УДК 517.956.25

Целые решения уравнения Саймона

И. А. Зорина, В. Г. Ткачев

Аннотация. В работе рассматривается проблема существования целых решений квазилинейного эллиптического уравнения специального вида. Библиогр. 11.

Ключевые слова и фразы. Квазилинейные уравнения эллиптического типа, целые решения, свойство Бернштейна.

Entire solutions to Simon's equation.

V.G. Tkachev, I.A. Zorina

Abstract. We consider a problem of existence of entire solutions to special quasilinear elliptic PDE.

Key words and phrases. Quasilinear elliptic PDE, entire solution, Bernstein property.

1. Введение

1.1. В своей недавней работе [**9**, с. 350] Л. Саймон поставил задачу о существовании целых решений следующего квазилинейного уравнения эллиптического типа

$$u_{xx}(1+u_x^2) + 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}(1+u_y^2) = 0. \tag{1}$$

Данное уравнение можно рассматривать как сопряженное в некотором смысле к уравнению минимальных поверхностей

$$u_{xx}(1+u_y^2) - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}(1+u_x^2) = 0. \tag{2}$$

Как известно, для (2) справедливо свойство Бернштейна: *целыми C^2-гладкими решениями (2) являются только линейные функции.* Вопрос о выполнении теоремы Бернштейна для различных классов квазилинейных уравнений, обобщающих уравнение минимальных поверхностей, рассматривался ранее в работах многих авторов; подробную библиографию можно найти в [**8**], [**9**]. С другой стороны, проблема существования целых решений для квазилинейных уравнений эллиптического типа является почти незатронутой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-00304).

Целью настоящей работы является следующая теорема о существовании целого семейства решений уравнения (1), дающая ответ на вопрос, поставленный в [**9**].

Теорема 1. *Для любого натурального $N \geq 2$ существует целое C^2-гладкое решение $u_N(x, y)$ уравнения (1), которое имеет на бесконечности полиномиальный рост:*

$$\limsup_{(x,y)\to\infty} \frac{u_N(x, y)}{(x^2 + y^2)^{\alpha_N/2}} = C, \quad \alpha_N = N^2/(2N - 1), \quad C \neq 0. \tag{3}$$

При этом для указанных решений имеет место следующее параметрическое представление

$$\begin{aligned} x &= A(\rho)\cos(2N - 1)\theta + B(\rho)\cos\theta, \\ y &= A(\rho)\sin(2N - 1)\theta - B(\rho)\sin\theta, \\ u_N &= F(\rho)\cos N\theta, \end{aligned} \tag{4}$$

где $A(\rho) = \frac{1}{2}(f' - \frac{k}{\rho}f)$, $B(\rho) = \frac{1}{2}(f' + \frac{k}{\rho}f)$, $F(\rho) = \rho f' - f$,

$$f(\rho) = \rho^k \cdot \Phi(\frac{k - k^2}{2}, 1 + k; -\frac{\rho^2}{2}),$$

и область изменения параметров: $\rho \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, через $\Phi(a, c; t)$ обозначена вырожденная гипергеометрическая функция Куммера и $k = N/(N - 1)$.

Замечание 1. Удобно также использовать следующее комплексное представление для найденных целых решений:

$$\begin{aligned} z = x + iy &= A(\rho)e^{(2N-1)i\theta} + B(\rho)e^{-i\theta}, \\ u_N(z) &= F(\rho)\,\mathrm{Re}\, e^{iN\theta}. \end{aligned} \tag{5}$$

1.2. Мы называем решения в форме (4) *стандартными N-решениями* уравнения (1). Отметим, что произвольная гомотетия вида

$$u_{N,a}(x, y) := \frac{1}{a}u_N(ax, ay),$$

а также функция полученная сдвигом и поворотом в плоскости независимых переменных также будет целым решением (1). Все такие решения будем называть просто N-решениями уравнения (1). Полезно отметить, что стандартные N-решения обладают следующим свойством симметрии

$$u_N(e^{\pi in/N}z) = -u_N(z), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Найденный класс N-решений находится в естественном соответствии с классом гармонических полиномов степени N. Пользуясь представлением (4) несложно проверить выполнение следующего свойства

$$\lim_{a\to 0} u_{N,a} = \operatorname{Re}(x+iy)^N.$$

На самом деле справедливо следующее свойство

Теорема 2. *Для любого натурального $N \geq 2$ имеет место разложение*

$$u_N(z) = U_N(z) \operatorname{Re} z^N, \tag{6}$$

где $U_N(z)$ положительная непрерывная и ограниченная в $\mathbb{C}$ функция, причем

$$0 < U_N(z) \leq U_N(0) = \frac{(N-1)^{N-1}}{N^N}.$$

Особый интерес представляет вопрос о полноте класса найденных целых решений. Отметим лишь, что в недавней работе одного из авторов [**11**] было получено описание всех *квазирадиальных* решений уравнения p-Лапласа. В частности, случай $p=\infty$ соответствует уравнению Аронссона [**1**]

$$u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_y^2 = 0, \tag{7}$$

квазирадиальные решения которого являются асимптотическими конусам над N-решениями уравнения Саймона (1). В этом смысле, естественно высказать предположение, что найденные выше N-решения (с точностью до сдвига и поворота в плоскости независимых переменных) описывают полный запас целых решений (1), однако в данный момент мы не располагают доказательством данного свойства.

С другой стороны, как показано в [**11**], все квазирадиальные решения (7) являются алгебраическими функциями. Используя явное представление функции Куммера (15), несложно убедиться, что при $N=2$, стандартное 2-решение может быть задано следующей полиномиальной параметризацией

$$x = 2\xi + \frac{2\xi^3}{3}, \qquad y = 2\eta + \frac{2\eta^3}{3}$$
$$u_2 = \eta^2 - \xi^2 + \frac{\eta^4 - \xi^4}{2}.$$

где $\xi = \rho\cos\theta$, $\eta = \rho\sin\theta$ (см. также [**10**]). Из последнего представления следует, что 2-решения являются алгебраическими функциями. Остается, однако, неясным, выполняется ли это свойство для остальных $N \geq 3$.

Авторы выражают благодарность В.М. Миклюкову и Г. Аронссону за полезные обсуждения по теме данной статьи.

2. Предварительные замечания

2.1. Рассмотрим некоторую функцию $v(\xi,\eta)$, удовлетворяющую следующему линейному уравнению

$$v''_{\xi\xi}(1+\eta^2) - 2v''_{\xi\eta}\xi\eta + v''_{\eta\eta}(1+\xi^2) = 0. \tag{8}$$

Используя стандартное преобразование Лежандра [**7**, стр. 39], легко убедится, что в случае, когда гессиан $v''_{\xi\xi}v''_{\eta\eta} - v''^2_{\xi\eta}$ отличен от нуля, преобразование

$$x = v'_\xi(\xi,\eta), \quad y = v'_\eta(\xi,\eta), \quad u = x\xi + y\eta - v(\xi,\eta) \tag{9}$$

осуществляет параметризацию некоторого, вообще говоря, многозначного, решения уравнения Саймона (1).

Далее в работе доказывается, что для каждого натурального $N \geq 2$ существуют решения $v(\xi,\eta)$ уравнения (8) обладающие следующими свойствами:

(i) *градиентное отображение*

$$W(\xi,\eta) = \nabla v(\xi,\eta) := (x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) \tag{10}$$

является вещественно аналитическим и гомеоморфно отображает плоскость $\mathbb{R}^2$ *на себя, причем его якобиан* $v''_{\xi\xi}v''_{\eta\eta} - v''^2_{\xi\eta}$ *отличен от нуля всюду вне начала координат.*

(ii) *в окрестности начала координат соответствующая функция* $u(x,y)$, *задаваемая параметризацией (9), вещественно аналитической.*

Ясно, что полученное таким образом решение $u(x,y)$ уравнения (1) будет отвечать свойствам теоремы 1. Доказательство данных фактов утверждений разбито на несколько шагов и опирается на исследование вспомогательных свойств гипергеометрической функции Куммера, которые приведены в параграфе 3. В параграфах 4 и 5 доказываются свойства (i) и (ii) указанные выше. Доказательство оценки асимптотического роста (3) приводится отдельно в параграфе 6. Оставшаяся часть данного параграфа посвящена описанию класса функций v, составляющего основу для нашего дальнейшего изучения.

2.2. Рассмотрим решения уравнения (8), которые имеют вид

$$v = f(\rho)\cos k\theta, \tag{11}$$

где $\xi = \rho\cos\theta$, $\eta = \rho\sin\theta$ – полярные координаты, и k некоторый вещественный параметр. Разделение переменных приводит к следующему характеристическому уравнению

$$\rho^2 f'' + \rho(1+\rho^2)f' - k^2(1+\rho^2)f = 0,$$

которое, в свою очередь, заменой $t = -\frac{\rho^2}{2}$ и

$$f(\rho) = \rho^k \varphi(-\frac{\rho^2}{2}),$$

сводится к уравнению гипергеометрического вида

$$t\varphi'' + [(k+1) - t]\,\varphi' - \frac{k-k^2}{2}\,\varphi = 0. \tag{12}$$

Хорошо известно [**4**, гл. 6], что ограниченные в окрестности нуля решения уравнения (12) пропорциональны вырожденной гипергеометрической функции Куммера:

$$\Phi(\frac{k-k^2}{2},\, k+1;\, t), \tag{13}$$

где $\Phi = \Phi(a, c; x)$ означает единственное решение уравнения

$$x\Phi'' + (c-x)\Phi' - a\Phi = 0, \tag{14}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\Phi(0) = 1, \quad \Phi'(0) = \frac{a}{c},$$

Таким образом, сравнивая найденные выражения, получаем, что функция

$$v = \rho^k \Phi(\frac{k-k^2}{2},\, k+1; -\frac{\rho^2}{2}) \cos k\theta$$

является ограниченным в окрестности нуля решением уравнения (8). Отметим сразу, что (4) является следствием (9).

3. Вспомогательные свойства функции Куммера

Сначала кратко отметим необходимые нам в дальнейшем свойства функции Куммера [**5**]. Известно, что Φ продолжается в комплексную плоскость как целая функция переменного z в виде следующего гипергеометрического ряда

$$\Phi(a, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \tag{15}$$

где

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1) = \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)}$$

означает символ Похгаммера. В частности, при всех отрицательных целых значениях параметра a, функция Куммера является многочленом специального вида.

При $c > a > 0$ имеет место следующее интегральное представление [**4**, гл. 6]

$$\Phi(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xu} u^{a-1} (1-u)^{c-a-1} du. \tag{16}$$

Более того, для производных функции Куммера справедливы соотношения

$$\frac{d}{dx}\,\Phi(a, c; x) = \frac{a}{x}\left[\Phi(a+1, c; x) - \Phi(a, c; x)\right], \tag{17}$$

и

$$\frac{d^n}{dx^n}\,\Phi(a, c; x) = \frac{(a)_n}{(c)_n}\,\Phi(a+n, c+n; x). \tag{18}$$

Всюду далее, чтобы избежать громоздких выражений, принято следующее обозначение:

$$\Phi_{i,j} \equiv \Phi_{i,j}(x) := \Phi(a+i, c+j; x).$$

Лемма 1. *Если $c > a > 0$, то при всех $x \in \mathbb{R}$*

$$\Phi_{0,0} > 0, \quad \Phi'_{0,0} > 0, \quad \Phi''_{0,0} > 0.$$

Если параметры a и c таковы, что $c > 0$, $-1 < a < 0$, то при всех $x \leq 0$

$$\Phi_{0,0} > 1, \quad \Phi'_{0,0} < 0, \quad \Phi''_{0,0}(x) < 0. \tag{19}$$

Доказательство. Первое свойство следует сразу из представления (16) и соотношений (18) для $n = 1, 2$.

При $a < 0$ интегральное представление неприменимо для самой функции $\Phi_{0,0}$, но ввиду (18) оно справедливо для производной $\Phi'_{0,0}(x)$, откуда

$$\Phi'_{0,0}(x) = \frac{a}{c}\Phi_{1,1}(x) =$$
$$= \frac{a\Gamma(c+1)}{c\Gamma(a+1)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xu} u^{a} (1-u)^{c-a-1} du < 0.$$

Используя теперь $a > -1$, находим, что $\Phi''_{0,0}(x) < 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. С другой стороны, ввиду отрицательности производной $\Phi'_{0,0}(x) < 0$ и $\Phi_{0,0}(0) = 1$ заключаем, что $\Phi_{0,0}(x) > 1$ для всех $x \leq 0$, что доказывает вторую часть утверждения. □

Далее нам понадобится вспомогательная функция

$$g(x) := \frac{x\Phi'_{0,0}}{\Phi_{0,0}}, \tag{20}$$

где всюду далее принято соглашение $\Phi_{0,0} = \Phi(a, c; x)$. Имеет место

Лемма 2. *Производная функции $g(x)$ вычисляется по формуле*

$$\frac{dg}{dx} = \frac{a}{\Phi_{0,0}^2}\Big[\Phi_{0,0}\Phi'_{1,0}(x) - \Phi'_{0,0}(x)\Phi_{1,0}(x)\Big]. \tag{21}$$

Доказательство. Применяя (17), получим

$$\begin{aligned}\Phi_{0,0}^2\, g'(x) &= x\,\Phi''_{0,0}\Phi_{0,0} + \Phi'_{0,0}\Phi_{0,0} - x\Phi'^2_{0,0} = \\ &= x\Phi''_{0,0}\Phi_{0,0} + \Phi'_{0,0}\Phi_{0,0} - a\,\Phi'_{0,0}[\Phi_{1,0} - \Phi_{0,0}].\end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned}x\Phi''_{0,0} &= x\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x}(\Phi_{1,0} - \Phi_{0,0})\right) = -\frac{a}{x}(\Phi_{1,0} - \Phi_{0,0}) + a(\Phi'_{1,0} - \Phi'_{0,0}) = \\ &= -\Phi'_{0,0} + a(\Phi'_{1,0} - \Phi'_{0,0}).\end{aligned}$$

Таким образом, $\Phi_{0,0}^2\, g'(x) = a(\Phi'_{1,0}\Phi_{0,0} - \Phi_{1,0}\Phi'_{0,0})$, что и требовалось доказать. □

Лемма 3. *Пусть $-1 < a < 0$, $c > 0$. Тогда функция $g(x)$ монотонно убывает, неотрицательна при всех $x \le 0$ и имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -a.$$

Доказательство. В силу леммы 1 функции $\Phi_{0,0}$, $\Phi'_{1,0}$ и $\Phi_{1,0}$ положительны, а $\Phi'_{0,0}$ отрицательна на интервале $x \le 0$. Таким образом, ввиду (21), $g'(x) < 0$ при неположительных значений x. Неотрицательность $g(x)$ на отрицательной полуоси тогда вытекает из ее убывания и того факта, что $g(0) = 0$.

Для вычисления предела воспользуемся следующим асимптотическим представлением [**4**, стр. 266]

$$\Phi_{0,0}(x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}|x|^{-a}\left(1 + O(\frac{1}{|x|})\right), \qquad x \to -\infty, \tag{22}$$

откуда получаем

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\Phi_{1,0}(x)}{\Phi_{0,0}(x)} = 0.$$

Таким образом, используя (17), приходим к требуемому соотношению

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\,\Phi'_{0,0}(x)}{\Phi_{0,0}(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a(\Phi_{1,0}(x)-\Phi_{0,0}(x))}{\Phi_{0,0}(x)}=-a.$$

□

4. Свойства градиентного отображения

4.1. Всюду далее зафиксированы следующие обозначения

$$A(\rho):=\frac{1}{2}(f'-\frac{k}{\rho}f),\qquad B(\rho):=\frac{1}{2}(f'+\frac{k}{\rho}f),\tag{23}$$

где $f(\rho)=\rho^k\cdot\Phi(a,c;-\frac{\rho^2}{2})$. При этом, мы предполагаем, что выполнено

$$a=\frac{k-k^2}{2},\qquad c=1+k,\tag{24}$$

где параметр k принимает следующие значения

$$k=\frac{N}{N-1},\tag{25}$$

для некоторого целого $N\geq 2$. В частности, при таком выборе k: $c>0$ и $a<0$.

Тогда градиентное отображение (10) в полярных координатах принимает следующий вид

$$W:\ \begin{cases} x(\rho,\theta)= & A(\rho)\cos(2N-1)\theta+B(\rho)\cos\theta,\\ y(\rho,\theta)= & A(\rho)\sin(2N-1)\theta-B(\rho)\sin\theta,\end{cases}\tag{26}$$

Наряду с этим отображением, мы используем его комплексификацию, полагая $\zeta=\xi+i\eta=\rho e^{i\theta}$:

$$W(\zeta)=A(|\zeta|)\frac{\zeta^{2N-1}}{|\zeta|^{2N-1}}+B(|\zeta|)\frac{|\zeta|}{\zeta},$$

и отождествляя $W(\xi+i\eta)$ и $W(\xi,\eta)$.

Лемма 4. *Пусть a и c удовлетворяют (24). Тогда функция $\frac{A(\rho)}{B(\rho)}$ неотрицательная монотонно возрастающая, и имеет место соотношение*

$$\lim_{\rho\to+\infty}\frac{A(\rho)}{B(\rho)}=\frac{1}{2N-1}.$$

При этом функции $A(\rho)$ и $B(\rho)$ строго положительные при всех $\rho>0$.

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{A(\rho)}{B(\rho)} = \left(1 - \frac{2k\Phi_{0,0}(-\rho^2/2)}{\rho^2\Phi'_{0,0}(-\rho^2/2)}\right)^{-1}$$

или, полагая $t = -\frac{\rho^2}{2}$, получим

$$\frac{A(\rho)}{B(\rho)} = \frac{g(t)}{k + g(t)},$$

где g — функция, определенная ранее в (20). В силу леммы 3 и положительности k, дробь в правой части неотрицательна и монотонно возрастает по ρ. Более того, для предельного соотношения имеем

$$\lim_{\rho\to+\infty}\frac{A(\rho)}{B(\rho)} = \lim_{t\to-\infty}\frac{g(t)}{k+g(t)} = \frac{a}{k-a} = \frac{1}{2N-1}.$$

С другой стороны, из (23), используя явный вид функции $f(\rho)$ находим

$$B(\rho) = k\rho^{k-1}\Phi_{0,0} - \frac{1}{2}\rho^{k+1}\Phi'_{0,0},$$

где, ввиду леммы 1, $\Phi'_{0,0} < 0$, а, значит, $B(\rho) > 0$. Положительность $A(\rho)$ вытекает теперь из положительности дроби A/B и лемма доказана. □

Следствие 1. *В сделанных выше предположениях имеет место оценка*

$$1 \le \frac{\max_{|\zeta|=\rho}|W(\zeta)|}{\min_{|\zeta|=\rho}|W(\zeta)|} \le k = \frac{N}{N-1}. \tag{27}$$

Доказательство. В самом деле, из (26) следует, что

$$|W(\zeta)|^2 = A^2(\rho) + 2A(\rho)B(\rho)\cos 2N\theta + B^2(\rho),$$

откуда

$$|B(\rho) - A(\rho)| \le |W(\zeta)| \le |A(\rho) + B(\rho)|, \tag{28}$$

и неравенство следует сразу из утверждений леммы 4.

□

4.2. Далее нам пригодятся следующие разложения амплитудных функций $A(\rho)$ и $B(\rho)$, являющиеся непосредственным определений и (15):

$$\begin{aligned}
A(\rho) &= -\frac{\rho^{k+1}}{2}\Phi'(a,c;-\frac{\rho^2}{2}),\\
B(\rho) &= \rho^{k-1}(k\Phi(a,c;-\frac{\rho^2}{2}) - \frac{\rho^2}{2}\Phi'(a,c;-\frac{\rho^2}{2})),
\end{aligned}$$

и при $k = N/(N-1)$ получаем

$$
\begin{aligned}
A(\rho) &= \rho^{(2N-1)/(N-1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \rho^{2\nu} \\
B(\rho) &= \rho^{1/(N-1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu \rho^{2\nu},
\end{aligned} \tag{29}
$$

где указанные ряды сходятся при всех значениях ρ и

$$
\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu a(a+1)_\nu}{2^\nu c\nu!(c+1)_\nu}, \qquad \beta_\nu = \frac{(-1)^\nu (a)_\nu}{2^\nu \nu!(c)_\nu}(k+\nu)
$$

Заметим, теперь что $W(\zeta)$ — непрерывное отображение $|\zeta| > 0$. Непрерывность в нуле следует из оценки (28) и (29). Для доказательства инъективности $W(\zeta)$ предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 5. *В сделанных ранее предположениях отображение W инъективно переводит каждую окружность радиуса $\rho > 0$ в жорданову кривую, не проходящую через начало координат.*

Доказательство. Для доказательства инъективности предположим противное. Пусть ξ и η две точки на окружности $|\zeta| = \rho$, образы которых совпадают: $w(\zeta_1) = w(\zeta_2)$. Тогда

$$
\frac{B(\rho)}{A(\rho)} = h_1 h_2 [h_1^{2N-2} + h_1^{2N-3} h_2 + \cdots + h_2^{2N-2}],
$$

где $h_k = \zeta_k / |\zeta_k|$, откуда следует неравенство $|B(\rho)/A(\rho)| \le 2N-1$. Однако, в силу леммы 4, имеем

$$
0 \le \frac{A(\rho)}{B(\rho)} < \frac{1}{2N-1}. \tag{30}
$$

Полученное противоречие доказывает инъективность отображения $W(\zeta)$ на окружности $|\zeta| \equiv \rho$.

Второе утверждение леммы вытекает из (27). □

Лемма 6. *Якобиан отображения $W(\zeta)$, определенного (26), отрицателен при $\zeta \neq 0$.*

Доказательство. Непосредственные вычисления дают

$$
\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = (2N-1)A'A - B'B + \Big((2N-1)AB' - A'B\Big)\cos 2N\theta,
$$

Проверим следующее неравенство, эквивалентное необращению в ноль якобиана

$$\mathcal{R} := \Big((2N-1)A'A - B'B\Big)^2 - \Big((2N-1)AB' - A'B\Big)^2 > 0.$$

Заметим, что

$$\mathcal{R} = \left[(2N-1)^2A^2 - B^2\right] \cdot (A' - B')\,(A' + B')\,,$$

Из (30) следует, что первый множитель отрицателен. Покажем, что произведение двух других множителей отлично от нуля. Имеем,

$$A' + B' = f'' = -2a\rho^{k-2}\Phi_{0,0} - (2c-1)\rho^k\Phi'_{0,0} + \rho^{k+2}\Phi''_{0,0}.$$

Выражая $\Phi''_{0,0}$ из уравнения (14)

$$\rho^2\Phi''_{0,0} = -2a\Phi_{0,0} + 2(c + \frac{\rho^2}{2})\Phi'_{0,0},$$

приходим к следующему равенству

$$A'+B' = \rho^{k-2}(1+\rho^2)\left(-2a\Phi_{0,0} + \rho^2\Phi'_{0,0}\right) = -2\rho^{k-2}(1+\rho^2)\,(a + g(t))\,\Phi_{0,0},$$

где $t = -\frac{\rho^2}{2}$, а функция $g(t)$ определена (20). Используя лемму 3 и положительность $\Phi_{0,0}$ (лемма 1), выводим, что

$$A' + B' > 0. \tag{31}$$

Наконец, исследуем знак множителя $(A-B)'$. Имеем

$$(A-B)' = (f - f'\rho)\frac{k}{\rho^2} = -k\rho^{k-2}\left((k-1)\Phi_{0,0} - \frac{\rho^2\Phi'_{0,0}}{2}\right) < 0, \tag{32}$$

так как $k > 1$, и, в силу наших предположений, $\Phi'_{0,0} < 0$, $\Phi_{0,0} > 0$ при $a < 0$. Таким образом, $\mathcal{R} > 0$, откуда следует, что якобиан отображения W имеет постоянный знак.

В силу непрерывности якобиана, он сохраняет свой знак всюду в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Найдем значение якобиана при $\theta = 0$ и $\rho > 0$:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}(\rho, 0) = \left((2N-1)\frac{A}{B} - 1\right)(A' + B')B.$$

Произведение множителей ввиду (30), (31) и леммы 4 отрицателено и утверждение доказано полностью. □

5. Доказательство теоремы 1

5.1. Заметим сначала, что отображение $W(\zeta)$, имеющего вид (26) в полярных координатах (ρ, θ), является гомеоморфизмом плоскости на себя. С этой целью напомним, что в силу леммы 5, данное отображение непрерывно, инъективно на окружностях $|\zeta| = \rho$ и переводит их в замкнутые жордановые кривые C_ρ не проходящие через начало координат.

Принимая во внимания, что якобиан отличен от нуля во всех точках C_ρ, заключаем, что отображение $W(\xi, \eta)$ является инъективным и в некоторой окрестности кривой C_ρ. Таким образом, для каждого $\rho > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\rho) > 0$ такое, что $W(\xi, \eta)$ инъективно в кольце

$$\{\zeta : \rho - \epsilon < |\zeta| < \rho + \epsilon\},$$

что доказывает инъективность отображения $W(\zeta)$ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Наконец, $W(0) = 0$, откуда $W(\zeta)$ глобально инъективно.

Сюръективность $W(\zeta)$ на $\mathbb{C}$ легко следует из того, что $W(0) = 0$, $W(\zeta)$ непрерывно, и справедливости следующей оценки

$$|W(\zeta)| \geq B(|\zeta|) - A(|\zeta|) = \frac{kf(|\zeta|)}{|\zeta|} = k\rho^{k-1}\Phi_{0,0}(-\frac{|\zeta|^2}{2}) \geq k|\zeta|^{k-1},$$

где в последнем неравенстве использовался тот факт, что $\Phi_{0,0} \geq 1$ (первое неравенство в (19)).

5.2. Таким образом, представление (4) задает вещественно аналитическое, вообще говоря, пока вне начала координат, *однозначное* решение $u_N(x, y)$ уравнения (1).

Докажем регулярность полученного решения в окрестности начала координат. Используя комплексную форму (5), находим при $N \geq 2$

$$\begin{aligned} z^N \equiv (x+iy)^N &= e^{-iN\theta}(B(\rho) + A(\rho)e^{2iN\theta})^N = \\ &= \sum_{j=0}^{N} C_N^j B^{N-j}(\rho) A^j(\rho) e^{(2j-1)iN\theta}, \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{Re} z^N = \cos N\theta \sum_{j=0}^{N} C_N^j B^{N-j} A^j S_j(\cos^2 N\theta), \tag{33}$$

где

$$\cos(2j-1)\tau = S_j(\cos^2\tau)\cos\tau, \tag{34}$$

и S_j многочлен степени не выше $|j-1|$.

С другой стороны, из (29) вытекает, что

$$B^{N-j}A^jS_j(\cos^2 N\theta) = \rho^{N/(N-1)}\rho^{2j}S_j(\cos^2 N\theta)\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_{j,\nu}.\rho^{2\nu}.$$

Таким образом, из (33) получаем

$$\operatorname{Re} z^N = \rho^{N/(N-1)}\cos N\theta\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho^{2\nu}T_\nu,$$

где

$$T_\nu = \sum_{j=0}^{N}C_N^j\gamma_{j,\nu}\rho^{2j}S_j(\cos^2 N\theta) = \widetilde{T}_\nu(\xi,\eta)$$

некоторый многочлен относительно степени не выше $N-1$.

Аналогично находим

$$u_N(z) = \rho^{N/(N-1)}\cos N\theta\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu\rho^{2\nu},$$

откуда следует справедливость разложения

$$u_N(z) = \operatorname{Re} z^N\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho^{2\nu}P_\nu(\xi,\eta), \tag{35}$$

Наконец,

$$|z|^2 = A^2 + 2AB\cos 2N\theta + B^2 = \rho^{2/(N-1)}(1+O^*(\rho^2)),$$

откуда

$$|z| = \rho^{1/(N-1)}(1+O^*(\rho^2)).$$

Таким образом, получаем при малых значениях ρ:

$$u_N(z) = \operatorname{Re} z^N + O(|z|^{3N-1}), \quad z = x+iy.$$

Последнее соотношение доказывает что u_N является C^N-регулярной в окрестности начала координат. В частности, ввиду $N\geq 2$, полученное решение u_N принадлежит классу C^2.

Лемма 7. *Многочлены $S_j(cos^2\tau)$, определяемые (34), удовлетворяют реккурентной формуле*

$$S_{j+1}(t) = 2(2t-1)S_j(t) - S_{j-1}(t),$$

и

$$S_j(0) = (-1)^{j-1}(2j-1).$$

Доказательство. Рассмотрим соотношение

$$S_{j+1} + S_{j-1} = \frac{\cos(2j+1)\tau + \cos(2j-3)\tau}{\cos\tau} = 2\cos 2\tau \frac{\cos(2j-1)\tau}{\cos\tau}.$$

Учитывая, что $\cos 2\tau = 2\cos^2\tau - 1$, и обозначая $t = \cos^2\tau$, приходим к требуемому.

Справедливость второй части утверждения следует из реккурентного соотношения. □

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем положительность функции

$$U_N(z) := \frac{u_N(z)}{\operatorname{Re} z^N} = \frac{(f'\rho - f)}{Q} = \frac{\rho[B + (2N-1)A]}{NQ}. \tag{36}$$

где

$$Q = \sum_{j=0}^{N} C_N^j B^{N-j} A^j S_j(\cos^2 N\theta)$$

сумма в правой части (33). Из (32) следует, что знак числителя положителен при $\rho > 0$. Проверим положительность Q.

Рассмотрим отдельно случай, когда $\cos N\theta = 0$, то есть $\theta = \frac{\pi}{2N}(1 + 2m)$, m — целое. Тогда

$$Q_0 = Q\,|_{\cos N\theta = 0} = \sum_{j=0}^{N} C_N^j B^{N-j} A^j S_j(0),$$

откуда, ввиду леммы 7

$$Q_0 = \sum_{j=0}^{N} C_N^j B^{N-j} A^j (-1)^{j-1}(2j-1) = (B + (2N-1)A)(B-A)^{N-1}.$$

В силу леммы 4 следует $Q_0 > 0$.

В случае $\cos N\theta \neq 0$ имеет место представление $Q = \operatorname{Re}\bar{\mathbb{Q}}$, где

$$\bar{\mathbb{Q}} = \frac{e^{-i\tau}}{\cos\tau}\,(A\,e^{2\tau i} + B)^N, \quad \tau = N\theta. \tag{37}$$

Заметим, что в силу леммы 4

$$\operatorname{Re}(A\,e^{2\tau i} + B) = B + A\cos 2\tau > 0,$$

и, значит, имеет место полярное разложение

$$A\,e^{2\tau i} + B = |A\,e^{2\tau i} + B|\;e^{\alpha i},$$

где $|\alpha| < \pi/2$, причем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A\sin 2\tau}{B + A\cos 2\tau} = \frac{2A\operatorname{tg}\tau}{(A+B) + (B-A)\operatorname{tg}^2\tau},$$

откуда заключаем, что $\operatorname{tg}\tau$ и $\operatorname{tg}\alpha$ имеют один знак.

С другой стороны,

$$\frac{e^{-i\tau}}{\cos\tau}=\frac{1}{|\cos\tau|}\,e^{-i\tau'},$$

где $\operatorname{tg}\tau=\operatorname{tg}\tau'$, и, в силу $\operatorname{Re}(e^{-i\tau}/\cos\tau)=1$, $|\tau'|<\pi/2$. Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\tau'$ имеют один знак. Следовательно, у α и τ' знаки также одинаковы.

Имеем из (37)

$$\bar{\mathbb{Q}}=|\bar{\mathbb{Q}}|\,e^{-i(\tau'-N\alpha)}.$$

Отметим,

$$|\bar{\mathbb{Q}}|=\frac{|A\,e^{2\tau i}+B|^N}{|\cos\tau|}\geq\frac{(B-A)^N}{|\cos\tau|}>0.$$

С другой стороны,

$$|\operatorname{tg}\alpha|=\left|\frac{A\sin 2\tau}{B+\cos 2\tau}\right|\leq\frac{A}{B-A}\leq\frac{1}{2(N-1)},$$

то есть $|\alpha|\leq|\operatorname{tg}\alpha|\leq\frac{1}{2(N-1)}$, а, значит, ввиду сделанного выше замечания о совпадении знаков,

$$|\tau'-N\alpha|=|\,|\tau'|-N|\alpha|\,|\leq\max\{|\tau'|,N|\alpha|\}.$$

В силу $|\tau'|<\pi/2$ и $N|\alpha|<\frac{N}{2(N-1)}\leq 1<\pi/2$, выполнено $|\tau'-N\alpha|<\pi/2$. Откуда следует $Q=|\bar{\mathbb{Q}}|\cos(\tau'-N\alpha)>0$.

Осталось проверить положительность дроби в (36) при $\rho=0$. Имеем из (29) при $\rho\to+0$

$$\rho[B+(2N-1)A]=\frac{N}{N-1}\rho^{N/(N-1)}(1+o(\rho)),$$

и

$$\lim_{\rho\to+0}\frac{Q}{B^N}=1,$$

где последний предел существует равномерно по всем θ. Тем самым, из (29) находим

$$\lim_{\rho\to+0}\frac{Q}{\rho^{N/(N-1)}}=\left(\frac{N}{N-1}\right)^N,$$

откуда ввиду (36)

$$\lim_{\rho\to+0}U_N(z)=\lim_{\rho\to+0}\frac{\rho[B+(2N-1)A]}{NQ}=\frac{1}{N}\left(\frac{N}{N-1}\right)^{1-N}=\frac{(N-1)^{N-1}}{N^N}.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Omega:={U_N}^{-1}=\frac{Q}{\rho\,f'-f}.$$

Отметим, что произведение положительных возрастающих функций дает возрастающую функцию. Представим Ω в следующем виде

$$\Omega = \frac{N\,B^N}{\rho(B+(2N-1)A)} \sum_{j=0}^{N} C_N^j \left(\frac{A}{B}\right)^j S_j(\cos^2 N\theta),$$

где множители $\Omega_1 := \frac{B^N}{\rho(B+(2N-1)A)}$ и $\sum\limits_{j=0}^{N} C_N^j \left(\frac{A}{B}\right)^j S_j$ положительны, и второй возрастает по ρ в силу леммы 4 как сумма возрастающих функций. Тогда возрастание функции Ω, а, следовательно, и убывание U_N, эквивалентно возрастанию функции Ω_1.

Непосредственное вычисление производной дает

$$\Omega_1' = \frac{B^N}{(k-1)\rho^2(B+(2N-1)A)^2} \left(\frac{2k}{k-1} t\Phi''\Phi[-a-g(t)] - \frac{k(k+1)^2}{k-1} t\Phi'^2\right),$$

где $t = -\rho^2/2$, а функция $g(t)$ определена соотношением (20). В силу лемм 1 и 3 заключаем о положительности производной Ω_1', что и завершает доказательство теоремы 2. $\square$

6. Оценка роста на бесконечности

Покажем, что для решения u_N справедлива приведенная в теореме 1 оценка роста на бесконечности (3).

Для этого найдем экстремумы функции u_N на окружности фиксированного радиуса $x^2+y^2=R^2$. Найдем стационарные точки функции Лагранжа

$$L = (f-\rho f')\cos N\theta - \lambda(A^2+B^2+2AB\cos 2N\theta - R^2)$$

из условия $\nabla L = 0$. Обращение в нуль полного дифференциала с учетом вида функции эквивалентно системе

$$\begin{aligned} N\sin N\theta \cdot [(f-\rho f') + 8\lambda AB\cos N\theta] &= 0, \\ \rho f''\cos N\theta + 2\lambda[A'A + B'B + (A'B+AB')\cos 2N\theta] &= 0, \\ A^2+B^2+2AB\cos 2N\theta &= R^2. \end{aligned} \tag{38}$$

Докажем, что в первом уравнении множитель $[(f-\rho f') + 8\lambda AB\cos N\theta]$ не равен нулю. С этой целью предположим противное и, выражая λ из полученного равенства, применяя его к второй строке (38), приходим к уравнению

$$\rho f''\cos N\theta + \frac{\rho f' - f}{4AB\cos N\theta}[A'A + B'B + (A'B+AB')\cos 2N\theta] = 0,$$

что равносильно

$$-4\rho AB\cos^2 N\theta + (f-\rho f')[(B'-A')(B-A) - 2(A'B+AB')\cos^2 N\theta] = 0.$$

Дальнейшие преобразования, с учетом соотношений

$$A + B = f', \quad A' + B' = f'', \quad f = \frac{\rho}{k}(B - A),$$

приводят к равенству

$$-\frac{\rho(B-A)}{k}\left[\Big(k'B'A - A'B\Big)2\cos^2 N\theta - (B'-A')\Big(B + k'A\Big)\right] = 0,$$

где $k' = (k+1)/(k-1) = 2N - 1$.

Поскольку $(B' - A')[(k-1)B + (1+k)A] > 0$, то для доказательства несовместности системы достаточно показать, что

$$(B'-A')\Big((k-1)B + (1+k)A\Big) - 2\Big((1+k)B'A - (k-1)A'B\Big) < 0.$$

Последнее неравенство следует из следующего представления

$$\begin{aligned}(B'-A')\Big((k-1)B + (1+k)A\Big) - 2\Big((1+k)B'A - (k-1)A'B\Big) = \\ = (k+1)B(A'+B')[\tfrac{A}{B} - \tfrac{1}{k'}],\end{aligned}$$

того факта, что $k' = 2N - 1$ и леммы 4.

Напротив, обращение в нуль $\sin N\theta$ позволяет определить критические значения θ. Отметим, что, с одной стороны, дальнейшее отыскание из системы (38) значений ρ и λ возможно, но упирается в задачу нахождения функции, обратной функции Куммера. А с другой стороны, прообразы окружностей $x^2 + y^2 = R^2$ при отображении W — компакты и множество точек экстремума содержится в множестве $\{(\rho, \theta)$ таких, что $\theta = \frac{\pi}{N}m,\ m \in \mathbb{Z}\}$. Отсюда следует, что решение u_N на фиксированной окружности может иметь лишь конечное число максимумов и минимумов.

Заметим, что на лучах $\theta = \frac{\pi}{N}m$ справедливы равенства

$$|u_N(\rho,\theta)| = |F(\rho)| \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = (A+B)^2.$$

Используя представление $A(\rho)$, $B(\rho)$, $F(\rho)$ и асимптотическое разложение функции Куммера на бесконечности (22), получим следующие оценки

$$\begin{aligned} A + B = &\quad k^2\, \tfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} \cdot 2^a\, \rho^{\frac{2N-1}{(N-1)^2}} \cdot (1 + O(\tfrac{1}{\rho^2})), \\ |F(\rho)| = &\quad (k^2-1)\, 2^a\, \tfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}\, \rho^{\frac{N^2}{(N-1)^2}}\, (1 + O(\tfrac{1}{\rho^2})), \end{aligned}$$

из которых следует справедливость (3). Причем,

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{|u_N|}{(x^2+y^2)^{\alpha_N/2}} = \frac{1}{\alpha_N}\left[\frac{\Gamma[(k^2+k+2)/2]}{\Gamma[k+1]}\,\frac{2^{(k^2-k)/2}}{k^2}\right]^{1-\alpha_N} \neq 0.$$

Таким образом, все утверждения теоремы 1 доказаны.

Список литературы

[1] *Aronsson G.* On the partial differential equation $u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_y^2 = 0$, Ark. Mat. 69(1968), 395–425.

[2] *Aronsson G.* On certain singular solutions of the partial differential equation $u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_y^2 = 0$, Manuscripta Math., 47(1984), 133–151.

[3] *Aronsson G.* Construction of singular solutions to the p-harmonic equation and its limit equation for $p = \infty$, Manuscripta Math., 56(1986), 135–158.

[4] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.:Наука, 1965.

[5] *Buchholz, H.* The Confluent Hypergeometric Function with Special Emphasis on its Applications. New York: Springer-Verlag, 1969.

[6] *Д. Гилбарг, Н. Трудингер.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.:Наука, 1989.

[7] *Р. Курант, Д. Гильберт.* Методы математической физики. Том 2. ОГИЗ, М. 1945.

[8] *В.М. Миклюков.* Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальных поверхностей. Матем. сб., т.108, вып.2, 1979, с.263-289.

[9] *Simon L.* Asymptotics for exterior solutions of quasilinear elliptic equations // Geometry from Pac. Rim., Berlin - New York, de Gruyter, 1997. P. 343-362.

[10] *Безбородов П.А.* Контрпример к гипотезе Саймона // Тезисы Трудов Международной конференции по анализу и геометрии, Новосибирск, 30 авг.–3 сент. 1999. Новосибирск, Изд-во ИМ СО РАН. 1999, С. 10-11.

[11] Tkachev V.G., Algebraic structure of γ-harmonic functions // J. Math. Anal. Appl. (в печати)

Волгоградский государственный университет, пр-т Университетский, д.100, г.Волгоград, 400062, Россия

Volgograd State University, pr-t Universitetskii, Volgograd, 400062, Russia

E-mail address: Irina.Zorina@volsu.ru

Волгоградский государственный университет, пр-т Университетский, д.100, г.Волгоград, 400062, Россия

Volgograd State University, pr-t Universitetskii, Volgograd, 400062, Russia

E-mail address: Vladimir.Tkachev@volsu.ru