ВЕСТНИК ВОЛГОГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1

МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА

Выпуск 7

2002

УДК 517.54+517.968 74

НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА*

В.Г. Ткачев

В работе ставится ряд вопросов, относящихся к анализу и геометрии Среди них: уравнение Хеле — Шоу, комплексные моменты, однолистные многочлены, лемнискаты, целые решения квазилинейных уравнений.

Введение

Эта краткая статья посвящена некоторым нерешенным задачам вещественного и комплексного анализа, которые можно было бы отнести к направлению «геометрический анализ», и которые отвечают исследованиям автора и его коллег в последнее время. Часть вопросов заимствована из работ различных авторов, часть возникла в настоящее время. Главное, что объединяет перечисленные далее проблемы, — это используемые нами методы

Один из таких методов основывается на анализе эволюции линий уровня некоторых функций (решения уравнений в частных производных, семейства однолистных отображений, линии уровня гармонических функций и т. д) и опирается на использование теоремы Кронрода — Федерера [11], [2], или формулы коплощади (co-area). Опыт использования автором данного подхода связан прежде всего с теорией потенциала для минимальных поверхностей и минимальных трубок, впервые предложенной В.М. Миклюковым (см., например, [9], [10]). Мощность упомянутого присма подтверждается многочисленными способами модифицирования и адаптации под конкретные задачи из разных областей анализа и геометрии.

Проблемы, формулируемые нами, разные как по степени их формализации, сложности, так и по характеру предполагаемых исследований; решение некоторых доступно студентам старших курсов. Другие проблемы, цитируемые нами из математической литературы, стоят нерешенными уже на протяжении нескольких десятков лет. Комментарии к каждому из списков вопросов достаточно лаконичны, для более подробного ознакомления с материалом мы отсылаем читателя к соответствующим источникам.

Автор благодарен всем участникам семинара «Нелинейный анализ» за сделанные дополнения и замечания.

* Работа выполнена при поддержке автора грантом Президента РФ для молодых ученых-докторов наук № 00-15-99274 и грантом РФФИ № 03-01-00304

UP-5. В связи с задачей [UP-2] представляет значительный интерес полное описание (косвенное или явное) пространства положительных тригонометрических многочленов.

2. Лемнискаты

Лемнискатой (пример см. на рис. 1) $\Sigma_\tau(P)$ называется множество уровня $|P(z)| = \tau > 0$, где $P(z)$ — монический многочлен $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$.

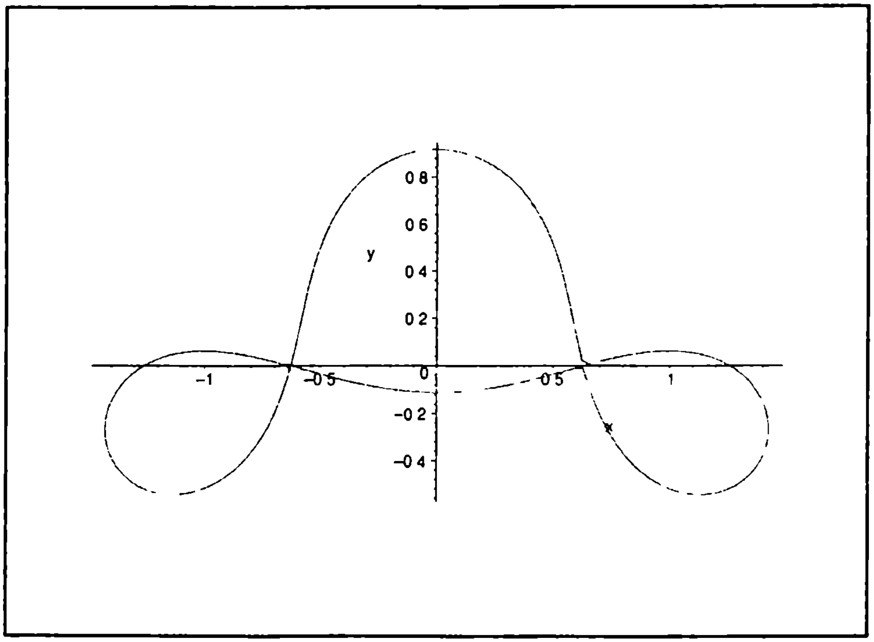

Рис. 1. Лемниската многочлена $P(z) = z^3 - 3az + ib$

Ниже мы касаемся только метрических вопросов строения лемнискат. Относительно алгебро-топологического направления мы отсылаем к [21] и имеющейся там литературе.

2.1. Гипотеза Эрдеша

Гипотеза в разное время формулировалась Эрдешом в списке его нерешенных задач (см. [26], [25]): доказать, что при фиксированном $n = \deg P$ максимальное значение *длины* лемниската $\Sigma_1(P)$ имеет для многочленов $Q_n(z) = z^n - 1$ Различные результаты о лемнискатах были получены Поммеренке [40]-[43], который впервые установил, что длины лемнискат данной степени ограничены в совокупности и имеют вид $O(n^2)$. Данная грань была улучшена Борвейном [16]: $\sup_{\deg P = n} |\Sigma_1(P)| = O(n)$.

В настоящее время известно, что:

- экстремальный многочлен (и, соответственно, лемниската) для любого n существует (Еременко, Хейман [27]); при этом все критические значения $P(\zeta_k)$, где $P'(\zeta_k) = 0$, должны лежать на этой лемнискате (далее мы называем такие полиномы *экстремальными*);

- верхняя оценка длины лемнискат $|\Sigma_1(P)| < 9,2 \deg P$ [27], гипотетическая оценка $|\Sigma_1(P)| \le |\Sigma_1(Q_n)| = 2n + o(1)$;
- индикатриса (пример — на рис. 2) длины лемнискаты

$$\Phi(t) = \ln |\Sigma_{e^t}(P)| - \frac{t}{n}$$

непрерывна на $\mathbb{R}$ и выпукла вне конечного множества критических значений многочлена [8];

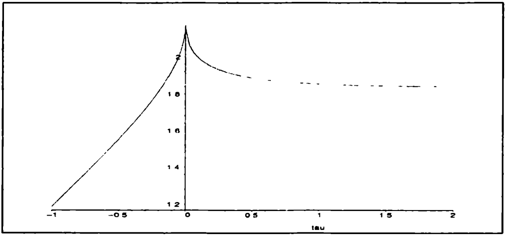

Рис. 2. Индикатриса для $Q_2(z) = z^2 - 1$

- в работе Батлера [20] (см. также [24], [39]) найдена точная формула для длины $|\Sigma_\tau(Q_n)|$ в терминах гипергеометрической функции:

$$|\Sigma_\tau(Q_n)| = \begin{cases} \tau \, {}_2F_1(a, a; 1; \tau^2), & \tau \in [0, 1]; \\ \tau^{1/n} \, {}_2F_1(a, a; 1; 1/\tau^2), & \tau \in [1, +\infty]. \end{cases}, \tag{4}$$

где $a = \frac{n-1}{n}$;

- имеются явные формулы для производных функции длины лемнискаты $H(t) = |\Sigma_{e^t}(P)|$ (Ткачев, 2002):

$$H^{(k)}(\tau) = \int_{\Sigma_\tau(P)} \operatorname{Re} w_k(z) \, |dz|,$$

где

$$w_k(z) = A^k[1], \qquad A[f] = 2f' \frac{P}{P'} + f \left(\frac{P}{P'} \right)'.$$

Здесь предполагается, что e^t не равно критическому значению.

Также недавно автором статьи установлена связь функции длины лемнискаты $H(t)$ с вещественной проблемой моментов Стилтьеса — Гамбургера. Именно, последовательность производных $H^{(k)}(t)$ является *позитивной* (см. [1]), а следовательно, приводит к представлению функции $H(t)$ в виде преобразования Лапласа некоторой меры на $\mathbb{R}$

Вопросы:

Lem-1. Получить решение задачи Эрдеша; при этом представляется особенно интересным количественный ответ — найти отклонение максимальной длины от длины многочлена $P(z)$ в терминах его критических значений (например, возможный кандидат — квадратичное отклонение $\omega(P) = \sum_{j>i} |P(\zeta_j) - P(\zeta_i)|^2$, где ζ_k — нули производной).

Lem-2. Доказать, что в критических значениях функция $|\Sigma_\tau(P)|$ имеет *каспы* (заострения). Выяснить структуру данных каспов: интересно узнать, имеют ли особенности алгебраический характер (связанного с кратностью критического значения)

Lem-3. Установить структурные свойства $|\Sigma_\tau(P)|$; например, для $q(\tau) = |\Sigma_\tau(Q_n)|$ имеет место свойство

$$q(1/\tau) = \frac{q(\tau)}{\tau^{(1+n)/n}}.$$

Возможно, наиболее «красивые» свойства $|\Sigma_\tau(P)|$ должны получаться для экстремальных полиномов (в этом случае есть лишь одно критическое значение)

Lem-4. Найти дифференциальное уравнение для $p(\tau) = H(\ln \tau)$: в случае Q_n оно известно (Ткачев, 2002):

$$n^2(1-\tau^2)\tau^2 p''(\tau) - n\tau(n + (n-2)\tau^2) p'(\tau) + p(\tau)(n^2 - \tau^2) = 0.$$

Как и выше, наиболее перспективный случай экстремальных многочленов (в этом случае, ввиду единственной особой точки, видимо, достаточно уравнения гипергеометрического типа).

Lem-5. Найти связь длин l_k, $k = 1, \dots, n$ компонент лемнискаты $\Sigma_1(P)$ для экстремального многочлена $P(z)$ вида $F(l_1, \dots, l_n) = 0$. Представляется вероятной алгебраичность F Возможно при этом получение качественной информации об F (например, выпуклость и т. д), а также структурных свойств F в зависимости от группы критических точек ζ_k.

Lem-6. Выяснить комбинаторно-топологическое строение экстремальных лемнискат (некоторые результаты получены Боевым, 2002) и стратификацию многообразия таких лемнискат.

Lem-7. Найти любое эффективное описание экстремальных многочленов (через дифференциально-функциональные соотношения, алгебраические инварианты и т. д.). В качестве примера приведем свойство дискриминанта: $|\operatorname{Dis}(P)| = n^n$

3. Алгебраические и целые решения квазилинейных уравнений

Поясним основные вопросы лишь на одном примере. Рассмотрим уравнение

$$L_{\varepsilon,\gamma}[u] \equiv u_{xx}(2\varepsilon + (\gamma+1)u_x^2 + (\gamma-1)u_y^2) + \\ +4u_{xy}u_xu_y + u_{yy}(2\varepsilon + (\gamma+1)u_y^2 + (\gamma-1)u_x^2) = 0, \tag{5}$$

где $u(x, y)$ — некоторая C^2-функция. Нас интересуют вопросы, связанные с существованием определенных в целой плоскости $\mathbf{R}^2$ (другими словами, *целых*) решений данного уравнения при различных значениях параметров ε, $\gamma \in \mathbf{R}$.

Исследование именно **целых** решений берет свое начало от целых голоморфных функций, где свойство *целостности* в определенном смысле означает максимально возможную продолжимость, что типично для постановки вопроса в плоскости $\mathbb{C}$. Есть несколько типичных для целых функций свойств, в зависимости от контекста:

- неограниченность (теорема Лиувилля);
- несуществование (теорема Бернштейна);
- параметры роста в особых точках (теоремы Фрагмена — Линделефа)

При переходе от комплексного анализа к решениям уравнений в частных производных появляется дополнительный атрибут понятия *«целый»*, связанный с необходимым запасом дифференцируемости. Пример уравнения Аронссона (7), рассмотренного впервые в работах [12]–[15], показывает, что целых решений в стандартном понимании (как минимум C^2-гладких) не существует. В то же время мы показали, что счетное семейство так называемых N-решений, найденных Аронссоном, состоит из *алгебраических* функций.

Свойство быть алгебраической функцией, с одной стороны, означает, что такая функция может допускать *естественные* сингулярности, с другой, она непродолжима, как наиболее элементарный объект алгебры и анализа после многочленов.

3.1. Вырожденный случай $\varepsilon = 0$

Говорят, что решение $u(x, y)$ *квазирадиально*, если оно допускает однородную форму

$$u(x, y) = \rho^k f(\theta), \tag{6}$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и θ — полярный угол в плоскости (x, y). Для определенности мы всюду далее также предполагаем, что $k > 1$.

Отправная точка: уравнение Аронссона

$$u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_y^2 = 0, \tag{7}$$

или его дивергентный вид

$$\operatorname{div} |\nabla u|^{p-2}\nabla u = 0, \qquad \text{где} \quad p = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}.$$

Аронссон (1984) показал, что последнее уравнение имеет счетное семейство квазирадиальных решений (далее, N-решения).

В частности, Аронссон показал, что существуют решения класса $C^{1+\frac{1}{3}}(\mathbb{R}^2)$. Однако предложенные им различные представления решений $u(x,y)$ носят неявный характер. Недавно автором получено явное параметрическое представление для квазирадиальных решений (5), при $\varepsilon = 0$. При этом мы показываем, что все квазирадиальные N-решения (7) суть *алгебраические* функции.

Нам представляется важным следующий вопрос: *при каких рациональных показателях γ существуют алгебраические квазирадиальные решения?* (5) Данный интерес также мотивирован тем обстоятельством, что имеет место совпадение «особых значений» параметра γ, для которых существуют алгебраические квазирадиальные решения, и классических значений *показателей адиабаты* идеального s-атомного газа $\gamma = \frac{2s+3}{2s+1}$, $s \in \mathbb{N}$.

В настоящее время известно, что при рациональном $\gamma = p/q \neq 1$ существуют алгебраические решения $L_{0,\gamma}[u] = 0$ тогда и только тогда, когда диофантово уравнение

$$N^2p^2 - q^2(2N-1) = y^2 \tag{8}$$

имеет целочисленное решение $(N, y) \in \mathbb{N}^2$. Описаны некоторые свойства таких значений γ.

Вопросы:

Ar-1. Найти явный вид алгебраических N-решений уравнения Аронссона, также интересно указать их структурные и симметрические свойства. Пример 2-решения (рис. 3):

$$u = x^{4/3} - y^{4/3}, \qquad \text{или} \qquad 27x^4y^4u^3 = (x^4 - y^4 - u^3)^3$$

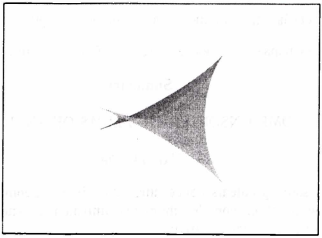

Рис. 3. График квазирадиального решения

Ar-2. Описать полное множество решений диофантова уравнения (8). Интересно также установить связь для найденных γ с алгебраическим видом соответствующих решений.

Ar-3. Найти аналоги порождаемости N-решений (то есть рекуррентные соотношения между ними) по аналогии с теорией интегрируемых и конечнозонных систем, уравнениями типа солитонов.

Ar-4. Особый интерес представляет многомерный случай. Несложно получить соответствующее уравнение для аналога квазирадиальных решений, представимых в виде $u = f(\theta)r^{\alpha}$, где θ — локальная координата на единичной гиперсфере. При этом особый акцент в исследовании многомерных аналогов квазирадиальных решений делается на исследование решений специального уравнения $|\nabla\phi| = 1$, где ∇ — ковариантная производная на гиперсфере (в двумерном случае существует глобально определенное на окружности S^1 решение ϕ, равное полярному углу).

3.2. Общий случай

В случае $\varepsilon = \pm 1$ ситуация усложняется. Целые решения (они уже не квазирадиальные) существуют и выражаются в терминах *гипергеометрической* функции. В этой связи возникают следующие вопросы:

Sim-1. Найти полное описание N-решений уравнения Саймона

$$L_{1,1}[u] = u_{xx}(u_x^2 + 1) + 2u_{xy}u_x u_y + u_{yy}(u_y^2 + 1) = 0.$$

Sim-2. Будут ли эти решения алгебраическими при всех N? Это так при $N = 1, 2$. В общем случае это приводит к изучению свойств монодромии конфлюентной гипергеометрической функции (функции Куммера) ${}_1F_1(a, c; x)$.

Sim-3. Найти полное описание N-решений уравнения $L_{\pm,\gamma}[u] = 0$ Это тесно связано с конусами решений для предельных случаев $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$.

Sim-4. Есть ли связь алгебраичности для данного γ, при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$?

Sim-5. При каких парах (ε, γ) имеет место свойство Бернштейна?

Summary

SOME UNSOLVED PROBLEMS OF ANALYSIS

V.G. Tkachev

We discuss some problems concerning analysis and geometry. Among them are the Hele — Shaw equation, complex moments, univalent polynomials, lemniscates and entire solutions to quasilinear equations.

Литература

1. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М.: Наука, 1961.

2. Бураго Ю.Д., Залгаллер В А. Геометрические неравенства. Л : Наука, 1980.

3. Виноградов Ю.П., Куфарев П.П. Об одной задаче фильтрации // Прикл. матем и мех. 1948. Т. 12 С 181-198.

4 Задачи Арнольда. М · ФАЗИС. 2000 454 с

5 Кузнецова О С. Геометрические и функциональные свойства решений задачи Хеле — Шоу. Дис. .. канд физ -мат наук. Волгоград, 2000. 103 с.

6. Кузнецова О.С., Прохоров Д.В. О геометрических свойствах решений уравнения Хеле — Шоу // Вестник ВолГУ. Сер. 1: Математика. Физика. 1999. Вып. 4. С. 21-27.

7. Кузнецова О.С., Ткачев В Г. Асимптотические свойства решений уравнения Хеле — Шоу // Доклады РАН. 1999. Т. 367. № 2. С. 164-165

8 Манкаева Г.А., Ткачев В.Г. О логарифмической выпуклости длины лемнискаты // Модели и дискретные структуры: Сб. науч тр Элиста; Джангар, 2002. С. 111-119.

9 Миклюков В.М. Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальной поверхности // Матем. сб 1979. Т 108 № 2. С. 268-289

10 Миклюков В.М. О некоторых свойствах трубчатых в целом минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n$ // Докл АН СССР 1979. Т. 247 № 3 С. 549-552

11. Федерер Г. Геометрическая теория меры М.· Наука, 1987.

12. Aronsson G Extension of functions satisfying Lipschitz conditions // Ark. For. Mat. 1966. V. 69 № 1. P. 551-561.

13. Aronsson G. On the partial differential equation $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$ // Ark For. Mat. 1967. V. 69 № 1. P. 395-425.

14. Aronsson G. On certain singular solutions of the partial differential equation $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$ // Manuscripta Math. 1984 V 47 № 1. P. 133-151.

15. Aronsson G. Construction of singular solutions to the p-harmonic equation and its limit equation for $p = \infty$ // Manuscripta Math. 1986. V. 56. № 1. P. 135-158.

16 Borwein P. The arc length of the lemniscate $\{|P(z)| = 1\}$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. P. 797-799.

17 Brannan A. Coefficient regions for univalent polynomials of small degree // Mathematika. 1967. V. 14. P. 165-169.

18 Brannan A. On univalent polynomials // Glasgow Math J. 1970. V. 11. P. 102-107.

19. Brannan A., Brickman L. Coefficient regions for starlike polynomials // Ann. Univ. Mariae-Curie Skladowska, Sect. A. 1977. V. 29. P. 15–21.

20. Butler J.P. The perimeter of a rose // Amer. Math. Monthly. 1991. V. 98. № 2. P. 139–143.

21. Catanese F., Paluszny M., Polynomial-lemniscates, trees and braids // Topology. 1991. V. 30. № 4. P. 623–640.

22. Cowling V.F., Royster W.C. Domains of variability for univalent polynomials // Proc. Amer Math. Soc. 19(1968). 767–772.

23. Cherednichenko V.G. Inverse Logarithmic Potential Problem. Utrecht. The Netherlands. 1996.

24. Elia M., Galizia Angeli M.T. The length of a lemniscate // Publ. Inst. Math. Beograd (N.S.) 1984. V. 36(50) C. 51–55.

25. Erdös P. Extremal Problems on Polynomials // Approximation Theory II. Academic Press (1976). P. 347–355.

26. Erdös P, Herzog F. Piranian G. Metric properties of polynomials // J. D'Analyse Math. № 6. 1958. P. 125–148

27. Eremenko A., Hayman W. On the length of lemniscates // Mich. Math. J. 1999. T. 46. P. 409–415.

28. Gillow K., Howison S.D. A bibliography of a free and moving boundary problems for Hele — Shaw and Stokes flows // http://www.maths.ox.ac.uk/~howison/Hele-Shaw.

29. Gluchoff A., Hartmann F. Univalent polynomials and non-negative trigonometric sums // Amer. Math. Month. 1998.

30. Gustafsson B. On a differential equation arising in a Hele — Shaw flow moving boundary problem // Ark. för Mat. 22(1984). № 2. S. 251–268.

31. Gustafsson B., Sakai M. Some geometric properties of solutions of a Hele-Shaw flow moving boundary problem // Proc. of Conf. Free Boundary: Problems and Applications. Montreal, 1990.

32. Gustafsson B., Putinar M. On exact quadrature formulas for harmonic functions on polyhedra // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128. P. 1427–1432.

33. Hedenmalm H., Shimorin S. Hele — Shaw flow on hyperbolic surfaces // J. Math. Pures Appl. 2002. V. 22. P. 187–222.

34. Hohlov Yu., Prokhorov D., Vasil'ev A. On geometrical properties of free boundaries in the Hele — Shaw flows moving boundary problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. 1998. V. 1. P. 3–13.

35. Kössler M. Simple polynomials // Czechoslovak Math. J. 1951. № 76. S. 5–15

36. Кузнецова О.С. О полиномиальных решениях задачи Хеле — Шоу // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 5. С. 1084–1093.

37 Kouznetsova O S , Tkachev V.G. Univalent polynomials and Ullemar conjecture // In Abstracts of IX Oporto Meeting on Geometry, Topology and Physics Oporto; Portugal, 2000.

38. Milanfar P., Verghese G.C., Clem Karl W., Wilsky A.S. Reconstructing polygons from moments with connections to array processing // IEEE Trans. Signal Proc. 43(1995). № 2. P. 432–443.

39. Piranian G. The length of a lemniscate // Amer Math. Month 1980 V. 87 P. 555–556.

40. Pommerenke Ch On some metric properties of polynomials with real zeros // Mich Math J. 6(1959). P. 377–384.

41. Pommerenke Ch. On some problems of Erdös, Herzog and Piranian // Mich. Math J. 6(1959). P. 221–225

42. Pommerenke Ch On some metric properties of polynomials II // Mich Math J 8(1961) P. 49–54

43. Pommerenke Ch On metric properties of complex polynomials // Mich. Math J 1961 V. 8 P. 97–115

44. Richardson S. Hele-Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel // J. Fluid Mech. 1972. V 56. № 4. P. 609–618.

45. Sakai M. Quadrature Domains. Lecture Notes in Math. N Y. Springer-Verlag, 1982.

46. Shapiro H S. The Schwarz function and its Generalization to Higher Dimensions. N Y.: Wiley, 1992.

47. Tkachev V G Positive trigonometric polynomials // Труды кафедры математического анализа и теории функций Волгоградского госуниверситета. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2002. С. 161–173.

48. Ullemar C. Uniqueness theorem for domains satisfying quadrature identity for analytic functions: Preprint of Royal Inst of Technology, TRITA-MAT 1980-37, Mathematics S-100-44. Stockholm, 1980.

49. Varchenko A.N., Etingof P.I. Why the Boundary of a Round Drop Becomes a Curve of Order Four. Univ. Lecture Series. V. 3. Providence R. I. 1992.