УДК 517.96

Некоторые свойства трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности

Миклюков В. М., Ткачев В. Г.

1. Пусть M – p - мерное, связное, ориентированное некомпактное многообразие класса C^2. Рассмотрим поверхность (M, u), заданную C^2 - погружением $u : M \to \mathbb{R}^n$, где $2 \le p \le n-1$. Всюду ниже предполагается, что погружение u собственно, то есть прообразом всякого компактного множества $F \subset \mathbb{R}^n$ является компактное множество в M.

Поверхность (M, u) называется м и н и м а л ь н о й, если ее вектор средней кривизны H обращается в нуль [1, с. 39].

Пусть M – многообразие без края. Будем говорить, что поверхность (M, u) т р у б ч а т а, если существует вектор $e_0 \in \mathbb{R}^n$ и два числа $-\infty \le a < b \le +\infty$, такие, что для каждой гиперплоскости $\Pi_t = \{x \in \mathbb{R}^n : < x, e_0 >= t\}$, ортогональной $e_0 \in \mathbb{R}^n$, сечение $\Sigma_{e_0}(t) = u(M) \cap \Pi_t$ не пусто при всяком $t \in (a; b)$ и всякая порция, заключенная между двумя любыми гиперплоскостями Π_{t_1} Π_{t_2} при $a < t_1 < t_2 < b$ является компактом. В этом случае интервал $(a; b)$ будем называть проекцией поверхности (M, u), а конечную или бесконечную разность $(b - a)$ – длиной.

Будем говорить, что (M, u) т р у б ч а т а я в ц е л о м, если она является трубчатой с проекцией $(-\infty, +\infty)$.

Простейший пример трубчатой в целом минимальной поверхности в $\mathbb{R}^3$ дает катеноид. Многочисленные примеры двумерных погруженных трубчатых минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n$ легко строятся исходя из представления для таких поверхностей, данного в [2].

Далее предполагаем $codim\ u(M) > 1$. Случай трубчатых минимальных поверхностей коразмерности 1является особым и рассматривается в [3]. Трубчатые минимальные поверхности с нетривиальными группами симметрий изучаются в серии работ [14] – [16].

Имеет место

Т е о р е м а 1. *Пусть* (M, u) – *двумерная трубчатая в целом минимальная поверхность в* $\mathbb{R}^n$. *Если существует гиперплоскость* Π, *непересекающая* $u(M)$, *то множество* $u(M)$ *лежит в некоторой гиперплоскости* Π_1, *параллельной* Π.

Данная теорема была аннонсирована в [4].

Свойство трубчатости в целом для двумерной минимальной поверхности является специфическим. А именно, как показывает следующее утверждение, любая трубчатая минимальная поверхность размерности выше, чем 2, имеет конечную длину.

Т е о р е м а 2. *Пусть* (M, u) – *трубчатая минимальная поверхность в* $\mathbb{R}^n$ *размерности* $p \geq 3$. *Тогда* $u\ (M)$ *расположено в слое, лежащем между двумя параллельными гиперплоскостями, ортогональными вектору* e_0.

В работе [3] для $codim\ M = 1$ указана точная оценка для длины трубчатой минимальной поверхности. Возможность подобной оценки в случае произвольной коразмерности неизвестна.

Пусть G_n^2 – грассманово многообразие ориентированных двумерных плоскостей, проходящих через начало координат, с каноническим расстоянием $\theta(\gamma_1, \gamma_2)$, т. е. углом между плоскостями $\gamma_1, \gamma_2 \in G_n^2$. В случае одинаково (противоположно) ориентированных плоскостей γ_1 и γ_2, величина $\theta(\gamma_1, \gamma_2)$ определяется как максимум из углов, образуемых парами прямых из γ_1 и γ_2 (соответственно как дополнений указанного максимума до числа π).

Пусть $m \in M$ – произвольная точка, тогда касательная плоскость $T_m(M)$ в точке $u\ (M)$ к поверхности (M, u) параллельна некоторой двумерной плоскости $m^* \in G_n^2$ с той же ориентацией, что и $T_m(M)$. Соответствие $m \to m^*$ называется гауссовым отображением поверхности (M, u). Обозначим M^* образ M при этом отображении и положим:

$$\delta(M^*) = \inf_{\gamma_1 \in G_n^2} \sup_{\gamma_2 \in M^\perp} \theta(\gamma_1, \gamma_2)$$

Ясно, что $\delta(M^*) \leq \pi$, по определению угла $\theta(\gamma_1, \gamma_2)$.

Удобно ввести следущие определения, оттеняющие геометрическую природу ниже формулируемого утверждения. Для произвольной плоскости $\gamma \in G_N^2$ рассмотрим э к в а т о р K_γ с полюсом γ, то есть множество $K_\gamma = \{\xi \in G^2_n : \theta(\xi, \gamma) = \pi/2\}$, являющееся гиперплоскостью в G^2_n и аналогичное экватору евклидовой сферы. Множество $G^2_n \backslash K_\gamma$ распадается на две компоненты связности, называемые половинами грассманиана G^2_n. Ясно, что плоскости $\xi \in G^2_n$ и ξ^- – с обратной к ξ ориентацией, всегда лежат в разных половинах грассманиана G^2_n.

Т е о р е м а 3. *Пусть (M, u) – двумерная трубчатая в целом минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\overline{M^*}$ пересекается с любым экватором грассманиана G^2_n, или другими словами*

$$\delta(M^*) \geq \pi/2.$$

Заметим, что рассуждения, используемые нами при доказательстве этих теорем, могут быть применены к изучению строения гауссова образа трубчатых в целом минимальных поверхностей вблизи бесконечности в терминах концов. В этом направлении качественно иные подходы, опирающиеся на ассммптотику роста скалярной кривизны и топологический тип многообразия M имеются, например, в [18], [19].

Все отмеченные результаты имеют теоретико - функциональную природу. Из дальнейшего будет ясно, что они представляют собой не что иное как геометрические интерпретации классического принципа максимума и теоремы Лиувилля для гармонических (супергармонических) функций. В основе рассуждений лежит понятие емкости конденсатора [5], [6].

2. Условимся в обозначениях. Пусть (M, u) – поверхность, заданная погружением $u : M \to \mathbb{R}^n$. Стандартная метрика на $\mathbb{R}^n$ индуцирует на M при отображении u риманову метрику. В дальнейшем M рассматривается как риманово многообразие, наделенное этой метрикой.

Обозначим через $T(M)$ и $N(M)$ касательное и нормальное расслоения над M, через $T_m = T_m(M)$ и $N_m = N_m(M)$ – касательное и нормальное пространства в точке $m \in M$. Для пары векторов $X, Y \in T_m$ условимся символом $< X, Y >$ обозначать их скалярное произведение. Через $\overline{\nabla}$ и ∇ будем обозначать связности в R^n и $T(M)$ (или $N(M)$) соответственно. При этом для любых сечений X, Y расслоения $T(M)$ и сечения ξ расслоения $N(M)$ справедливы тождества:

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T, \quad \nabla_X \xi = (\overline{\nabla}_X)^N \tag{1}$$

где символом $(v)^T$ (или $(v)^N$) условимся обозначать ортогональную проекцию вектора $v \in \mathbb{R}^n$ на касательное (нормальное) пространство в соответствующей точке.

Вторая квадратичная форма B определяется как билинейное симметрическое отображение из $T_m \otimes T_m$ в N_m, двойственное к гомоморфизму Вейнгартена A^ξ касательного пространства на себя. При этом

$$A^\xi(X) = -(\overline{\nabla}_X \xi)^T, \quad < B(X;Y);\xi >=< A^\xi(X), Y >$$

для любых $\xi \in N_m(M)$, X, $Y \in T_m(M)$, (см., например, [7]).

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение:

Л е м м а 1. *Пусть $E_1, ..., E_p$ – ортонормированный базис в $T_m(M)$ и пусть ξ и Y – произвольные сечения $N(M)$ и $T(M)$ соответственно, тогда*

$$\mathrm{div}(A^\xi Y) = \sum_{i=1}^{p}(< B(E_i, Y); \nabla_{E_i} Y > + < A^\xi E_i; \nabla_{E_i} Y >) + < \nabla_Y H; \xi > \tag{2}$$

где через H мы обозначаем вектор средней кривизны поверхности (M, u).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим сначала следующее тождество

$$\nabla_E A^\xi(Y) = \nabla_Y A^\xi(E) + A^{\nabla_E \xi}(Y) - A^{\nabla_Y \xi}(E) + A^\xi([E, Y]), \tag{3}$$

где $[E, Y] = \nabla_E Y - \nabla_Y E$ – коммутатор векторных полей E и Y.

Справедливость (3) следует из цепочки равенств :

$$\nabla_E(A^\xi Y) = (\overline{\nabla}_E A^\xi(Y))^T = -(\overline{\nabla}_E(\overline{\nabla}_Y \xi)^T)^T = -(\overline{\nabla}_E \overline{\nabla}_Y \xi)^T + (\overline{\nabla}_E \nabla_Y \xi)^T =$$

$$= -(\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_E \xi + \overline{\nabla}_{[E,Y]} \xi)^T - A^{\nabla_Y \xi}(E) =$$

$$= -(\overline{\nabla}_Y(-A^\xi E) + \overline{\nabla}_Y \nabla_E \xi)^T + A^\xi([E, Y]) - A^{\nabla_Y \xi}(E).$$

Воспользуемся (3). Имеем:

$$\mathrm{div} A^\xi(Y) = \sum_{i=1}^{p} < E_i, \nabla_{E_i} A^\xi(Y) >= \sum_{i=1}^{p} < E_i, \nabla_Y(A^\xi E_i) > + \sum_{i=1}^{p} < E_i, A^{\nabla_{E_i} \xi} Y >$$

$$- \sum_{i=1}^{p} < E_i, A^{\nabla_Y \xi}(E_i) > + \sum_{i=1}^{p} < E_i, A^\xi[E_i, Y]) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 - \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4 . \tag{4}$$

Найдем $\sum_2$ и $\sum_3$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{i=1}^{p} < B(E_i, Y), \nabla_{E_i}\xi >,$$

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{i=1}^{p} < B(E_i, E_i), \nabla_Y \xi >=< \text{trace } B, \nabla_Y \xi >=< H, \nabla_Y \xi > .$$

Пусть A – сечение расслоения, слой которого в каждой точке $m \in M$ совпадает с пространством симметрических гомоморфизмов $T_m(M) \to T_m(M)$. Тогда для любого ортонормированного базиса $\{E_i\}_{i=\overline{1,p}}$ пространства $T_m(M)$ и всякого вектора $Y \in T_m(M)$ выполнено

$$\sum_{i=1}^{p} < A(E_i), \nabla_Y E_i >= 0 \qquad (5)$$

Действительно, достаточно заметить, что сумма в (5) не зависит от выбора базиса $\{E_i\}_{i=\overline{1,p}}$, поскольку в специальном базисе, состоящем из собственных полей сечения A (его локальное существование есть следствие симметричности A) эта сумма принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{p} < AE_i, \nabla_Y E_i >= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i < E_i, \nabla_Y E_i >= 0$$

Рассмотрим теперь произвольный базис $F_1, ..., F_p$. Пусть

$$F_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} E_i, \ \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij}\alpha_{ki} = \delta_{jk},$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Тогда

$$\sum_{j=1}^{p} < AF_j, \nabla_Y F_j >= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i,k=1}^{p} < AE_i, E_k \nabla_Y \alpha_{jk} + \alpha_{jk} \nabla_Y E_k > \alpha_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} < AE_i, \nabla_Y E_j > + \sum_{i,k=1}^{p} \left(< AE_i, E_k > \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ji} \nabla_Y \alpha_{jk} \right).$$

В виду симметричности $< AE_i, E_k >$ и кососимметричности $\sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \nabla_Y \alpha_{jk}$ по индексам i и k, последнее слагаемое обращается в нуль.

Пользуясь (5), легко вычисляем $\sum_1$ и $\sum_4$

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{i=1}^{p} < E_i, \nabla_Y (A^\xi E_i) >= -\sum_{i=1}^{p} < A^\xi E_i, \nabla_Y E_i > + \sum_{i=1}^{p} \nabla_Y < A^\xi E_i, E_i >=$$

$$= \nabla_Y (\text{trace } A^\xi) = \nabla_Y < H, \xi >$$

$$\sum\nolimits_4 = \sum_{i=1}^{p} < E_i, A^{\xi}[E_i, Y] >= \sum_{i=1}^{p} < A^{\xi}E_i, \nabla_{E_i}Y - \nabla_Y E_i >= \sum_{i=1}^{p} < A^{\xi}E_i, \nabla_{E_i}Y > .$$

Подставляя найденные выражения для сумм $\sum_i$ в равенство (4), приходим к требуемому соотношению (2).

3. Пусть M – риманово многообразие с краем ∂M (возможно с пустым). Пусть $P, Q \subset M$ – непересекающиеся замкнутые множества. Определим
е м к о с т ь к о н д е н с а т о р а (P, Q), полагая

$$\text{cap } (P, Q) = \inf \int\limits_M |\nabla\varphi|^2 \tag{6}$$

где $|\nabla\varphi|^2 =< \nabla\varphi, \nabla\varphi >$ – скалярный квадрат градиента $\nabla\varphi$ и точная нижняя грань берется по всем локально липшицевым функциям $\varphi : \ M \to \mathbb{R}^1, \varphi(m) = 1 \ \ m \in P, \varphi(m) = 0 \ \ m \in Q$.

Будем говорить, что многообразие имеет п а р а б о л и ч е с к и й
т и п, если для любого компакта $F \subset M$ существует исчерпание $D_1 \subset D_2 \subset ..., \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = M$ многообразия M последовательностью открытых множеств $D_k \supset F$ с компактными замыканиями, для которого

$$\lim_{k\to\infty} \text{cap}(F; M \backslash D_k) = 0$$

Следующее утверждение является ключевым в построениях и представляет самостоятельный интерес (смотри также [8], [9]).

Т е о р е м а 4. *Всякая трубчатая в целом минимальная поверхность* (M, u) *в* $\mathbb{R}^n$ *имеет параболический тип.*

Часть доказательства целесообразно провести в несколько более общем виде.

Рассмотрим многообразие M с краем $\partial M \neq \emptyset$ и назовем поверхность (M, u) л е н т о й с п р о е к ц и е й (a, b), если существует вектор $e_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что:

(i) всякое сечение $u(M) \cap \Pi_t = \Sigma_{e_0}(t)$ не пусто при $t \in (a, b)$ и содержит точки $u(\partial M)$;

(ii) всякая порция $u\ (M)$, заключенная между двумя гиперплоскостями Π_{t_1} и Π_{t_2}, где $a < t_1 < t_2 < b$, является компактной в M;

(iii) всюду на крае ∂M выполнено $< \nu, e_0 >= 0$, где ν – внутренняя нормаль на M к границе ∂M, или, что тоже самое, $\nabla_\nu f = 0$ всюду на ∂M, для $f =< u, e_0 >$.

Простейший пример двумерной минимальной ленты с проекцией $(-\infty, +\infty)$ (как и в случае трубчатых поверхностей такие ленты мы будем называть лентами в целом) доставляет часть геликоида, высекаемая соосным с ним цилиндром конечного радиуса. Множество

$$\left\{ x = (x_0, x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p : \sum_{i=1}^{p-1} x_i^2 \leq 1, x_p = 0 \right\}$$

является плоской минимальной лентой в целом коразмерности 1 для $p \geq 2$. Тем самым, в отличие от трубчатых минимальных поверхностей минимальные ленты в целом существуют при всех размерностях.

Идею рассмотрения минимальных лент мы заимствовали из теории релятивистской струны (см., например, [10], [11]), в которой минимальные ленты и трубчатые поверхности (но в пространстве - времени Минковского $\mathbb{R}^n_1$) являются важнейшим об'ектом исследования.

Определим для любого $t \in (a, b)$ множества

$$P(t) = \{m \in M : f(m) \leq t\}, \; Q(t) = \{m \in M : f(m) \geq t\},$$

где по - прежнему $f(m) =< u(m), e_0 >$ (f – коодинатная функция).

Далее полагаем

$$M(t_1, t_2) = M \setminus (P(t_1) \cup Q(t_2))$$

Справедлива

Л е м м а 2. *Пусть* (M, u) – *трубчатая минимальная поверхность (или лента) в* $\mathbb{R}^n$ *с проекцией* (a, b). *Тогда для любых* $t_1 < t_2$ *из* (a, b) *выполнено:*

$$\operatorname{cap}\,(P(t_1), Q(t_2)) = \frac{I}{|t_1 - t_2|}$$

где I – *постоянная, не зависящая от* t_1, t_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности можем считать, что t_1 и t_2 суть регулярные значения функции $f(m)$. Определим функцию $\varphi(m) = \varphi$ равенством:

$$\varphi(m) = \frac{t_2 - f(m)}{t_2 - t_1}$$

при $m \in M(t_1, t_2)$, доопределяя ее до 1 при $m \in P(t_1)$ и 0 при $m \in Q(t_2)$. Эта функция допустима в вариационной задаче (6) для конденсатора $(P(t_1), Q(t_2))$ и поэтому

$$\text{cap}\ (P(t_1), Q(t_2)) \leq \int\limits_M |\nabla\varphi|^2 = \frac{1}{|t_1 - t_2|^2} \int\limits_{M(t_1,t_2)} |\nabla f|^2 \qquad (7)$$

Заметим далее, что $f(m)$ есть линейная комбинация гармонических функций на M в силу минимальности (M, u) (см. [1],стр. 309) и, тем самым, $\triangle f = 0$ всюду на M.

В силу собственности погружения u, сечения $\Sigma_{e_0}(t)$ компактные и являются при регулярных t подмногообразиями M. Пользуясь формулой Стокса, получим

$$\int\limits_{M(t_1,t_2)} |\nabla f|^2 = \int\limits_{\partial M(t_1,t_2)} f < \nabla f, \nu > - \int\limits_{M(t_1,t_2)} f \triangle f =$$

$$= t_2 \int\limits_{\Sigma_{e_0}(t_2)} < \nabla f, \nu > - t_1 \int\limits_{\Sigma_{e_0}(t_1)} < \nabla f, \nu > + \int\limits_{\partial M \cap M(t_1,t_2)} f < \nabla f, \nu > \qquad (8)$$

Последний из интегралов в (8) равен 0 по определению (M, u). Пользуясь еще раз гармоничностью f, имеем:

$$\int\limits_{M(t_1,t_2)} \triangle f = \int\limits_{\Sigma_{e_0}(t_2)} < \nabla f, \nu > - \int\limits_{\Sigma_{e_0}(t_1)} < \nabla f, \nu >= 0$$

Обозначая любой из последних интегралов за I и учитывая (7), (8), найдем:

$$\text{cap}\ (P(t_1), Q(t_2)) \leq \frac{1}{t_2 - t_1} \int\limits_{\Sigma_{e_0}(t)} |\nabla f| = \frac{I}{t_2 - t_1}$$

Чтобы убедиться в наличии точного равенства, достаточно заметить, что на самом деле, функция $\varphi(m)$ является экстремальной при вычислении емкости конденсатора $(P(t_1), Q(t_2))$, поскольку она гармоническая и удовлетворяет "естественному"краевому условию $\nabla_\nu f = 0$ на ∂M (см. [12], с. 45).

Обращаясь к д о к а з а т е л ь с т в у т е о р е м ы 4, зададим произвольное компактное множество $F \subset M$. Выберем $t_0 > 0$ так, чтобы множество $M(-t_0, t_0)$ содержало F. Зафиксируем $t > t_0$, и обозначим через φ_1 и φ_2 – функции, допустимые в вариационной задаче (6) для конденсаторов $(P(-t), Q(-t_0))$ и $(P(t_0), Q(t))$ соответственно.

Рассмотрим функцию $(1-\varphi_1)\varphi_2$. Эта функция равна 1 на $M(-t_0,t_0)$ и обращается в 0 на $M\setminus M(-t,t)$. Следовательно, она допустима при вычислении емкости конденсатора $(F,M\setminus M(-t,t))$ и поэтому

$$\text{cap }(F;M\setminus M(-t,t)) \le \int\limits_{M(-t,t_0)} |\nabla\varphi_1|^2 + \int\limits_{M(t_0,t)} |\nabla\varphi_2|^2$$

Так как φ_1,φ_2 – произвольные допустимые функции, то из данного неравенства следует:

$$\text{cap }(F;M\setminus M(-t,t)) \le \text{cap }(P(t),Q(-t_0)) + \text{cap }(P(t_0),Q(t)),$$

и на основе леммы 2,

$$\text{cap }(F,M\setminus M(t,t)) \le \frac{2I}{t-t_0}$$

Полагая в последнем неравенстве $t\to\infty$, убеждаемся в справедливости теоремы.

Приведенное доказательство проходит без изменений и для лент, и поэтому имеет место

Т е о р е м а 4′. *Всякая минимальная лента в целом имеет параболический тип.*

4. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.

I. Предположим, что существует гиперплоскость Π в $\mathbb{R}^n$, для которой $u(M)\cap\Pi=\emptyset$. Поскольку свойство минимальности поверхности (M,u) инвариантно ортогональной группы преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, можем считать, что множество $u(M)$ расположено в полупространстве $x_1\le 0$. Покажем, что $f_1(m)=<u,e_1>=\text{const}$ в этом случае, где e_1 соответствует координате x_1 в $\mathbb{R}^n$.

Фиксируем точку $m_0\in M$ и выберем постоянную $c<f_1(m_0)$. Обозначим через O компоненту связности открытого множества $\{m\in M : f_1(m)>c\}$, содержащую точку m_0. Ясно, что O не пусто, а функция $(f_1(m)-c)$ ограничена на O и обращается в нуль на его границе.

II. Пусть $F\subset O$ – произвольное компактное множество и $D_1\subset D_2\subset\ldots,\bigcup_{k=1}^{\infty}D_k=M$ – исчерпание M последовательностью открытых множеств с компактными замыканиями, $D_k\supset F$.

Зададим локально липшицевскую функцию $\varphi(m)$ допустимую при вычислениии емкости конденсатора $(F,M\setminus D_k)$. Функция

$$g(m)=(f_1(m)-c)\varphi^2(m)$$

обращается в нуль всюду на границе множества $O \cap D_k$. Пользуясь формулой Стокса, получим

$$\int\limits_O < \nabla g, \nabla f_1 >= -\int\limits_O g \triangle f_1$$

И так как $\triangle f_1(m) = 0$, то из последнего соотношения следует

$$\int\limits_O \varphi^2 |\nabla f_1|^2 = -2 \int\limits_O \varphi(f_1 - c) < \nabla\varphi, \nabla f_1 > \tag{9}$$

Заметим, что

$$| < \nabla\varphi, \nabla f_1 > | \le |\nabla\varphi| \cdot |\nabla f_1|$$

и применим к правой части (9) интегральное неравенство Коши. Тем самым приходим к неравенству

$$\int\limits_O \varphi^2 |\nabla f_1|^2 \le 2 \left(\int\limits_O (f_1 - c)^2 |\nabla\varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_O \varphi^2 |\nabla f_1|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

и поэтому

$$\int\limits_O \varphi^2 |\nabla f_1|^2 \le 4c^2 \int\limits_O |\nabla\varphi|^2.$$

Учитывая, что $\varphi(m) \equiv 1$ при $m \in F$, и переходя к точной нижней грани по всем $\varphi(m)$, будем иметь:

$$\int\limits_F |\nabla f_1|^2 \le 4c^2 \mathrm{cap}\ (F, M \setminus D_k)$$

Воспользуемся теоремой 4. Устремляя $k \to \infty$, имеем $|\nabla f_1| = 0$ всюду на F. В силу произвола в выборе $F \subset O$ заключаем, что $f_1(m) = f_1(m_0)$ при всех $m \in O$. Учитывая произвол в выборе константы c видим, что $f_1(m) \equiv f_1(m_0)$ на M, т.е. множество $u\ (M)$ расположено в некоторой гиперплоскости.

Т е о р е м а 1$'$. *Пусть* (M, u) *– минимальная лента в целом, расположенная в полупространстве* $x_1 \le 0$. *Тогда, если всюду на границе* ∂M *выполнено* $< \nu, e_1 > \le 0$ *(где* $e_1 \in \mathbb{R}^n$ *– вектор,* *соответствующий координате x_1), то множество $u(M)$ расположено в некоторой гиперплоскости $x_1 = \mathrm{const}$*

Доказательство лишь в деталях отличается от выше указанного, а именно, равенство (9) заменяется на неравенство

$$\int\limits_O \varphi^2|\nabla f_1|^2 \leq -2\int\limits_O \varphi(f_1 - c) < \nabla\varphi, \nabla f_1 > \tag{9'}$$

Чтобы убедиться в справедливости (9′), заметим, что границу множества $O \cap D_k$ можно представить в виде об'единения двух множеств $\partial(O \cap D_k) \cap (int\ M)$ и $\partial(O \cap D_k) \cap \partial M$. Всюду на первом из них функция $\varphi^2(f_1 - c) = 0$, а всюду на втором выполнено $\varphi^2(f_1 - c) \geq 0$ и $\nabla_\nu f_1 \leq 0$. Отсюда получаем

$$\int\limits_O |\nabla f_1|^2 + 2\int\limits_O \varphi(f_1 - c) < \nabla\varphi, \nabla f_1 >= \int\limits_{\partial(O\cap D_k)} \varphi^2(f_1 - c)\nabla_\nu f_1 \leq 0$$

и тем самым верно (9′).

Требование, чтобы трубчатая минимальная поверхность лежала в полупространстве, накладываемое в теореме 1, может быть несколько ослаблено. Это вытекает из следующего утверждения:

Теорема 5′. *Пусть (M, u) – двумерная трубчатая минимальная поверхность с проекцией (a, ∞) в $\mathbb{R}^n$ и пусть $\mu(t)$ есть максимальное значение координаты x_1 на сечении $\Sigma_{e_0}(t)$. Предположим, что $\mu(t_0) \leq \mu_0 < \infty$ при некотором $t_0 \in (a, +\infty)$, тогда либо $\mu(t) \leq \mu_0$ при $t > t_0$, либо*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{\mu(t)}{\sqrt{t}} > 0 \tag{10}$$

Для доказательства предположим, что $\mu(t) > \mu_0$ при некотором $t > t_0$. Выберем точку $m_1 \in M$ так, чтобы $f_1(m) > \mu_0$ и $f(m_1) =< u(m_1), e_0 > > t_0$. Обозначим через O компоненту связности множества $\{m \in M :\ f_1(m) > \mu_0\}$, содержащую точку m_1. Выберем произвольно компакт $F \subset O$.

Пусть $t' = \max_{m\in F} f(m)$ и $T > t'$. Рассмотрим множества $P(t')$ и $Q(t)$. Зададим локально липшицеву функцию $\varphi(m)$ равную 1 на P и 0 на Q. Функция $g(m) = \varphi^2(m)(f_1(m) - \mu_0)$ имеет компактный носитель, содержащийся в O. По формуле Стокса имеем:

$$\int\limits_O < \nabla g, \nabla f_1 >= -\int\limits_O g\triangle f_1$$

и воспользовавшись равенством $\triangle f_1 \equiv 0$ и рассуждениями как при доказательстве теоремы 1, приходим к неравенству:

$$\int\limits_O \varphi^2(m)|\nabla f_1(m)|^2 \leq 4\int\limits_O (f_1(m)-\mu_0)^2|\nabla\varphi|^2.$$

Отсюда получим

$$\int\limits_F |\nabla f_1|^2 \leq 4 \int\limits_{O\setminus(P\cup Q)} (f_1-\mu_0)^2|\nabla\varphi|^2 \tag{11}$$

По принципу максимума

$$f_1^2(m) \leq \mu^2(T) \quad \forall m \in O\setminus(P\bigcup Q)$$

и из (11) вытекает

$$\int\limits_F |\nabla f_1|^2 \leq 4(\mu(T)-\mu_0)^2 \text{cap } (P,Q)$$

Воспользуемся леммой 2. Имеем:

$$\int\limits_F |\nabla f_1|^2 \leq (\mu(t)-\mu_0)^2\frac{4I}{T-t'}$$

где I – постоянная и не зависит от T.

Предположим, что соотношение (10) не имеет места. Тогда из данного неравенства следует, что всюду на F выполнено $|\nabla f_1| = 0$. В силу произвола выбора $F \subset O$, заключаем, что $f_1 = \text{const}$ на O. Но это противоречит выбору точки $m' \in O$, в которой $f_1(m') > 0$.

Теорема 1 и теорема 5 представляют собой геометрические версии теоремы Лиувилля и теоремы Фрагмена - Линделёфа для гармонических функций на трубчатых минимальных поверхностях. Следующая теорема является аналогом известной теоремы об устранимых изолированных особенностях и говорит о том, что минимальная трубка с проекцией $(a,+\infty)$, заключенная между двумя гиперплоскостями, должна "уплощаться"в бесконечности.

Т е о р е м а 6. *Если двумерная, двусвязная минимальная трубка с проекцией* $(a,+\infty)$ *расположена в слое* $|x_1| \leq 1$, *то* *колебание x_1 на множестве $\Sigma_{e_0}(t)$ стремиться к нулю при $t \to +\infty$.*

Доказательство этой теоремы проведем параллельно с доказательством аналогичного утверждения для минимальных лент, у которых $\Sigma_{e_0}(t)$ является связным множеством.

Т е о р е м а 6′. *Если двумерная минимальная лента с проекцией $(a, +\infty)$ расположена в слое $|x_1| \le 1$ и всюду на части ∂M, не лежащей в $\Sigma_{e_0}(a)$, выполнено $< e_1, \nu >= 0$, то колебание координаты x_1 на множестве $\Sigma_{e_0}(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в а обоих утверждений вытекают из более общего утверждения, излагаемого ниже и из результатов [13], касающихся обобщенного принципа длины и площади.

Л е м м а 3. *Если (M, u) – двумерная трубчатая минимальная поверхность с проекцией $(a, +\infty)$ (или лента, не обязательно двумерная), то, при выполнении прочих условий теоремы 6 (теоремы 6′ соответственно), утверждается, что интеграл Дирихле функции $f_1(m)$ ограничен, или*

$$\int\limits_{M(a,+\infty)} |\nabla f_1|^2 < \infty$$

Действительно, не ограничивая общности можно считать, что $a < b$ – суть регулярные значения функции $f =< u, e_0 >$. Имеем

$$\int\limits_{M(a,b)} |\nabla f_1|^2 = \int\limits_{\partial M(a,b)} f_1 < e_1, \nu >=$$

$$= \int\limits_{\Sigma_{e_0}(b)} f_1 < e_1, \nu > - \int\limits_{\Sigma_{e_0}(a)} f_1 < e_1, \nu > + \int\limits_{\partial M \cap M(a,b)} f_1 < e_1, \nu >$$

Последний интеграл равен нулю в силу предположений, сделанных в условиях теорем 6 и 6′, поэтому

$$\int\limits_{M(a,b)} |\nabla f_1|^2 = \int\limits_{\Sigma_{e_0}(b)} f_1 < e_1, \nu > - \int\limits_{\Sigma_{e_0}(a)} f_1 < e_1, \nu > \qquad (12)$$

Из формулы Кронрода - Федерера ([17], стр. 103), воспользовавшись неравенством Коши, будем иметь

$$\int\limits_{M(a,b)} |\nabla f_1|^2 = \int\limits_a^b dt \int\limits_{\Sigma_{e_0}(t)} \frac{|\nabla f_1|^2}{|\nabla f|} \geq \int\limits_a^b dt \left(\int\limits_{\Sigma_{e_0}(t)} |\nabla f_1| \right)^2 \left(\int\limits_{\Sigma_{e_0}(t)} |\nabla f| \right)^{-1}$$

Но ранее было доказано, что для любых α, β таких, что $a \leq \alpha < \beta$ выполнено

$$\int\limits_{M(\alpha,\beta)} |\nabla f|^2 = I(\beta - \alpha),$$

Откуда мы заключаем

$$\int\limits_{M(a,b)} |\nabla f_1|^2 = \frac{1}{I} \int\limits_a^b \varphi^2(t) dt, \tag{13}$$

где

$$\varphi(t) = \int\limits_{\Sigma_{e_0}(t)} |\nabla f_1|$$

Докажем, что интеграл, стоящий справа в неравенстве (13), ограничен независимо от b. Для этого воспользуемся тем, что $|f_1(m)| \leq 1$ на M и, следовательно, из (12)

$$\int\limits_{M(a,b)} |\nabla f_1|^2 \leq - \int\limits_{\Sigma_{e_0}(a)} f_1 < e_1^T, \nu > + \int\limits_{\Sigma_{e_0}(b)} |e_1^T| = - \int\limits_{\Sigma_{e_0}(a)} f_1 < e_1^T, \nu > + \varphi(b)$$

Используя (13), получим

$$\int\limits_a^b \varphi^2(t) dt < I\varphi(t) - I \int\limits_{\Sigma_{e_0}(a)} f_1 < e_1^T, \nu >$$

Если в последнем неравенстве предположить, что для некоторого $t_0 > a$ выполнено

$$\Phi(t_0) > -I \int\limits_{\Sigma_{e_0}(a)} < e_1, \nu > f_1 = c, \quad \Phi(t) = \int\limits_a^t \varphi^2(\eta) d\eta,$$

то очевидным образом получим для $t > t_0$

$$I\varphi(t) > \Phi(t) - c > 0,$$

откуда, используя, что $\varphi^2(t) = \Phi'(t)$, приходим к неравенству

$$\frac{\Phi'(t)}{(\Phi(t)-c)^2} > I, \quad t > t_0$$

И интегрируя его в пределах от t_0 до $t > t_0$, получим

$$(t-t_0)I < \frac{1}{\Phi(t_0)-c} - \frac{1}{\Phi(t)-c} < \frac{1}{\Phi(t_0)-c}$$

что противоречит неограниченности t (ибо $I \neq 0$ в силу (13)). Следовательно

$$\Phi(t) = \int\limits_a^t \varphi^2(\xi)d\xi \leq -\int\limits_{\Sigma_{e_0}(a)} f_1 < e_1, \nu > .$$

Далее из сходимости интеграла $\int\limits_a^t \varphi^2(\xi)d\xi$, заключаем, что существует последовательность $t_k \uparrow \infty$, такая, что $\varphi(t_k) \to 0$ и поэтому, переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве

$$\int\limits_{M(a,t_k)} |\nabla f_1|^2 \leq -\int\limits_{\Sigma_{e_0}(a)} f_1 < e_1, \nu > +\varphi(t_k),$$

получим ограниченность интеграла

$$\int\limits_{M(a,+\infty)} |\nabla f_1|^2 \leq -\int\limits_{\Sigma_{e_0}(a)} f_1 < e_1, \nu >,$$

что и требовалось показать.

5. Теперь для доказательства теорем 6 и 6′, используем результат ([13], стр. 256), а именно, из леммы 3 вытекает, что

$$\inf_{\xi_1 < t < \xi_2} \operatorname{osc}^2(f_1(m)) \leq \operatorname{cap}(P_{\xi_1}, Q_{\xi_2}) \int\limits_{M(\xi_1,\xi_2)} |\nabla f_1|^2,$$

для любых $a < \xi_1 < \xi_2 < \infty$. Поэтому существует последовательность $t_k \uparrow \infty$ такая, что $\operatorname{osc}_{m\in\Sigma_{e_0}(t_k)} f_1(m) \to 0$. Так как $|f_1|$ ограничена на $M(a,+\infty)$ и на части ∂M, не лежащей в $\Sigma_{e_0}(a)$, выполняется $< e_1, \nu >= 0$, то используя принцип максимума для гармонических функций (и, если нужно, переходя к подпоследовательности t_k), заключаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{m\in\Sigma_{e_0}(t_k)} f_1(m) = \lim_{k\to\infty} \inf_{m\in\Sigma_{e_0}(t_k)} f_1(m) = c$$

Но

$$\sup_{m\in M(t_k,t_{k+1})} f_1(m) = \max\left[\sup_{m\in\Sigma_{e_0}(t_k)} f_1(m); \sup_{m\in\Sigma_{e_0}(t_{k+1})} f_1(m)\right],$$

и тоже самое – относительно минимума. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{osc}_{M(t_k,t_{k+1})} f_1 \le \lim_{k\to\infty} \mathrm{osc}_{\Sigma_{e_0}(t_k)} f_1 = 0,$$

откуда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{osc}_{M(t_k,+\infty)} f_1 = 0,$$

что и доказывает окончательно обе теоремы.

6. Как будет видно из доказательства теоремы 2, в случае $p \ge 3$ на любой p - мерной минимальной поверхности в $\mathbb{R}^n$ априорно существуют супергармонические ограниченные снизу функции, что входит в противоречие с параболичностью типа. Поэтому геометрическое строение трубчатой минимальной поверхности при $p \ge 3$ в определенном смысле принципиально отличается от двумерного случая.

Докажем прежде всего следующее вспомогательное утверждение. Подбирая подходящую систему координат, можно считать, не ограничивая общности, что точка $u = 0$ лежит в образе $u\ (M)$.

Л е м м а 4. *Пусть (M, u) – p - мерная минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$ и $p \ge 3$. Тогда функция $g(m) = |u(m)|^{2-p}$ является супергармонической.*

Положим $\rho = \rho(m) = |u(m)|$ и для фиксированного базиса ортонормированных векторов $e_1, e_2, ..., e_n$ в $\mathbb{R}^n$ обозначим через $u_i =< u, e_i >$ набор координатых функций. Тогда для любого касательного вектора $X \in T_m(M)$ будем иметь

$$\nabla_X u_i =< \overline{\nabla}_X u; e_i >=< X, e_i^T >,$$

Откуда видно, что $\nabla u_i = e_i^T$. Далее из минимальности (M, u) следует, что $\triangle u_i = 0$ и, таким образом

$$\triangle\rho^2(m) = \triangle\left(\sum_{i=1}^n u_i^2(m)\right) = 2\sum_{i=1}^n (u_i \triangle u_i + |\nabla u_i|^2) = 2\sum_{i=2}^n |e_i^T|^2 = 2p$$

С другой стороны, мы видим, что

$$\triangle\rho^2 = 2\rho \triangle \rho + 2|\nabla\rho|^2,$$

и поэтому, из найденного выше, имеем

$$\triangle\rho = \frac{p - |\nabla\rho|^2}{\rho}.$$

Найдем значения Лапласиана от нужной нам функции

$$\triangle(\rho^{2-p}) = \operatorname{div}\left(-\frac{p-2}{\rho^{p-1}}\nabla\rho\right) = -\frac{p-2}{\rho^{p-1}} \triangle \rho + \frac{(p-2)(p-1)}{\rho^p}|\nabla\rho|^2 =$$

$$= -\frac{p-2}{\rho^p}\left\{p - p|\nabla\rho|^2\right\} \leq 0.$$

Ввиду того, что $|\nabla\rho| = |u^T|/\rho \leq |u|/\rho = 1$ всюду на M, очевидно, при этом, что $g(m) = \rho^{2-p}(m) > 0$, т.е. $g(m)$ – ограниченная снизу супергармоническая функция, что и требовалось доказать.

Для доказательства теоремы 2 теперь заметим, что если $g(m)$ – супергармоническая функция, то функция

$$h(t) = \inf_{m\in\Sigma_{e_0}(t)} g(m) = \left(\max_{m\in\Sigma_{e_0}(t)} \rho(m)\right)^{2-p},$$

(определенная при всех $t \in (a,b)$, где (a,b) – интервал проекции трубчатой минимальной поверхности) является выпуклой вверх. Действительно, пусть $a < \alpha < \beta < b$, тогда функция

$$g_1(m) = g(m) - \left(h(\alpha) + \frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}(f(m)-\alpha)\right),$$

где $f(m) =< u, e_0 >$ является также супергармоничекой и гармонической функцией с постоянными коэффициентами, причем

$$\min_{m\in\Sigma_{e_0}(\alpha)} g_1(m) = \min_{m\in\Sigma_{e_0}(\alpha)} g(m) - h(\alpha) = 0,$$

$$\min_{m\in\Sigma_{e_0}(\beta)} g_1(m) = \min_{m\in\Sigma_{e_0}(\beta)} g(m) - h(\beta) = 0$$

Применяя обычный принцип максимума для супергармонической функции $g_1(m)$, будем иметь для любого $m \in M(\alpha,\beta)$

$$g_1(m) \geq \min_{\xi\in\Sigma_{e_0}(\alpha)\cup\Sigma_{e_0}(\beta)} g_1(\xi) = 0$$

т. е.

$$h(t) \geq h(\alpha) + \frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}(t-\alpha),$$

что, по определению, является свойством быть выпуклой вверх функции $h(t)$.

Предположим теперь, что одно из чисел a и b равно $\pm\infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что $b = \pm\infty$, в этом случае существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = \lim_{t\to+\infty} (\sup_{m\in\Sigma_{e_0}(t)} \rho(m))^{2-p} = 0,$$

что по известному свойству выпуклой вверх функции $h(t)$ находится в противоречии с ее неотрицательностью. Следовательно, оба числа a и b конечны, и трубчатая минимальная поверхность находится в слое между гиперплоскостями Π_a и Π_b, что завершает доказательство теоремы 2.

7. Приступим к доказательству теоремы 3. Как и в предыдущих случаях, доказательство опирается на существование некоторой супергармонической функции.

Предположим, что существует двумерная плоскость $V \in G_n^2$, такая, что

$$\sup_{\gamma\in M^*} \theta(\gamma, V) = \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Выберем произвольный единичный вектор $e \in V$ и зафиксируем параллельное в $\mathbb{R}^n$ векторное поле $e = e(m)$, отождествляемое в каждой точке $m \in M$ с вектором e. Рассмотрим функцию $\varphi(m) = \ln|e^T| = \ln|e^{T_m(M)}|$. Заметим, что при сделанных предположениях, выполнено $|e^{T_m}| \geq \cos\,\theta(T_m, V) \geq \cos\,\theta_0 > 0$, следовательно, $\varphi = \varphi(m)$ определена на всем M и ограничена снизу. Имеем для любого $X \in T_m(M)$,

$$\nabla_X\varphi(m) = \frac{1}{|e^T|}\nabla_X|e^T| = \frac{< e^T, \overline{\nabla}_X e^T >}{|e^T|^2} = \frac{1}{|e^T|} < \tau, -\overline{\nabla}_X e^N >=$$

$$= \frac{1}{|e^T|} < \tau, A^{e^N} X >=< X, \frac{1}{|e^T|} A^{e^N}\tau >,$$

где $\tau = e^T/|e^T|$, и следовательно

$$\triangle\varphi = \frac{1}{|e^T|} A^{e^N}\tau. \tag{14}$$

Воспользуемся теперь леммой 1. Для этого выберем произвольный ортонормированный базис E_1, E_2 в касательном пространстве $T_m(M)$ и по определению дивергенции получим

$$\triangle\varphi = \frac{1}{|e^T|}\mathrm{div} A^{e^N}\tau + \left(-\frac{1}{|e^T|^2}\right) < \nabla|e^T|, A^{e^N}\tau >,$$

Второе слагаемое легко найти, используя (14), так как нетрудно видеть, что $\nabla|e^T| = |e^T|\nabla\varphi = A^{e^N}(\tau)$, и, следовательно,

$$\triangle\varphi = \frac{1}{|e^T|}\mathrm{div}A^{e^N}\tau - \frac{1}{|e^T|^2}|A^{e^N}\tau|^2. \tag{15}$$

В силу леммы 1, первое слагаемое можно вычислить по формуле

$$\mathrm{div}A^{e^N}(\tau) = \sum_{i=1}^{2}(< A^{e^N}E_i, \nabla_{E_i}\tau > + < B(\tau, E_i), \nabla_{E_i}e^N >). \tag{16}$$

Непосредственно находим

$$\nabla_{E_i}e^N = (\overline{\nabla}_{E_i}(e - e^T))^N = -B(e^T, E_i) = -|e^T|B(\tau, E_i),$$

и далее,

$$\nabla_{E_i}\tau = \nabla_{E_i}\left(\frac{e^T}{|e^T|}\right) = \frac{|e^T|\nabla_{E_i}e^T - e^T\nabla_{E_i}|e^T|}{|e^T|^2} = \frac{|e^T|A^{e^N}(E_i) - e^T < A^{e^N}\tau, E_i >}{|e^T|^2}$$

$$= \frac{1}{|e^T|}(A^{e^N}E_i - \tau < A^{e^N}E_i, \tau >$$

Подставляя найденное в (16), получим

$$\mathrm{div}A^{e^N}\tau = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{|A^{e^N}E_i|^2 - < A^{e^N}E_i, \tau >^2}{|e^T|} - |e^T||B(\tau, E_i)|^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\frac{|A^{e^N}E_i|^2 - |A^{e^N}\tau|^2}{|e^T|} - \frac{1}{2}||B||^2|e^T|, \tag{17}$$

где $||B||^2 = \sum_{i,j=1}|B(E_i, E_j)|^2$ – длина второй квадратичной формы. Непосредственным образом проверяется специальное свойство отображения A^ξ двумерной минимальной поверхности, а именно

$$|A^\xi E_1|^2 = |A^\xi E_2|^2 = |A^\xi X|^2, \quad \forall\xi \in N_m(M), X \in T_m(M),$$

откуда, используя (15) и (17), получим

$$\triangle\varphi = \frac{|A^{e_N}\tau|^2}{|e^T|^2} - \frac{1}{2}||B||^2 - \frac{|A^{e_N}\tau|^2}{|e^T|^2} \tag{18}$$

Из (18) видно, что $\varphi(m)$ – супергармоническая функция, причем, как уже говорилось $\varphi \geq \ln(\cos\,\theta_0) > -\infty$. Проводя рассуждения аналогичные сделанным при доказательстве теоремы 1, и используя трубчатость в целом, приходим к выводу, что $|e^T| \equiv \mathrm{const} \neq 0$ на M, и окончательно,

$$\triangle\varphi \equiv 0 \equiv -\frac{1}{2}||B||^2$$

т.е. $||B|| \equiv 0$. Из последнего равенства вытекает, что поверхность (M, u) может быть только плоскостью, что находится в противоречии с трубчатостью поверхности (M, u). Следовательно предположение, сделанное в начале доказательства о существовании V сделано неверно, и поэтому, для любой $V \in G_n^2$ выполняется $\sup_{\gamma \in M^*} \theta(\gamma, V) = \pi/2$.

8. Заметим, что методы примененные нами выше, могут быть использованы в изучении строения гауссового образа минимальной поверхности трубчатого типа вблизи бесконечности, а именно, в терминах концов поверхности (M, u).

Рассмотрим трубчатую поверхность (M, u) в $\mathbb{R}^n$ с проекцией $(a, +\infty)$. Произвольное некомпактное двусвязное множество $D \subset M$ с компактной границей ∂D назовем концом поверхности (M, u). Введем следующее определение предельного множества конца поверхности D, а именно положим

$$D' = \bigcap_{t > a} \overline{D^*(t, \infty)}$$

где через $D^*(t, \infty)$ обозначим гауссов образ конца $D \cap M(t, +\infty)$. Ясно, что D' – непустое замкнутое множество в G_n^2. Справедлива следующая

Теорема 7. *Пусть (M, u) – трубчатая двумерная минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$ с проекцией (a, ∞), и D – один из концов (M, u). Тогда*

(α) либо D' пересекается с любым экватором G_n^2 ;

(β) либо D' состоит из единственной точки $\gamma \in G_n^2$, причем в этом случае $\theta(e_0, \gamma) = \pi/2$.

Для доказательства предположим, что (α) не справедливо, и, не ограничивая общности, будем считать, что существует $V \in G_n^2$ и $D' \cap K_V = \emptyset$, такая, что D' лежит (в силу своей замкнутости) в одной из половин G_n^2 вместе с V. Отсюда сразу вытекает, что $\max \theta(\gamma, V) = \theta_0 < \pi/2$. Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано так, что $\varepsilon < \pi/2 - \theta_0$. Тогда по определению D', можно выбрать достаточно большое $T > a$, чтобы $\forall \gamma \in D^*(T, +\infty)$ было справедливо $\theta(\gamma, V) < \pi/2 - \varepsilon$. Заметим, что из последнего неравенства и свойств трансверсальности следует, что выбранное множество $D(T, +\infty)$ гомеоморфно кольцу, то есть является двусвязным.

Рассмотрим множество единичных векторов пространства $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{O} = \{e \in S^{n-1} : |e^V| > \cos \varepsilon\},$$

где $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ – сфера единичного радиуса с центром в начале координат. Ясно, что $\mathcal{O}$ – открытое подмножество S^{n-1}.

Для любых $\gamma \in G_n^2$ и $e \in \mathbb{R}^n$ верно соотношение

$$\theta(e,\gamma) \leq \theta(e,V) + \theta(V,\gamma),$$

где мы сохраняем то же обозначение для угла между вектором и плоскостью. Следовательно для любых $e \in \mathcal{O}$ и $\gamma \in \overline{D^*(T,+\infty)}$ выполняется

$$\theta(e,\gamma) \leq \varepsilon + \theta_0 < \pi/2$$

и поэтому

$$|e^\gamma| > \cos\,(\varepsilon + \theta_0) > 0$$

Выше было показано, что для любых $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n$ верна следующая формула :

$$\triangle \ln|e_i^{T_m}| = -\frac{1}{2}||B||^2, \quad i = 1, 2,$$

Откуда видно, что функция $\varphi(m) = \ln|e_1^{T_m}|/|e_2^{T_m}|$ является гармонической в области определения. Но в силу выше сделанных замечаний, для любых $e_1, e_2 \in \mathcal{O}$ и $e_1 \neq e_2$ выполнено

$$|\varphi(m)| = \left|\ln\frac{|e_1^{T_m}|}{|e_2^{T_m}|}\right| \leq -\ln\,\cos\,(\varepsilon + \theta_0),$$

то есть $\varphi(m)$ ограничена на $D(T,+\infty)$. Покажем, что существует предел

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{osc}_{m \in \Sigma_{e_0}(t)}\ \varphi(m) = 0, \tag{19}$$

или, что то же самое, функция $\varphi(m)$ имеет предел на бесконечности.

Для этого заметим, что функция $\varphi(m)$ с точностью до постоянного множителя удовлетворяет условиям теоремы 6, а также, что в доказательстве этой теоремы используется по существу свойство гармоничности и ограниченности функции $f_1(m)$. Следовательно, заменяя всюду $f_1(m)$ на $\varphi(m)$, получим требуемое соотношение (19). В терминах предельного множества D' это просто означает, что для каждой пары фиксированных векторов $e_1, e_2 \in \mathcal{O}$ величина $|e_1^\gamma|/|e_2|$ не зависит от $\gamma \in G_n^2$. Покажем, что D' состоит из одной точки. С этой целью предположим противное, то есть существуют по крайней мере две плоскости γ, ξ такие, что $\gamma \neq \xi$. Тогда для любых $e_1, e_2 \in \mathcal{O}$ имеем

$$\frac{|e_1^\gamma|}{|e_2^\gamma|} = \frac{|e_1^\xi|}{|e_2^\xi|}$$

Рассмотрим отображение $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ вида

$$h(x) = \frac{|x^\gamma|}{|x^\xi|}, \quad x^\xi \neq 0.$$

Тогда ограничение $h|_{\mathcal{O}}(x)$ есть тождественная постоянная, например c. В силу однородности $h(x)$, заключаем,что $h(x) \equiv c$ на открытом конусе $\mathcal{O}' = \{y \in \mathbb{R}^n : y/|y| \in \mathcal{O}, y \neq 0\}$. Однако $h(x)$ – аналитическая функция в области определения и следовательно, в силу теоремы единственности аналитических функций, $h(x) \equiv \mathrm{const} = c$.

По нашему предположению $\xi \neq \gamma$, поэтому для их ортогональных дополнений имеем $\gamma^\perp \backslash \xi^\perp \neq \emptyset$. Выбирая $e \in \gamma^\perp \backslash \xi^\perp$ получаем тем самым $e = |e^\gamma|/|e^\xi| \neq 0$, что невозможно так как для $x \in \gamma$ очевидно, $h(x) \neq 0$. В случае когда D' состоит из одной точки можно утверждать, что $D' = \gamma \in G_n^2$ и $|e^\gamma| = 0$, то есть $|e^\gamma| = \cos\alpha \neq 0$, где $\alpha \in [0; \pi/2)$. Тогда по определению D', существует достаточно большое $A > a$, такое, что

(а) A – регулярное значение функции $f(m) =< u(m), e_0 >$;

(б) Для любого $m \in D(A, +\infty)$ выполнено $\theta(\gamma, T_m) < \varepsilon < \pi/2 - \alpha$.

В силу (а) множество $D \cap \Sigma_{e_0}(A)$ является одномерным компактным многообразием в M, то есть распадается в объединение конечного числа гладких замкнутых жордановых дуг. Выберем из них произвольную дугу Γ_ε и через $\tau = \tau(m)$ обозначим ее касательный вектор в точке $m \in \Gamma_\varepsilon$. В силу нашего предположения $e_0^\gamma \neq 0$, следовательно, можно выбрать единичный вектор $v \in \gamma$, такой что $< e_0^\gamma, v >= 0$. Заметим, что по определению $\Gamma_\varepsilon \subset D \cap_{T_m(M)} \Sigma_{e_0}(A) = \{m \in D : \ f(m) = A\}$, векторное поле $e^{T_m(M)}$ является нормальным к Γ_ε в M и тем самым векторные поля $\tau(m)$ и e^{T_m} образуют ортогональный базис в $T_m(M)$. Покажем, что можно выбрать $\xi > 0$ так, что $\forall m \in \Gamma_\varepsilon$ величина $< v, \tau(m) >$ сохраняла бы знак, то есть $< v, \tau(m) > \neq 0$.

Действительно, в противном случае, для любого $\xi > 0$ существовала бы $m \in \Gamma_\varepsilon$ для которой $v^{T_m} = e_0^{T_m}\mu$, где $\mu \in \mathbb{R}$ некоторое ненулевое число (так как $|v^{T_m}| \geq \cos\theta(\gamma, T_m) > 0$), зависящее от m. Из последнего равенства видно, что

$$(v - \mu e_0)^{T_m} = 0$$

то есть вектор $w = (v - \mu e_0)$ лежит в $N_m(M)$. Имеем :

$$< w, v >=< v, v > - < e_0, v > \mu = 1 - < e_0^\gamma, v > \mu = 1$$

так как $< e_0^\gamma, v >= 0$ по выбору $v \in \gamma$. Но тогда, так как $w \in N_m$

$$1 \equiv |< w, v >| = |< w^N, v^N >| \leq |w^N| \cdot |v^N| \qquad (20)$$

Заметим, что $|w^N| = |w| = |v - \mu e_0| \leq 1 + |\mu|$, а с другой стороны

$$0 =< w, e_0^T >=< v, e_0^T > -|e_0^T|\mu \Longrightarrow \mu = \frac{< v, e_0^T >}{|e_0^T|^2}.$$

Отсюда следует оценка

$$|\mu| = \frac{| < v, e_0^T > |}{|e_0^T|^2} \leq \frac{|v||e_0^T|}{|e_0^T|^2} = \frac{1}{|e_0^T|} \tag{21}$$

В силу нашего выбора,

$$\theta(e_0, T_m) \leq \theta(e_0, \gamma) + \theta(\gamma, T_m) < \alpha + \varepsilon < \pi/2,$$

и таким образом

$$|e_0^{T_m}| = \cos\,\theta(e_0, T_m) \geq \cos\,(\alpha + \varepsilon) > 0$$

Неравенство (21) примет вид

$$|\mu| \leq \frac{1}{(\cos\,(\alpha + \varepsilon))}$$

и в совокупности с (20) дает следующее соотношение

$$1 \leq |v^N|(1+|\mu|) \leq (1-|v^T|^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{\cos\,(\alpha+\varepsilon)}\right) \leq \sin\varepsilon\, \frac{1+\cos\,(\alpha+\varepsilon)}{\cos\,(\alpha+\varepsilon)}. \tag{22}$$

Из (22) видно, что при надлежащем выборе $\varepsilon > 0$, мы придем к противоречию, так как правую сторону этого неравенства можно сделать сколь угодно малой при $\varepsilon \to 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что

$$\sin\varepsilon \frac{1+\cos\,(\alpha+\varepsilon)}{\cos\,(\alpha+\varepsilon)} < 1.$$

Тогда для любой $m \in \Gamma_\varepsilon$, $< v, \tau(m) >\neq 0$, и следовательно $< v, \tau(m) >$ сохраняет знак на Γ_ε, например, положительно. Рассмотрим координатную функцию $g(m) =< v, u(m) >$ с направляющим вектором v и градиентом $\nabla g = v^{T_m}$. Тогда при $m \in \Gamma_\varepsilon$

$$< \nabla g, \tau(m) >=< v^{T_m}, \tau(m) >=< v, \tau(m) > > 0$$

Проинтегрируем последнее неравенство по Γ_ε

$$0 < \int\limits_{m\in\Gamma_\varepsilon} < \nabla g, \tau(m) >= \int\limits_{m\in\Gamma_\varepsilon} dg(m) = 0$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Список литературы

[1] *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии // М.: Наука, 1981, Т. 2.

[2] *Nitsche J. C. C.* A uniqueness theorem of Bernstein's type for minimal surfaces in cillindrical coordinates // J. Math. Mech., 1957, V. 6, p. 859–864.

[3] *Веденяпин А. Д., Миклюков В. М.* Внешние размеры трубчатых минимальных гиперповерхностей // Мат. сб., 1986, Т. 131(173), с. 240–250.

[4] *Миклюков В. М.* О некоторых свойствах трубчатых минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n$ // ДАН СССР, 1979, Т. 247, N3, с. 549–552.

[5] *Миклюков В. М.* Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальных поверхностей // Мат. сб., 1979, Т. 108(150), с. 268–289.

[6] *Григорьян А. А.* О существовании положительных фундаментальных решений уравнений Лапласа на римановых многообразиях // Мат. сб., 1985, Т. 128(170), с. 354–363.

[7] *Simons J.* Minimal varieties in Riemanian manifolds // Ann. Math., 1968, V. 88, N1, p. 62–105.

[8] *Миклюков В. М., Ткачев В. Г.* О строении в целом внешне полных минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ // Изв. вузов, матем., 1987, N7, с. 30–36.

[9] *Ткачев В. Г.* Признаки параболичности конформного типа двумерных минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n$ // Всесоюзн. конфер. по геом. "в целом", Новосибирск, 1987, с. 119.

[10] *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.* Модель релятивистской струны в физике андронов // М.: Энергоатомиздат., 1987.

[11] *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.* Суперструны — новый подход к единой теории фундаментальных взаимодействий // УФН, 1986, Т. 150, N4, с. 489–524.

[12] *Курант Р.* Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности // М.: ИЛ., 1953.

[13] *Суворов Г. Д.* Обобщенный "принцип длины и площади"в теории отображений // Киев.: Наукова думка, 1985.

[14] *Фоменко А. Т.* О скорости роста и наименьших об'емах глобально минимальных поверхностей в кобордиумах // Тр. семинара по вект. и тензорн. анализу, Вып. 21, М.: МГУ, 1985, с. 3–12.

[15] *Фоменко А. Т.* Алгебраическая структура некоторых классов вполне интегрируемых гамильтоновых систем на алгебрах Ли // геометр. теория функций и топол., Киев.: Наукова думка, 1981, с. 85–125.

[16] *Фоменко А. Т.* Вариационные методы в топологии // М.: Наука, 1982.

[17] *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. М.: Наука, 1982

[18] *Kasue A.* Gap theorems for minimal submanifolds of Euclidean space // J. Math. Soc., Japan, 1986, V. 38, N3, p. 473–492.

[19] *Schoen R.* Uniqueness, symmetry and embeddedness of vinimal surfaces // J. of Diff. Geom., 1983, V. 18,p. 791–809.