На правах рукописи

Романова Ирина Андреевна

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Казань

2012

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный университет»

Научный руководитель —	доктор физико-математических наук, доцент *Ткачев Владимир Геннадьевич.*
Научный консультант —	доктор физико-математических наук, доцент *Клячин Алексей Александрович.*
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, доцент *Лобода Александр Васильевич*;
	доктор физико-математических наук, профессор *Авхадиев Фарит Габидинович.*
Ведущая организация —	ФГБУН Институт Математики им. С. Л. Соболева Сибирского Отделения РАН, г. Новосибирск.

Защита состоится 17 мая 2012 года в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, д. 1/37, НИИММ, ауд. 337.

С текстом диссертации можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «   » апреля 2012 г. и размещен на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета — www.ksu.ru.

Учёный секретарь
Совета Д 212.081.10
к.ф.м.-н., доцент Е.К. Липачёв

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию вопроса существования целых решений квазилинейного уравнения специального вида

$$L_{\gamma,\varepsilon}[u] = u_{xx}\left(2\varepsilon + (\gamma+1)\,u_x^2 + (\gamma-1)u_y^2\right) + 4u_{xy}\,u_x u_y + \\ + u_{yy}\left(2\varepsilon + (\gamma+1)\,u_y^2 + (\gamma-1)\,u_x^2\right) = 0, \tag{1}$$

где $|\gamma| \geq 1$, $\varepsilon = 0$, 1 или -1. Рассматриваемый круг задач и используемые методы большей частью принадлежат теории специальных трансцендентных функций, теории функций комплексного переменного и теории уравнений в частных производных.

Актуальность темы. Степень разработанности проблемы. Многие задачи анализа и геометрии «в целом» приводят к квазилинейным уравнениям, которые обладают квадратичной нелинейностью по отношению к первым производным. Особое место в изучении решений таких уравнений занимают так называемые *глобальные (целые) решения* или решения с минимальным набором особых точек. Данный класс решений, в том случае если он не пуст, описывает внутренний характер соответствующего уравнения, а также его симметричные и структурные свойства.

Задача о тривиальности целых решений квазилинейных уравнений в частных производных имеет обширную историю и фактически является одной из классических задач. Хорошо известная теорема С. Н. Бернштейна[1] утверждает, что целыми решениями уравнения минимальных поверхностей

$$(1+u_y^2)\,u_{xx} - 2u_x u_y\,u_{xy} + (1+u_x^2)\,u_{yy} = 0$$

будут только линейные функции $u(x,y) = a\,x + b\,y + c$ (здесь a, b, c — произвольные числа).

Глубокие обобщения данного феномена как для многомерного случая, так и для более широкого класса квазилинейных уравнений были получены в 60—80-е гг. О. А. Ладыженской, В. М. Миклюковым, Дж.Дж. Ниче, Л. Саймоном, Дж. Серрином, Дж. Симонсом, Р. Финном и многими

[1] Bernstein S.N. Sur un théorème de géometrie et ses application aux équations aux dérivées partielles du type elliptiqe / S. N. Bernstein // Comm. Soc. Math. Kharkov. 1915. N 15. P. 38—45.

другими математиками. Подробную библиографию по данному вопросу можно найти, например, в работе В. М. Миклюкова[2].

Тем не менее, в недавнем обзоре по целым решениям[3] показано, что основную трудность исследований составляют как проблема унификации методов для различных классов эллиптических уравнений, так и слабая изученность вопросов строения целых решений в тех случаях, когда они существуют. При этом особый интерес представляют уравнения, не являющиеся обобщением уравнения минимальных поверхностей (так называемый «неклассический случай»), для исследования которых требуется разработка новых и переосмысление известных методов.

В том же обзоре Л. Саймон приводит пример довольно широкого класса уравнений *вариационного типа*[4], для которых выполняется свойство Бернштейна. Данный класс, с одной стороны, содержит уравнение минимальных поверхностей как частный случай, а с другой стороны, включает и уравнения, не относящиеся к уравнениям типа минимальных поверхностей.

Другой пример «неклассического» уравнения был исследован Г. Аронссоном в рамках проблемы продолжения липшицевых функций. В 1964 г. он показал, что уравнение

$$u_x^2 u_{xx} + 2u_{xy}u_x u_y + u_y^2 u_{yy} = 0$$

обладает, в терминологии работы Саймона, *свойством Бернштейна*, т.е. его C^2-гладкие решения — линейные функции[5]. Однако позже, в 1984 г., для того же уравнения Г. Аронссон получает дискретное семейство нетривиальных квазирадиальных решений, имеющих гельдерову особенность в начале координат[6], то есть решений класса $C^{1,\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$.

---

[2] Миклюков, В.М. Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальных поверхностей / В.М. Миклюков // Матем. сб. Т. 108(150):2. 1979. С. 263—289.

[3] Simon L., Asymptotics for exterior solutions of quasilinear elliptic equations/ L. Simon // Geometry from Pac. Rim. — Berlin ; New York: de Gruyter. 1997. P. 343—362.

[4] Термин взят из упомянутого обзора Л. Саймона.

[5] Aronsson, G. On the partial differential equation $u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_x u_y + u_{yy}u_y^2 = 0$/ G. Aronsson// Ark. Mat. 1968. N 69. P. 395—425.

[6] Aronsson, G. On certain singular solutions of the partial differential equation $u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_x u_y + u_{yy}u_y^2 = 0$/G. Aronsson// Manuscripta Math. 1984. N 47. P. 133—151.

Применяя тот же метод для исследования уравнения

$$u_{xx}[(\gamma+1)u_x^2+(\gamma-1)u_y^2]+4u_{xy}u_xu_y+u_{yy}[(\gamma+1)u_y^2+(\gamma-1)u_x^2]=0, \quad (2)$$

где $|\gamma|>1$, Аронссон также установил наличие нелинейных целых решений вида $u=r^{k_N}f_N(\theta)$ в полярных координатах для некоторой 2π-периодической функции $f_N(\theta)$, где N — произвольное натуральное число.

Однако полученное им параметрическое представление решений имеет сложный и неявный характер, а нахождение явного вида функции $f_N(\theta)$ даже при $N=2$ вызывает значительные трудности.

Используя альтернативный подход к исследованию уравнения (2), В. Г. Ткачев получил явный вид квазирадиальных N-решений в форме специальной алгебраической параметризации[7]:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= C|\zeta|^{k(2N-1)-N}\cdot \mathrm{Re}\zeta^N, \\ x+iy &= \mu\zeta|\zeta|^{2(N-1)}+\bar{\zeta}^{2N-1}, \quad \zeta\in\mathbb{C}. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\zeta}$ означает комплексное сопряжение, $k=k(N,\gamma)$ – наибольший корень уравнения

$$(2N-1)(\gamma+1)k^2-2(N^2\gamma+2N-1)k+N^2(1+\gamma)=0, \quad N\in\mathbf{N},$$

и $\mu=\mu(N,\gamma)$ — некоторый параметр, зависящий от N и γ. Как следствие доказано, что особенности квазирадиальных решений имеют алгебраический характер (что уточняет хорошо известный гельдеров характер особенностей p-гармонических функций). Кроме того, описаны все значения γ, при которых уравнение (2) допускает нетривиальные (т.е. отличные от линейных) алгебраические N-решения и доказана конечность множества соответствующих индексов N при каждом фиксированном $|\gamma|>1$. При $\gamma=1$ доказано, что все N-решения – алгебраические функции.

Целью работы является исследование вопроса существования целых решений квазилинейного уравнения (1) при условии эллиптичности типа уравнения и его неоднородности, а также исследование свойств полученных решений.

[7] Tkachev, V.G. Algebraic structure of γ-harmonic functions/V.G. Tkachev// Pacific Journal Math. 2006. N 1. V. 226. P. 179—200.

Методы исследования относятся к методам теории специальных трансцендентных функций, комплексного анализа, уравнений в частных производных, дифференциальной геометрии. В частности, применяются методы, развитые в недавних работах Г. Аронссона, В. А. Клячина, В. М. Миклюкова, Л. Саймона, В. Г. Ткачева, С. Т. Яу.

Научная новизна и практическая значимость. Проблема существования нетривиальных целых решений широко исследована для уравнений нулевой средней кривизны и уравнений типа минимальных поверхностей. Среди уравнений других типов этот вопрос изучен не так детально, что связано преимущественно с отсутствием наработанных методов. В связи с этим проблема Бернштейна для исследуемого уравнения особенно интересна, тем более что оно является обобщением как уравнения минимальных поверхностей, так и уравнения (2): у первого все целые решения линейны, а второе имеет счетное семейство нетривиальных решений.

Диссертация носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы в научных коллективах, занимающихся изучением решений эллиптических дифференциальных уравнений, приложениями теории специальных трансцендентных функций, а также может найти применение в специальных курсах по математическому анализу.

Основные результаты исследования, выносимые на защиту:

1. Получено явное параметрическое представление семейства решений уравнения (1) в терминах гипергеометрической функции Гаусса при $|\gamma| > 1$ и в терминах вырожденной гипергеометрической функции при $\gamma = 1$.

2. Показано, что построенные решения уравнения (1) являются C^2-гладкими целыми функциями, а это означает невыполнение свойства Бернштейна.

3. Исследовано поведение построенных решений на бесконечности, в частности, установлен степенной характер роста.

4. Выявлена структурная связь между полученными решениями и гармоническими полиномами.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из трех глав и библиографического списка из 31 наименования. Объем диссертации 95 страниц.

Апробация работы. Основные результаты исследования докладывались на российских и международных конференциях: X международной Казанской летней научной школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (2011 г.), семинаре-совещании «Сети в анизотропных пространствах» (Волгоград, 21—23 апреля 2011 г.), VIII международной Казанской летней научной школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (2007 г.), VII международной Казанской летней научной школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (2005 г.), Международной школе-конференции по Анализу и Геометрии (Новосибирск, 2004 г.), Международной конференции «Алгебра и Анализ 2004» (Казань, 2004 г.), Международной школе-конференции «Геометрический анализ и его приложения» (Волгоград, 2004 г.), а также на научных конференциях молодых ученых Волгоградской области (2002–2005 гг.) и конференциях профессорско-преподавательского состава ВолГУ (2002–2006 гг.).

Кроме того, все результаты докладывались в разное время на научном семинаре «Геометрический анализ и его приложения» кафедры МАТФ ВолГУ (рук. д.ф.-м.н. В.М. Миклюков), на семинаре «Эллиптические дифференциальные уравнения на римановых многообразиях» (рук. д.ф.-м.н. А.Г. Лосев), на семинаре кафедры математического анализа Саратовского государственного университета (рук. д.ф.-м.н. Д.В. Прохоров).

Исследовательская работа «Новые примеры поверхностей нулевой средней кривизны в пространстве Лоренца $\mathbb{R}^4_2$», представленная на XL Международную научную студенческую конференцию «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2002 г.) отмечена дипломом III степени.

Исследования по теме диссертации были поддержаны грантом РФФИ № 03-01-00304, грантом Федерального агентства по образованию для поддержки научно-исследовательской работы аспирантов № А04-2.8-932, грантом математического факультета ВолГУ.

Публикации. Основные научные результаты, включённые в диссертацию, опубликованы в 11 печатных работах автора общим объемом 3,48 п.л. Одна из них опубликована в издании, рекомендованном Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований.

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. В совместных работах [1], [3] и [8] постановка задачи принадлежит научному руководителю В. Г. Ткачеву.

Пользуясь случаем, автор хотел бы выразить глубокую благодарность за полезные обсуждения, замечания и постоянное внимание к работе научному руководителю д.ф.-м.н. В. Г. Ткачеву, а также д.ф.-м.н. А. А. Клячину, д.ф.-м.н. А. Г. Лосеву, д.ф.-м.н. В. М. Миклюкову, к.ф.-м.н. А. Н. Кондрашову и к.ф.-м.н. Е. А. Мазепе.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Все утверждения и определения сохраняют принятую в основном тексте нумерацию. В работе рассматриваются проблема существования целых решений уравнения (1).

Глава 1 «Параметрическое представление решений квазилинейного уравнения». *Первый параграф* данной главы носит вводный характер. Здесь содержатся сведения, которые используются в работе, и напоминаются некоторые понятия теории специальных трансцендентных функций. В частности, дается определение эллиптичности типа квазилинейного уравнения, понятие преобразования Лежандра, определения и некоторые сведения о гипергеометрической функции Гаусса и вырожденной гипергеометрической функции Куммера. Кроме того, в первом параграфе приводятся вспомогательные результаты, касающиеся монотонности гипергеометрических функций и их композиций специального вида, некоторые числовые оценки, а также показано, что требование эллиптичности типа уравнения (1) равносильно условию $\operatorname{sgn}\gamma = \operatorname{sgn}\varepsilon$.

Во *втором параграфе* первой главы излагается метод построения семейства решений уравнения (1) в случае $|\gamma| > 1$. Опишем кратко его суть.

Основная идея метода заключается в переходе от квазилинейного уравнения (1) к линейному уравнению в фазовой плоскости с помощью преобразования Лежандра

$$\xi = u_x(x,y),\ \eta = u_y(x,y), \quad v(\xi,\eta) = x\xi + y\eta - u(x,y).$$

Осуществив переход к фазовой плоскости, мы ищем решение полученного линейного уравнения

$$v_{\xi\xi}\left[2\varepsilon + (\gamma+1)\eta^2 + (\gamma-1)\xi^2\right] - 4\xi\eta v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\left[2\varepsilon + (\gamma+1)\xi^2 + (\gamma-1)\eta^2\right] = 0$$

среди функций специального вида, а именно

$$v(\rho,\phi) = f(\rho)\, h(\phi),$$

где ρ, ϕ — полярные координаты в плоскости (ξ,η).

С помощью непосредственных вычислений убеждаемся, что решение имеет вид

$$v(\rho,\phi) = \rho^k\, F(a,b;c;-\frac{|\gamma-1|}{2}\rho^2)\, \cos k\,\phi,$$

где $k = \frac{N-1}{N}$, а $F(a,b;c;t)$ — гипергеометрическая функция Гаусса с параметрами

$$a = a(\gamma,N), \qquad b = b(\gamma,N), \qquad c = c(N).$$

(Точные формулы для параметров приведены ниже в формулировке Теоремы 1.)

Параметрическое представление решения уравнения (1) получим, учитывая тот факт, что преобразование Лежандра обратно само к себе, т.е. переход от координат касательных плоскостей к координатам точек осуществляется с помощью соотношений

$$x = v_\xi(\xi,\eta), \quad y = v_\eta(\xi,\eta), \quad u = x\xi + y\eta - v(\xi,\eta). \tag{3}$$

При этом необходимо отметить, что преобразование Лежандра (3) задает, вообще говоря, многозначную функцию, поскольку является однозначно определенным лишь локально, т.е. в окрестностях точек с невырожденным якобианом $v_{\xi\xi}v_{\eta\eta} - v_{\xi\eta}^2$ (далее такие точки будем называть *неособыми*). Таким образом, однозначность и глобальность решений уравнения (1), заданных построенным параметрическим представлением, не являются очевидными фактами и требуют доказательства.

Третий параграф первой главы посвящен построению решений предельного случая уравнения (1) — уравнения Саймона

$$u_{xx}(1+u_x^2) + 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}(1+u_y^2) = 0, \tag{4}$$

отвечающего значениям параметров $\gamma = \varepsilon = 1$. В частности, показано, что уравнение (1) является непрерывным по γ в точке $\gamma = 1$ и решение может быть получено предельным переходом $\gamma \to 1+0$ в параметрическом представлении.

Основным результатом первой главы являются следующие утверждения.

Теорема 1.1. *Пусть $|\gamma| > 1$, $N \geq 2$ – произвольное натуральное число, $k = \frac{N}{N-1}$ и $f(\rho) = \rho^k F(a,b;c;-\frac{|\gamma-1|}{2}\rho^2)$, где $F(a,b;c;t)$ — гипергеометрическая функция Гаусса с параметрами*

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}\left(k + \tfrac{1}{\gamma-1} - \tfrac{1}{|\gamma-1|}\sqrt{k^2(\gamma^2-1)+1}\right), \\ b &= \tfrac{1}{2}\left(k + \tfrac{1}{\gamma-1} + \tfrac{1}{|\gamma-1|}\sqrt{k^2(\gamma^2-1)+1}\right), \\ c &= k+1. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда параметрическое представление

$$\begin{aligned} x &= A(\rho)\cos(2N-1)\theta + B(\rho)\cos\theta, \\ y &= A(\rho)\sin(2N-1)\theta - B(\rho)\sin\theta, \\ u_N &= M(\rho)\cos N\theta \end{aligned} \tag{6}$$

задает непрерывную функцию $u_N(x,y)$, являющуюся решением уравнения (1) в окрестности неособых точек (ρ,θ). Здесь

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \tfrac{1}{2}\left(f'(\rho) - \tfrac{k}{\rho}f(\rho)\right), \\ B(\rho) &= \tfrac{1}{2}\left(f'(\rho) + \tfrac{k}{\rho}f(\rho)\right), \\ M(\rho) &= \rho f'(\rho) - f(\rho). \end{aligned} \tag{7}$$

Аналогичный результат справедлив и для предельного случая уравнения (1), соответствующего $\gamma = 1$.

Теорема 1.2. *Пусть* $N \geq 2$ *– произвольное натуральное число,* $k = \frac{N}{N-1}$ *и* $f(\rho) = \rho^k \Phi(a; c; -\frac{\rho^2}{2})$, *где* $\Phi(a; c; -\frac{\rho^2}{2})$ *— вырожденная гипергеометрическая функция Куммера с параметрами*

$$a = \frac{k - k^2}{2}, \qquad c = k + 1.$$

Тогда параметризация (6)—(7) задает непрерывную функцию $u_N(x, y)$, *являющуюся решением уравнения (4) в окрестности неособых точек* (ρ, θ).

Определение 1.5. *Решения уравнения (1) в форме (5) — (7) будем называть* N*-решениями.*

Аналогичный термин будем применять и для решений уравнения (4).

Результаты первой главы опубликованы в работах [3], [7], [8], [9].

Глава 2 «Существование целых решений». Данная глава посвящена доказательству того факта, что построенные в первой главе решения уравнения (1) являются C^2-гладкими целыми функциями аргументов x и y.

Отметим, что в этой и следующей главах предельный случай $\gamma = 1$ отдельно не рассматривается, а полученные результаты справедливы в силу непрерывности параметризации N-решений по параметру γ.

При доказательстве основных результатов второй главы существенную роль играет исследование поведения отображения специального вида.

Определение 2.1. *Отображение*

$$W = (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)),$$

где $x(\rho, \theta)$, $y(\rho, \theta)$ *заданы (6), будем называть* ***градиентным****.*

Выпишем явно параметрическое представление градиентного отображения. Получим

$$W : \begin{cases} x(\rho, \theta) \;=\; A(\rho)\cos(2N-1)\theta + B(\rho)\cos\theta, \\ y(\rho, \theta) \;=\; A(\rho)\sin(2N-1)\theta - B(\rho)\sin\theta, \end{cases} \tag{8}$$

где $A(\rho)$, $B(\rho)$ заданы соотношениями

$$A(\rho) = \frac{1}{2}\left(f'(\rho) - \frac{k}{\rho}f(\rho)\right), \quad B(\rho) = \frac{1}{2}\left(f'(\rho) + \frac{k}{\rho}f(\rho)\right),$$

и

$$f(\rho) = \rho^k F(a, b; c; -\frac{|\gamma - 1|}{2}\rho^2),$$

а параметры a, b, c заданы соотношениями (5).

Для функциональных коэффициентов $A(\rho)$ и $B(\rho)$ градиентного отображения W справедливы следующие утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть* $|\gamma| > 1$, $k = N/(N-1)$ *и* N *— натуральное число,* $N \geq 2$. *Пусть также параметры* a, b, c *удовлетворяют (5), а* $A(\rho)$ *и* $B(\rho)$ *определены равенствами (7). Тогда*

(i) функция $\frac{A(\rho)}{B(\rho)}$ *положительна, возрастает при* $\gamma > 1$ *(или отрицательна и убывает при* $\gamma < -1$*), и имеет место соотношение*

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{A(\rho)}{B(\rho)} = \frac{-a}{-a+k};$$

(ii) функция $B(\rho)$ *положительна при всех* $\rho > 0$, *а* $A(\rho)$ *сохраняет знак, причем* $\operatorname{sgn} A(\rho) = \operatorname{sgn} \gamma$.

Лемма 2.2. *Пусть* $|\gamma| > 1$, $k = N/(N-1)$, $N \geq 2$ *— натуральное число. Пусть также параметры* a, b, c *удовлетворяют (5), а* $A(\rho)$ *и* $B(\rho)$ *определены равенствами (7). Тогда для любого* $\rho \geq 0$ *справедливы неравенства*

(i) $\left|\frac{A(\rho)}{B(\rho)}\right| \leqslant \frac{1}{2N-1}$;

(ii) $B \geq |A| \geq 0, \quad B' \geq |A'| \geq 0,$

причем равенства в неравенствах пункта (ii) достигаются только при $\rho = 0$.

Опираясь на эти леммы, получим следующие свойства градиентного отображения.

Лемма 2.3. *Градиентное отображение W инъективно переводит каждую окружность радиуса $\rho > 0$ в жорданову кривую, не проходящую через начало координат.*

Лемма 2.4. *Якобиан градиентного отображения $W(\zeta)$ отрицателен при $\zeta \neq 0$.*

Две последние леммы позволяют установить инъективность градиентного отображения, т.е. доказать, что полученные N-решения определяют графики.

Проводя при допустимых γ оценку $|W|$ с учетом свойств $A(\rho)$ и $B(\rho)$, можно установить, что

$$|W|^2 \geq |B| - |A| \geq C\rho^{k-1-a(1-\varepsilon)},$$

где C — некоторая ненулевая постоянная, $\varepsilon = \mathrm{sgn}\gamma$ и $k - 1 - a(1-\varepsilon) > 0$. Отсюда следует сюръективный характер отображения W, а значит, будет справедлива теорема.

Теорема 2.1. *Градиентное отображение $W(\zeta)$, заданное формулами (8), является гомеоморфизмом плоскости на себя.*

Таким образом, теперь можно утверждать, что N-решения являются целыми непрерывными однозначными функциями. Чтобы оценить их гладкость, достаточно проверить существование и непрерывность производных в начале координат, поскольку вне этой особой точки параметризация (5) – (7) задает аналитическую функцию. Непосредственными вычислениями можно установить, что построенные функции u_N являются C^2-гладкими в начале координат.

Таким образом, N-решения уравнения (1) являются нетривиальными целыми функциями, т.е. для исследуемого уравнения не выполнено свойство Бернштейна.

Основным результатом второй главы является теорема.

Теорема 2.2. *Пусть $|\gamma| \geqslant 1$, $\gamma \neq -1$ и $\varepsilon = \mathrm{sgn}\,\gamma$. Для любого натурального N существует целое C^2-гладкое решение $u_N(x,y)$ уравнения*

$$\begin{gathered}u_{xx}\left(2\varepsilon + (\gamma+1)\,u_x^2 + (\gamma-1)u_y^2\right) + 4u_{xy}\,u_x u_y + \\ +u_{yy}\left(2\varepsilon + (\gamma+1)\,u_y^2 + (\gamma-1)\,u_x^2\right) = 0,\end{gathered}$$

которое имеет на бесконечности степенной рост

$$\varlimsup_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{u_N(x,y)}{(x^2+y^2)^{\alpha_{N,\gamma}/2}} = C, \quad C \neq 0,$$

и

$$\alpha_{N,\gamma} = 1 + \frac{(N-1)\,|\gamma-1|}{\sqrt{N^2(\gamma^2-1)+(N-1)^2} - (N-1)|\gamma|}\,, \qquad |\gamma|>1,$$

$$\alpha_{N,1} = \frac{N^2}{2N-1}.$$

Отметим, что в формулировку теоремы также включен случай $N = 1$, соответствующий тривиальным решениям и не рассматривавшийся самостоятельно.

Оценка роста решения на бесконечности получена классическими средствами математического анализа. Отметим также, что постоянная C в формулировке теоремы определяется соотношением

$$\varlimsup_{(x^2+y^2)\to\infty} \frac{u_N(x,y)}{(x^2+y^2)^{\alpha_N/2}} = \alpha_{N,\gamma}\cdot\left[\frac{|\gamma-1|^a}{2^a\,(\alpha_{N,\gamma}-1)}\cdot\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(a-c)}{\Gamma(c)\,\Gamma(a-b)}\right]^{\alpha_{N,\gamma}-1}.$$

Результаты главы 2 опубликованы в работах [1], [6].

Глава 3 «Связь N-решений и гармонических полиномов». Данная глава посвящена изучению структурной связи гармонических полиномов и N-решений.

Отметим, что гармонические многочлены вида

$$\operatorname{Re}(x+iy)^N$$

формально являются N-решениями уравнения (1) для несобственного значения параметра $\gamma = \infty$. В этом легко убедиться, воспользовавшись представлением уравнения (1) в операторном виде

$$\varepsilon\,\Delta u + \frac{1}{(p-2)\,|\nabla u|^{p-4}}\Delta_p u = 0,$$

где $p = \frac{2\gamma}{\gamma-1}$.

Для исследования связи между гармоническим многочленом и N-решением рассмотрим вспомогательную функцию

$$Q = \frac{\operatorname{Re} z^N}{\cos\tau} \tag{9}$$

и исследуем ее поведение на кривых специального вида.

Определение 3.1. *Пусть отображение* $W : (\rho,\theta) \to (x,y)$ *задается формулой (8). Множество*

$$A^2(\rho) + B^2(\rho) + 2A(\rho)B(\rho)\cos 2N\theta = R^2 \tag{10}$$

будем называть ***окружностью в фазовой плоскости*** *радиуса* R.

Во-первых, будет справедлива следующая лемма.

Лемма 3.2. *Функция* Q, *определенная соотношением (9), положительна при* $\rho > 0$.

Во-вторых, функция Q удовлетворяет неравенствам

$$Q_0 \le Q \le Q_{\frac{\pi}{2}}, \quad \text{при } \gamma > 1; \qquad Q_{\frac{\pi}{2}} \le Q \le Q_0, \quad \text{при } \gamma < -1,$$

где Q_0 и $Q_{\frac{\pi}{2}}$ — значения Q в точках на окружностях фазовой плоскости радиуса R, в которых $\tau = 0$ и $\tau = \pi/2$.

Опираясь на последнюю оценку, можно доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть* $|\gamma| > 1$ *и* $\varepsilon = \mathrm{sgn}\gamma$, $N \ge 2$ *— произвольное натуральное число, а* $u_N(z) = u_N(x,y)$ *— решение уравнения (1), задаваемое параметризацией (5)—(7).*

Тогда имеет место разложение

$$u_N(z) = U_N(z)\mathrm{Re}z^N, \tag{11}$$

где $U_N(z)$ *— некоторая положительная непрерывная функция, причем,* $U_N(z)$ *ограничена сверху при* $\gamma > 1$:

$$0 < U_N(z) \le U_N(0) = \frac{(N-1)^{N-1}}{N^N}. \tag{12}$$

При $\gamma < -1$ *эта функция удовлетворяет неравенству*

$$U_N(z) \ge U_N(0). \tag{13}$$

Отметим, что в данной теореме подразумевается, что $z = x + iy$ и x, y, u_N определяются параметрическим представлением (5)—(7). Тогда функция U_N может быть представлена в виде

$$U_N = \frac{u_N}{\mathrm{Re}z^N} = \frac{\rho\,[\,B + (2N-1)A]}{N\,Q(\rho,\tau)},$$

что позволяет использовать свойства Q.

Конец третьей главы посвящен применению используемой методики к исследованию уравнений минимальных поверхностей. Было построено счетное семейство функций, имеющих структуру, аналогичную структуре N-решений уравнения (1). Кроме того, показано, что полученные N-решения уравнения минимальных поверхностей заключены в цилиндр, т.е. справедливо неравенство

$$x^2 + y^2 \leq \left(\frac{k^2}{k+1} \cdot 2^k \right)^2 .$$

Результаты третьей главы опубликованы в работах [2], [5], [11].

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК РФ

1. Зорина, И.А. О целых решениях квазилинейных уравнений с квадратичной главной частью/ И.А. Зорина, В.Г. Ткачев // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2008. — № 3. — С. 108—123 (0,94 п.л.).

Публикации в других изданиях

2. Зорина, И.А. О связи целых решений уравнения Саймона и гармонических полиномов / И.А. Зорина // Избранные труды молодых ученых математического факультета ВолГУ, апрель 2005 г. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2006. — С. 16—19 (0,24 п.л.).

3. Зорина, И.А. Целые решения уравнения Саймона / И.А. Зорина, В.Г. Ткачев //Геометрический анализ и его приложения : труды международной школы-конференции, г. Волгоград, 24—30 мая 2004 г. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2005. — С.55—74 (1,17 п.л.).

4. Зорина, И.А. Примеры максимальных периодических поверхностей в R^4_2 / И.А. Зорина // Вестник ВолГУ. Серия 9: исследования молодых ученых. — 2003. — № 1. — С. 17—20 (0,24 п.л.).

5. Романова, И.А. N-решения уравнения минимальных поверхностей / И.А. Романова // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского : материалы X международной Казанской летней научной школы-конференции — Казань : Изд-во Казанского математического общества; Изд-во Казанского государственного университета, 2011. — Т. 43. — С. 308—309 (0,12 п.л.).

6. Зорина, И.А. О целых решениях одного класса квазилинейных уравнений / И.А. Зорина // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского : материалы VIII международной Казанской летней научной школы-конференции — Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2007. — Т. 35. — С. 112—113 (0,12 п.л.).

7. Зорина, И.А. О связи целых решений уравнения Саймона и гармонических полиномов / И.А. Зорина // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского : материалы VII международной Казанской летней научной школы-конференции — Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2005. — Т. 30. — С. 80—81 (0,12 п.л.).

8. Зорина, И.А. Строение целых решений уравнения Саймона / И.А. Зорина, В.Г. Ткачев // Международная школа-конференция по анализу и геометрии, посвященная 75-летию академика Ю. Г. Решетняка. — Новосибирск: Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, 2004. — С. 105—106 (0,12 п.л.).

9. Зорина, И.А. Вырожденная гипергеометрическая функция и решения квазилинейных уравнений / И.А. Зорина // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского : материалы международной конференции — Казань: Издательство Казанского математического общества, 2004. — Т.23 — С.94—95 (0,12 п.л.).

10. Зорина, И.А. Новые примеры поверхностей нулевой средней кривизны в пространстве Лоренца / И.А. Зорина // Материалы XL международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2002. — С. 54—56 (0,17 п.л.).

11. Зорина, И.А. Некоторые максимальные периодические поверхности в пространстве Лоренца / И.А. Зорина // Материалы VII межвузовской конференции студентов и молодых ученых г. Волгограда и Волгоградской

области, г.Волгоград, 12—15 ноября 2002 г. Вып.4: Физика и математика. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2002. — С. 49—50 (0,12 п.л.).