$f(x) = \int_\Gamma \varrho(y)E(x,y)d\Gamma(y), \quad f \in Tr(\Gamma),$$

в классе $Tr(\Gamma)^*$ *при* $n > 3$ *является неравенство*

$$\int_\Gamma f(x)^2 \frac{d\Gamma(x)}{\varphi(x_n)} + \iint_{\Gamma\times\Gamma} |f(x)-f(\xi)|^2 \frac{d\Gamma(x)d\Gamma(\xi)}{|x-\xi|^n} < \infty,$$

а при $n = 3$ – *неравенство*

$$\int_\Gamma f(x)^2 \frac{d\Gamma(x)}{\big(\varphi(z)\log(z/\varphi(z))\big)} + \iint_{\Gamma\times\Gamma} |f(x)-f(\xi)|^2 \frac{d\Gamma(x)d\Gamma(\xi)}{r^3} +$$

$$+ \iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma: r>M(z,\zeta)\}} |f(x)-f(\xi)|^2 \frac{M(z,\zeta)^{-2}d\Gamma(x)d\Gamma(\xi)}{r\big(\log(1+r/M(z,\zeta))\big)^2} < \infty,$$

где $r = |x-\xi|$, $x = (y,z)$, $\xi = (\eta,\zeta)$, $M(z,\zeta) = \max\{\varphi(z),\varphi(\zeta)\}$. *При* $n = 3$ *требуется дополнительное ограничение на заострение пика:* $\varphi'(z) = O(\varphi(z)z^{-1})$.

Замечание 2. Описание пространства $Tr(\Gamma)^*$ можно найти в [7, 8.3] и в [11].

Список литературы

[1] Мазья В. Г., Граничные интегральные уравнения. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 27 // Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. М. 1988. С. 131–228.

[2] Maz'ya V. G., Shaposhnikova T. O., Higher regularity in the classical layer potential theory for Lipschitz domains// Ind. Univ. Math. J. 2005. V. 54, N1, P. 99–142.

[3] Мазья В. Г., Соловьев А. А. Об интегральном уравнении задачи Дирихле в плоской области с остриями на границе// Матем. сб. 1989. Т. 180, вып. 9. С. 1211 –1233.

[4] Мазья В. Г., Соловьев А. А. О граничном интегральном уравнении задачи Неймана для области с пиком// Труды ЛМО 1990. Т. 1. С. 109 – 134.

[5] Мазья В. Г., Соловьев А. А. Интегральные уравнения теории логарифмического потенциала на контурах с пиком в пространствах Гёльдера// Алгебра и Анализ 1998. Т. 10, вып. 5. С. 85 – 142.

[6] Мазья В. Г. Функции с конечным интегралом Дирихле в области с вершиной пика на границе// Зап. научн. семин. ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1983. Т. 126. С. 117–137.

[7] Мазья В. Г., Поборчий С. В., Теоремы вложения и продолжения для функций в нелипшицевых областях. Изд. СПбГУ, 2006, 399 с.

[8] Соболев С. Л. Об одной теореме функционального анализа, Мат. сб. Т. 4 (1938), 471–497.

[9] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950, 255 с.

[10] Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.–Л., 1980. 264 с.

[11] Maz'ya V. G., Poborchi S. V. On Solvability of the Neumann problem in energy space for a domain with peak// Georgian Math. J. 2007. V. 14, N. 3, 499–518.