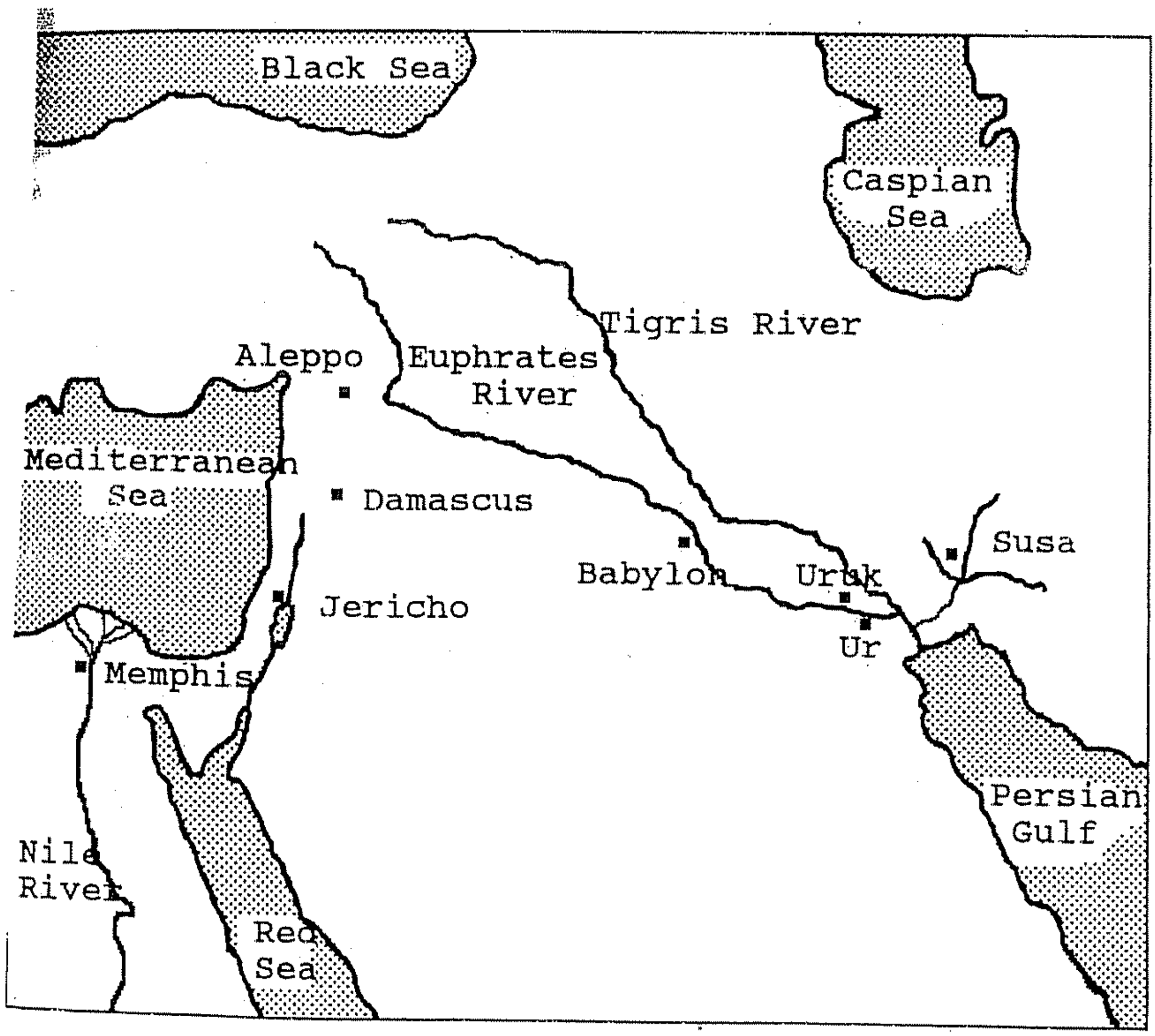
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Universitetslektor Olle Axling
Matematikens Historia HT 2008

Babylonsk, egyptisk och grekisk matematik

Antikens matematik ca 2000 - 200 f.Kr

EGYPTEN OCH BABYLONIEN ca 1800 f. Kr



LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univlektor Olle Axling

SUMERISKA : Världens äldsta skrift

Skriften uppfanns ca 3500 f.Kr i Mesopotamien.

Sumeriska skrevs med KILSKRIFT , som sedan användes i fornpersiska och akkadiska.

Världens äldsta kända författare är ENHEDUANNA dotter till kung Sargon av Akkad ca 2300 f.Kr.

Känd sumeriska skrift är äventyrseposet om konung GILGAMESH.

Det gammelbabylonska riket fick en renässans under konung HAMMURAPI ca 1790 - 1750 f.Kr. Han tillhörde det semitiska folket.

En från Bibeln känd härskare senare i Babylon är NEBUDKANESSAR II 630 - 562 f.Kr.

Han byggde bl.a de hängande trädgårdarna och raserade Jerusalem med templet.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Universitetslektor Olle Axling

TAL MED KILSKRIFT I BAS 60, Sexagesimalt system

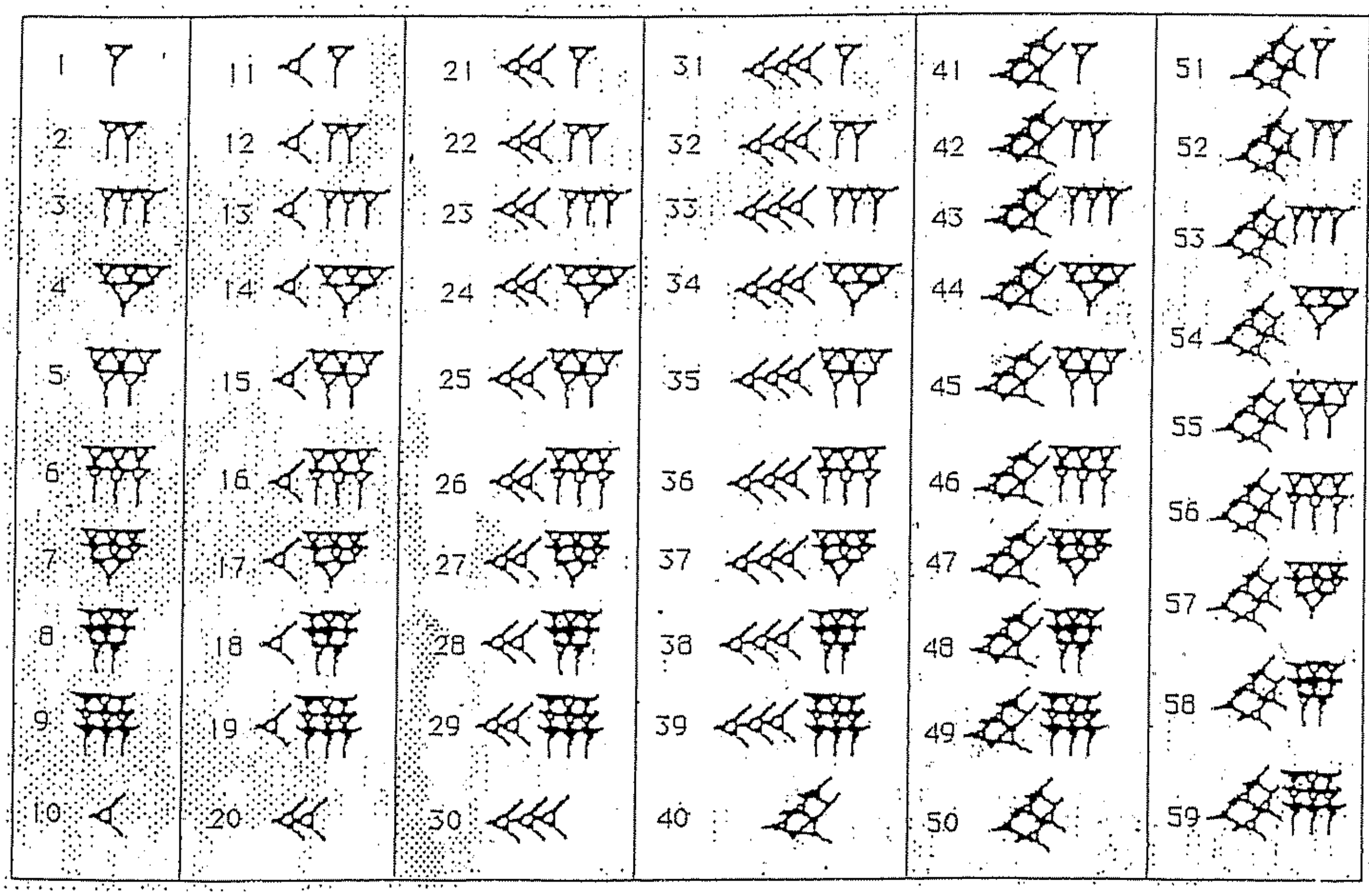
Vi räknar i bas 10 med siffror 1,2,...9 (och 0)

Då behövs 9 siffror. Behövdes 59 i Babylon ?

NEJ ! Man hade två slags kilar:

För EN respektive TIO potenser av 60.

Här har vi talen 1 - 59 i kilskrift :



LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Universitetslektor Olle Axling

POSITIONSSYSTEM med PROBLEM

EN-kilen betecknar en 60-potens vilken som helst.

TIO-kilen betecknar 10 sådana.

Problem ! Hur skrivs 75 , 3615 resp 1.25 ?

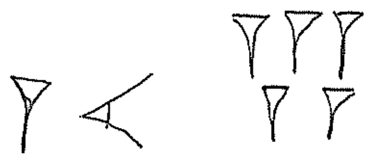
Jo, LIKADANT !

Talen är i bas 60

$$75 = 1 \cdot 60 + 1 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

$$3615 = 1 \cdot 60^2 + 1 \cdot 10 + 5$$

$$1.25 = 1 + 15 \cdot \frac{1}{60}$$



ALLA tre blir lika med kilar

$\frac{1}{60}$ kallades *minuta* = delen

$\frac{1}{60^2}$ kallades *sekunda* = andra delen

Det har vi kvar i TIDMÄTNING och i VINKELMÄTNING

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univ lektor Olle Axling

EXEMPEL : ANDRAGRADSEKVATIONER I BABYLONIEN

KILSKRIFT FRÅN BABYLON Ca -1900 LERTAVLA I YBC

PROBLEM :
LÅT OSS BYGGA EN BOSTAD VARS OMKRETS
ÄR 13 ENHETER OCH MED AREAN 15 / 2.
VAD BLIR DESS UTSTRÄCKNING ?

DEN RETORISKA LÖSNINGEN GER ATT MAN LÖSER PÅ FÖLJANDE SÄTT

I dag sätter vi längd och bredd till x respektive y.

Vi får ekvationerna $2 \cdot (x + y) = 13$ och $xy = \frac{15}{2}$.

Man satte $x = \frac{13}{4} + z$, $y = \frac{13}{4} - z$.

"VAD x VINNER FÖRLORAR y " motiverar man.

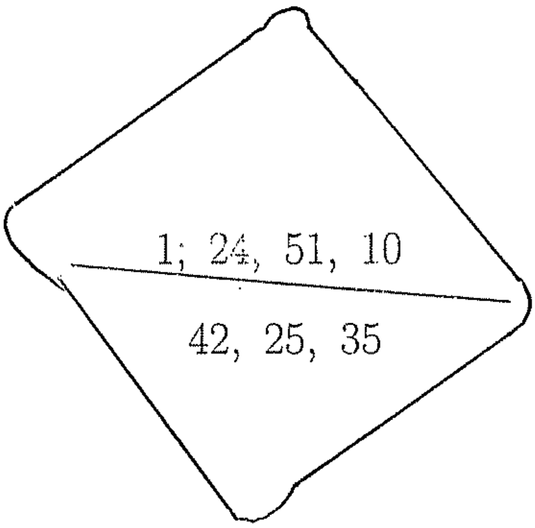
$xy = \frac{15}{2}$ blir $(\frac{13}{4} + z) \cdot (\frac{13}{4} - z) = \frac{15}{2}$ dvs $z^2 = \frac{49}{16}$

$z = \frac{7}{4}$ ger byggnadens mått $x = 5$ och $y = \frac{3}{2}$.

ENBART POSITIVA LÖSNINGAR TAS MED !

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univ lektor Olle Axling

YBC 7289



$$1;24,51,10 = 1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3} \approx 1.414\,21296$$

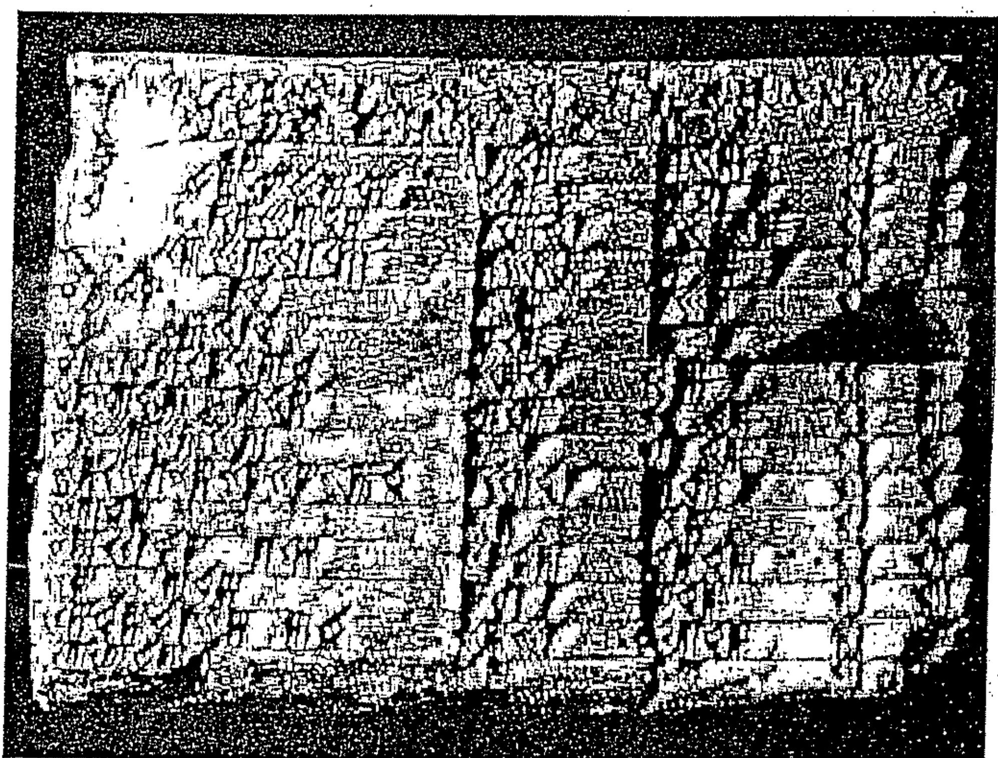
En bra approximation av $\sqrt{2}$!!

$$\sqrt{2} \approx 1.414\,2136$$

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univ lektor Olle Axling

Plimpton 322 från -1900 till -1600 i Babylon

Tavlan kilskriftstecken är ordnade i 15 rader och 4 kolonner och är avbruten till vänster Rubriker till kolonnerna kan tolkas som *bredd, diagonal* och *radnummer*.
Om vi kallar bredden Y och diagonalen för Z och sätter $\sqrt{Z^2 - Y^2} = X$, ger första raden på tavlan (i bas 10) $Y = 119$, $Z = 169$ dvs $X = 120$.



Plimpton 322 innehåller 15 rader av Pytagoreiska tripler sådana att $X^2 + Y^2 = Z^2$.
På 4:e raden står transformerat till bas 10
$Y = 12709$, $Z = 18541$.
Använde man följande
$X = p^2 - q^2$, $Y = 2pq$, $Z = p^2 + q^2$?
Alla tal i Plimpton har ändliga 60-utvecklingar,
dvs p, q, r har bara primtalsfaktorer 2,3,5.
Med $w = \frac{Z}{X}, v = \frac{Y}{X}$ blir ekv $w^2 - v^2 = 1$,dvs
$(w + v) \cdot (w - v) = 1$. Man kunde beräkna $w + v$, finna $w - v$ i inverstabeller. Mult med x ger sedan en Pytagoreisk trippel x, y, z.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Universitetslektor Olle Axling

EGYPTISK MATEMATIK ca 2000 f.Kr

Tre utmärkande drag är

1. Additivt system i bas 10. Sifferhieroglyfer men senare hieratisk skrift.

2. Multiplikationer med dubblingar.

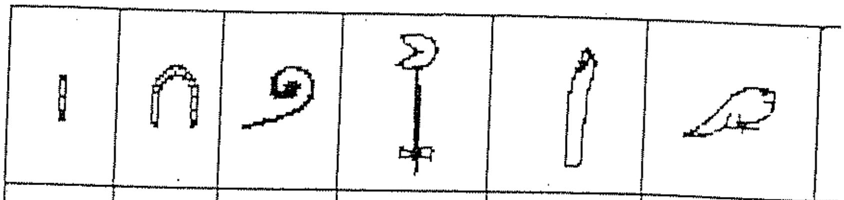
3. Bråkräkning med stambråk, täljaren = 1.

Exempel: I stället för $\frac{2}{5}$ skrevs $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univ lektor Olle Axling

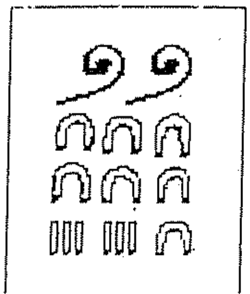
SIFFERHIEROGLYFER

Åsnehov
Ulltott
Lotusblomma
Faraos spira
Grodyngel



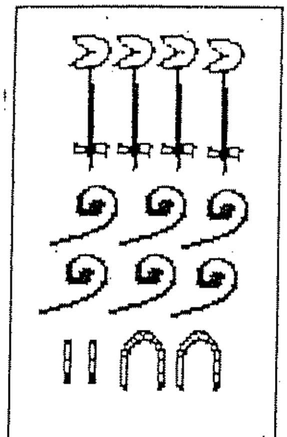
1	10	100	1000	10000	100000

276



276

4622

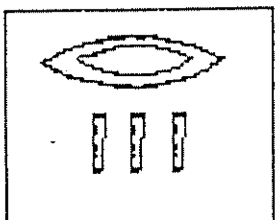


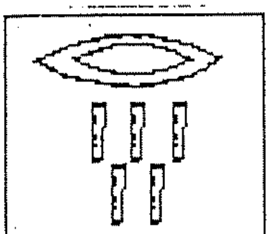
4622

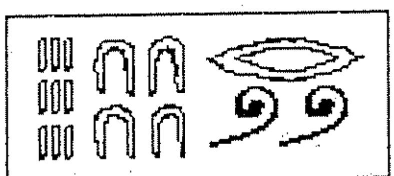
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univ lektor Olle Axling

HIEROGLYFER för BRÅK-Stambråk

Talen skrivs under Heras mun


1/3


1/5


1/249

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Univlektor Olle Axling

RHINDPAPYRUSEN **RMP** FRÅN THEBE

RMP SKREVS AV SKRIVAREN AHMOSE CA -1600 MEN ÄR EN AVSKRIFT FRÅN CA -1900, DVS 12:e DYNASTIEN, KÖPTES FRÅN NÅGRA BARN 1858 AV DEN SKOTSKE JURISTEN HENRY RHIND SOM DONERADE DEN TILL BRITISH MUSEUM.

SKRIVAREN AHMOSE INLEDER ANSPRÅKSLÖST SÅLUNDA :

"Detta är en grundlig genomgång av allting,den ger insikter i allt som existerar och kunskap om alla dunkla hemligheter "

RMP är 5,13 m lång och 32 cm hög. Består av 14 ihoplimmmade ark.

PAPYRUS är ett halvgräs som växte vilt vid NILEN. Av märgen gjordes rullar att skriva på med ett slags tusch. P var dominerande tillsammans med pergament tills araberna ca 800 uppfann papper.

RMP innehåller 87 lösta praktiska problem om administration,byggande mm men ingen teoretisk beskrivning av beräkningarna. Svar ges direkt

RMP är skriven i HIERATISK skrift och med sifferhieroglyfer.

I det gamla EGYPTEN fanns tre skriftspråk (minst).

1. HIEROGLYFERNA , gudarnas gåva av THOT
2. HIERATISK skrift , en förenkling av 1.
3. DEMOTISK skrift -650 utvecklat ur talspråket.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univ lektor Olle Axling

Egyptisk multiplikation

Vi ska räkna ut produkten $21 \cdot 37$ med fördubbling.

Rad Nr	2-potens	Dubbling
1	1*	37
2	2	74
3	4*	148
4	8	296
5	16*	592

Med * markeras de 2-potenser vars summa =21

Alltså $21 \cdot 37 = 37+148+592= 777$

Egyptisk division 187 : 11

Rad Nr	2-potens	Dubbling
1	1	11*
2	2	22
3	4	44
4	8	88
5	16	176*

Alltså $187:11 = 1+16=17$

Divisionen gick jämnt upp !

Exempel från RMP Dela 2 bröd till 7 män

Denna uppställning ges

Rad Nr	2-potens	Dela
1	1	7
2	1/2	3+1/2
3	1/4	1+1/2 +1/4 *
4	1/28	1/4*

De * -märkta adderar till 2.
Alltså är bröd till varje man 1/4 och 1/28 bröd.
Är det bättre än 2/7 bröd som vi svarar ?

Exempel Divisionen 53:8

Rad Nr	2-potens	Dubbling
1	1	8
2	2	16*
3	4	32*
4	1/2	4*
5	1/4	2
6	1/8	1*

Alltså 53:8 = 2+4+1/2 +1/8 = 6+1/2+1/8.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univ lektor Olle Axling

AHA- KALKYL FRÅN RHINDPAPYRUSEN REGULA FALSI

PROBLEM 24 : En **aha** (betecknar en kvantitet) och en fjärdedel av den ger 30.
Vad är aha ? AHMES ger lösningen i ord, dvs ger en RETORISK lösning
Gör falska ansatsen att aha är 8, då blir $8 + \frac{8}{4} = 10$.
Så många gånger man måste multiplicera 10 för att få 30 måste 8 multipliceras för att ge 30.
Alltså dela 10 i 30, som ger 3.
3 multiplicerat med 8 ger 24 , som är aha.

DET FINNS MÅNGA PROBLEM I RMP AV TYP **TÄNK PÅ ETT TAL"** SOM TYCKS ÄMNADE ATT TRÄNA ELEVERNA PÅ SVÅRA PROBLEM

I exemplet ovan klarar man sig med heltalsräkning, men det är oftast inte så.

RMP börjar med tabeller över många bråk $\frac{2}{n}$ skrivna som summor av STAMBRÅK $\frac{1}{k}$.

Exempel på **stambråksomskrivning** är följande

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$$

och det sista i RMP

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univlektor Olle Axling

NÅGRA EXEMPEL UR RMP

Om en lärd man säger till Dig: " Tio är svaret till två tredjedelar och en tiondel av vad ? " , så låt honom höra " tretton och en tjugotredjedel ".

Dela upp arean 100 setat i två kvadrater så att ena kvadratens sida är tre fjärdedelar av den andres.
" Giv kvadrater med 36 och 64 setat. "

" Se där kommer herden med 70 oxar." Den som räknade frågade herden : "Vilken del av din talrika hjord för du med dig ? " Herden svarade: " två tredjedelar av tredjedelen. Hur stor är då hela min jord ? "
Låt honom höra att han äger 315 oxar.

Dela ut två bröd till sju män.
" Giv till varje man ett kvartsbröd samt ett tjugoåttondels bröd. "

Summera geometriska summan om fem termer med första termen 7 och kvoten 7.
" Säg att man multiplicerar 2801 med 7 som är 19607 "

Undran : Hade man formeln

$$7 + 49 + 343 + 2401 + 16807 = a\frac{(k^n - 1)}{(k-1)} = 7\frac{(7^5 - 1)}{(7-1)}$$

$$= 7 \cdot 2801 \quad ?$$

FRÅN RHINDPAPYRUSEN AV SKRIVARE AHMOS ca - 2000

Funnen 1858 av filologen Henry Rhind i Thebe vid RamsesII grav.

Inledning : En grundlig genomgång av allting, insikter i allt som existerar, kunskap om alla dunkla hemligheter.

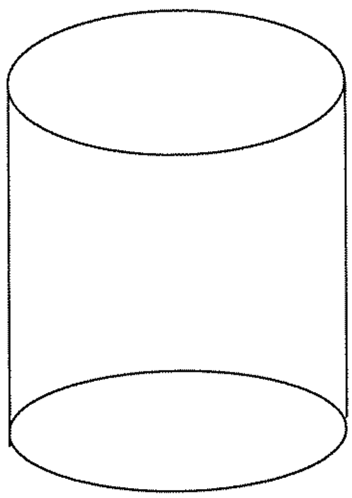
RMP består av 87 lösta problem av praktisk natur.

PROBLEM 48 i RMP VOLYMEN AV MAGASIN

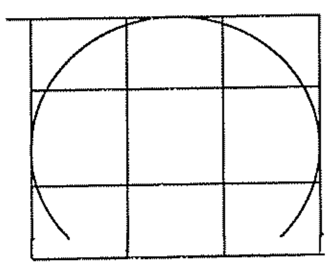
Längdmåttet var " underarm" ca 52 cm
100 underarmar längs ett rep kallas "khet"

VAD ÄR VOLYMEN AV ETT CYLINDRISKT SÄDESMAGASIN OM BOTTENDIAMETERN ÄR 9 khet ? Man behöver en cirkels area !

Sätt diametern till d



Arean av cirkeln är 7/9 av kvadraten. Det ger ett närmevärde på π av 256/81 = 3,1605



GREKLAND UNDER KLASSISK TID ca 550 – 330 f Kr

NÅGRA AV SKOLORNA I ÄLDRE TID

1. DEN JONISKA SKOLAN.	Thales, Pythagoras tidigt.
2. PYTHAGOREERNA I KROTON.	Pythagoras.
3. ELEATISKA SKOLAN.	Zenon med paradoxerna.
4. EUDOXOS SKOLA.	Eudoxos.

THALES FRÅN MILETOS (625 – 550) " allt är vatten "

T. förutsade en solförmörkelse 585.
T. menade att vatten var alltings ursprung.
Joniska skolan hade en geocentrisk världsbild.
T. undervisade ihop med Pythagoras tidigt.
T. genomförde en rationell revolution, kallas den förste vetenskapsmannen.

GEOMETRI SOM THALES SKA HA KÄNNT TILL

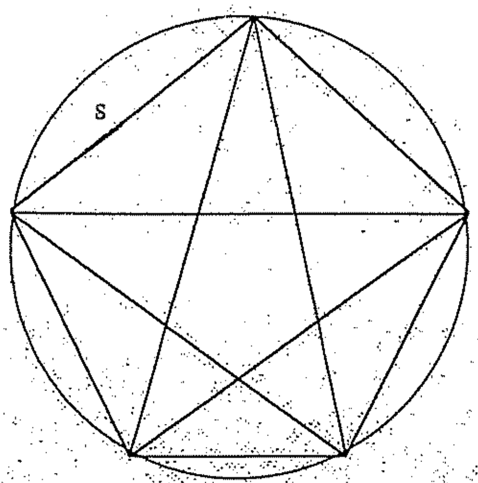
Vertikalvinklar är lika stora.
Pereferivinkel på en halvcirkel är rät.
Åsnebryggan : Basvinklar i en likbent triangel är lika stora.
T. gjorde avståndsberäkningar och höjdberäkningar.

PYTHAGORAS FRÅN SAMOS (i Jonien) 570 – 490

Talmystik. Talen styr allt. Musiken.
Stränga religiösa regler.
Upptäckte inkommensursbla längder i pentagrammet.
Gyllene snittet. Pythagoreiska taltrippler.
Figurativa tal. Triangel och kvadrattal.
Perfekta och vänskapliga tal.
P. abstraherade och deducerade teorem.

PENTAGRAMMET GYLLENE SNITTET Φ

PYTHAGOREERNAS BRÖDRAMÄRKE

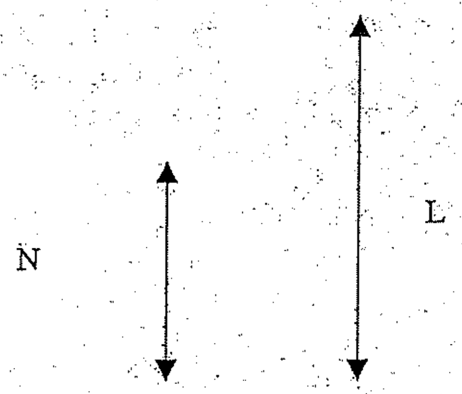


d= diagonalens längd

LIKFORMIGHET GER

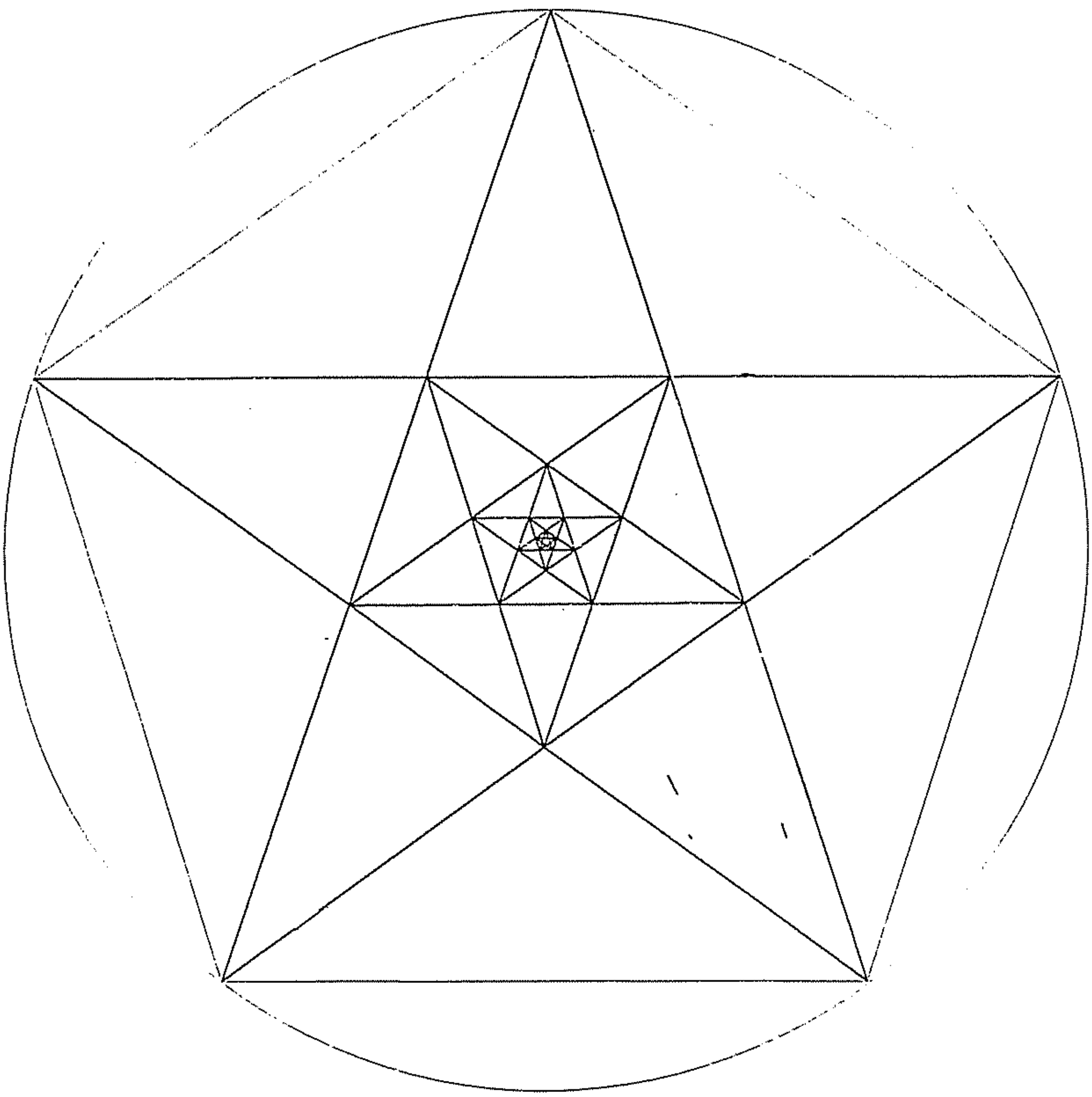
$$\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$$

$$\frac{s}{d} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$



TESTA $\frac{N}{L} \approx 0,62$

Πενταγραμ



PYTHAGOREISK TALMYSTIK

Ur B. Farrington : *Grekisk Vetenskap*

PYTHAGOREN FILOLAOS PÅ 400-TALET SKRIVER:

"BETÄNK TALENS VERKAN OCH VÄSEN UTIFRÅN DEN KRAFT SOM INNEBOR I DEKADEN (TALET 10). DEN ÄR STOR, ALLSMÄKTIG, ALLOMFATTANDE, DEN FÖRSTA PRINCIPEN OCH LEDFYREN I GUDARNAS OCH MÄNNISKORNAS LIV.
UTAN DEN VORE ALLTING GRÄNSLÖST, OKLART OCH OGRIPBART. DET LIGGER I **TALENS NATUR** ATT VARA EN MÅTTSTOCK, ETT RÄTTESNÖRE OCH EN VÄGVISARE I ALLA TVIVEL OCH SVÅRIGHETER. UTAN TALEN OCH DERAS VÄSEN SKULLE INGENTING I TILLVARON VARA UPPENBART FÖR NÅGON, VARE SIG I SIG SJÄLV ELLER I FÖRHÅLLANDE TILL ANDRA TING. SE HUR TALENS MAKT YTTRAR SIG INTE BARA I DEMONERS OCH GUDARS HANDLINGAR UTAN OCKSÅ I MÄNNISKORS TANKAR OCH HANDLINGAR, I ALLA **HANTVERK OCH I MUSIKEN.** DÄRTILL KOMMER ATT TALENS VÄSEN OCH HARMONI UTESLUTER FALSKHET. MISSTAG OCH SVEK ÄR DEM FJÄRRAN. BARA HOS DET GRÄNSLÖSA, DET OBEGRIPLIGA, DET **IRRATIONELLA** HÖR FALSKHET OCH AVUND HEMMA".

PLATON ARTES LIBERALES

INSKRIPTION VID PLATONS AKADEMI :

" Må här ingen inträda som är okunnig i geometri"

VAD SOM ENLIGT PLATON HADE STÖRSTA

BILDNINGSVÄRDET :

GRAMMATIK, DIALEKTIK, RETORIK
DE TRE KALLADES **TRIVIUM**

ARITMETIK, ASTRONOMI, GEOMETRI, MUSIK
DE FYRA KALLADES **QUADRIVIUM**

ETT BILDNINGIDEAL SOM LEVDE LÄNGE.
JÄMFÖR ORD SOM " TRIVIALSKOLA "

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univlektor Olle Axling

MUSEION i Alexandria Egypten

- Anläggare: Ptolomaios I Soter och Demetrios
- Tempel tillägnat de 9 muserna, konsternas beskyddare.
- Förebilder:

  Zenons Stoa , Platons Akademi , Aristoteles Lyceum
- Anlades ca 300 f.Kr , brändes av Caesar 48 f.Kr, erövrades av Rom 30 f.Kr och förstördes och brändes slutgiltigt av muslimska erövrare 640 e.Kr.
- Återinvigt som Bibliotheca Universalis 2002 av Unesco
- Några alumni i Museion
  Euklides , Apollonius , Arkimedes , Heron , Theon
  Eratosthenes , Hipparchos , Ptolomaios , Diofantos
  Aristofanes , Aristarchos , Callimachos , Hypathia
- Astronomiskt observatorium, Botanisk och Zoologisk trädgård
  3 bibliotek med 700000 fack för papyrusrullar
  som heter "bibliotheca" på grekiska.
- All världens litteratur och vetenskap kopierades och ofta återsändes kopian.

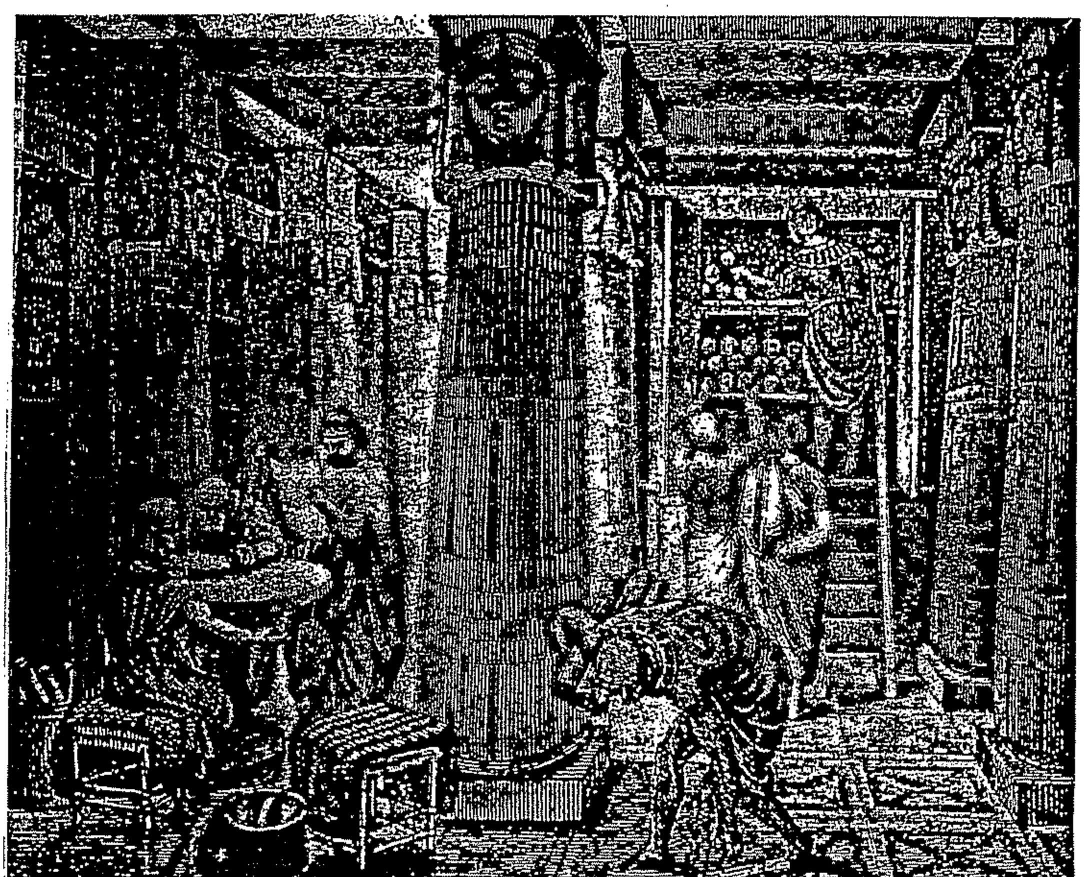
EUKLIDES ELEMENTA eller STOICHEA Στοιχεα ca 330 f Kr

Euklides var en grekisk matematiker verksam vid lärdomsinstitutionen Museion i Alexandria vid Nilens delta.

Euklides sammanställde Elementa, geometrins och talteorins grunder, som under långa tider haft ett enormt inflytande i skolor på alla stadier.

Så här skaldar vår C.M. Bellman

Hjärnan ännu i mig vrides
När jag tänker på Euklides
Och på de trianglarna
A, B, C och C, D, A
Svetten ur min panna gnides
Värre än på Golgata



OM ELEMENTA

Sammanställdes av Euklides i Alexandria under Ptolomaios I som lät bygga Museion. Till denne kung lär E ha yttrat " det finns ingen kungsväg till geometrin". Proklos har beskrivit Euklides och Elementa.

Euklides sammanförde matematiken till ett logiskt ,deduktivt system med definitioner, postulat och propositioner.

Geometrin begränsas till vad som är möjligt att konstruera med passare och ograderad linjal. De genererar de fulländade figurerna linjen och cirkeln.

Elementa består av 13 böcker som behandlar plangeometri, talteori, teorin om inkommensurabilitet och rymdgeometri. Den börjar med 23 definitioner.

Bok 1 - 4. Geometri utan proportinslära. T ex de fyra kongruensfallen och beviset för Pythagoras sats (väderkvarnsbeviset).

Bok 5 – 6. Proportionslära och likformighet enligt Eudoxos, Euklides lärare vid Platons akademi i Aten.

Bok 7 – 9. Talteori. Euklides algoritm för sgd. Oändligt många primtal,fler än tre. Perfekta tal (som 6 och 28) klassificeras.

Bok 10. Irrationella tal. Pythagoreiska taltrippler. Ytors area.

Bok 11 – 13. Rymdgeometri. Eudoxos exhaustionsmetod stringent använd för att successivt approximera fram areor. Förfinades av Arkimedes. De fem platonska kropparna härleds : tetraedern , kuben (hexaedern) , oktaedern , dodokaedern och ikosaedern. Namn efter antalet regelbundna sidoytor.

EFTER EUKLIDES i ALEXANDRIA

Apollonios (262 – 190), Arkimedes, Ptolomaios (90-160) skrev i Almagest om trigonometri (kordatabeller ger sinus), Diofantos (ca 250 e Kr), Theon och hans dotter Hypatia. (hon lynchades 415 e Kr) Matematiken flyttade sedan österut till Bagdad.

DE SEX FÖRSTA

JEMTE

ELFTE OCH TOLFTE BÖCKERNA

AF

EUCLIDIS ELEMENTA

ELLER

GRUNDLIGA INLEDNING

TILL

GEOMETRIEN,

TILL SVENSKA UNGDOMENS TJENST UTGIFNA

AF

MÅRTEN STRÖMER,

FÖR DETTA ASTRONOMIÆ PROFESSOR I UPSALA SAMT LED. AF KONGL. VETENSK.-ACAD.
I STOCKHOLM OCH SOCIET. R. LIT. ET SCIENT. I UPSALA.

FEMTONDE UPPLAGAN.

ÖFVERSEDD SAMT MED TILLÄGG OCH ETT BIHANG, INNEHÅLLANDE EN ALGEBRAISK
FRAMSTÄLLNING AF ANDRA OCH FEMTE BÖCKERNA,

AF

P. W. BERGSTRAND.

18 68.

STOCKHOLM,
F. & G. BEIJERS FÖRLAG.

Första Boken.

Definitioner.

[**Storhet** *(quantitas)* kallas det, som genom likartade delars tillläggande eller fråntagande kan ökas eller minskas. Vetenskapen om storheter benämnes **Mathematik.** Den delen af mathematiken, som handlar om storheter, hvilka hafva utsträckning *(quantitates continuæ)*, heter **Geometri** *). Denna utsträckning är trefaldig: längd, bredd och höjd (hvilken sista ofta heter tjocklek, stundom äfven djup).]

1. **Punkt** kallas det, som icke har några delar.

2. **Linie** är en längd utan bredd.

3. Punkter äro yttersta ändarne af en linie. [Dessa punkter kallas liniens **ändpunkter.**]

Detta är icke någon definition, utan en anmärkning vid den nästföregående andra definitionen. Emedan Euclides sjelf icke har numererat sina definitioner, utan det är skedt i nyare tider; så tyckes det vara dens fel, som först numererat dem, att detta är satt som en definition för sig sjelft. I de äldsta editionerna, hvarest definitionerna ännu icke blifvit numererade, låta dessa orden sålunda: *Linie är en längd utan bredd, hvars yttersta ändar äro punkter.* Jag vill nu icke göra någon ändring häruti, på det den öfver allt antagna nummern på definitionerna icke måtte rubbas, och confusion förorsakas i citationerna.

4. **En rät linie** är den, som ligger jemnt emellan sina punkter, *eller yttersta ändar; så att hon icke böjer sig på något ställe.* [Eller: en rät linie är kortaste afståndet mellan tvenne punkter. *Archimedes.*]

5. **Superficies** eller *yta* är det, som allenast har längd och bredd; *men ingen tjocklek.*

6. Linier äro det yttersta af en superficies.

Här har också anmärkningen vid den tredje definitionen rum.

7. **Ett plan** *[ett planum]* eller *platt superficies* kallas den, som ligger jemnt mellan sina linier, så att den ej böjer sig på något ställe.

---

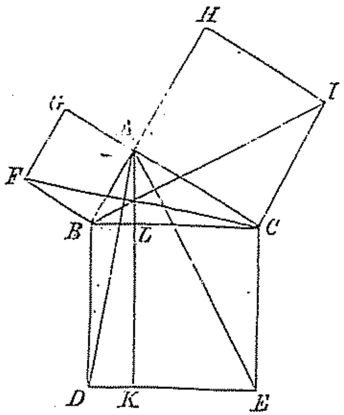
*) [Ordet *geometri* betyder egentligen »jordmätning», emedan jordstyckenas mätande och delande, d. v. s. landtmäteri, utgjorde det första och allmännaste både behofvet och bruket af denna vetenskap.]

att hon är liksidig; derföre är hon en qvadrat; hon är också uppritad på den gifna räta linien AB. H. S. G.

Coroll. Häraf ser man, att om en vinkel i en parallelogram är rät, så äro alla vinklarne räta och således parallelogrammen rätvinklig.

XLVII. Proposition. Theorem.

*I rätvinkliga trianglar är qvadraten, som uppritas på den sidan, som står emot den räta vinkeln *), lika stor med qvadraterna, som uppritas på sidorna, som omfatta den räta vinkeln **), tillsammantagne ***).*



Låt ABC vara en rätvinklig triangel, hvars vinkel BAC är rät: så säger jag, att qvadraten, som uppritas på BC, är lika stor med båda qvadraterna tillhopa, som uppritas på BA och AC.

Ty upprita på BC qvadraten BDEC, och på BA, AC qvadraterna GB, HC (*a*); och drag, genom punkten A, AK parallel med BD, eller CE (*b*), och sammanbind AD, FC.

Fördenskull, efter vinklarne BAC, BAG äro räta (*c*), så råka tvenne räta linier GA, AC räta linien BA på hvar sin sida uti en punkt A, så att vinklarne, som ligga bredvid hvarandra, äro tillhopa lika stora med tvenne räta. Derföre äro GA och AC i en rät linie (*d*). För samma orsaks skull äro AB och AH uti en rät linie. Och efter vinkeln DBC är lika stor med vinkeln FBA, ty hvardera är en rät vinkel (*e*); så lägg ABC, som är gemensam, till dem båda, så blifver hela vinkeln DBA lika stor med vinkeln FBC (*f*). Nu är också AB lika stor med BF, ty de äro sidor i samma qvadrat ABFG, och BD lika stor med BC, efter de äro sidor i qvadraten DECB. Alltså äro två sidor AB, BD i triangeln ABD lika stora med

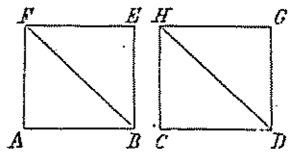
a. 46. propos.
b. 31. propos.
c. 30. defin. och hypoth.
d. 14. propos.
e. 1. axiom.
f. 2. axiom.
g. 4. propos.
h. 41. propos.
i. 6. axiom.

*) [Denna sida kallas *hypotenusa*.] **) [Hvar och en af dessa sidor kallas en *kathet*.] ***) [Denna vigtiga proposition kallas *det pythagoriska theoremet* efter sin uppfinnare, philosophen Pythagoras, som lefde omkring 550 år före Christus. Han skall äfven hafva uppfunnit den vigtiga propositionen XXXII.]

hvar sin af sidorna FB, BC i triangeln FBC, och vinkeln DBA är lika stor med vinkeln FBC; derföre måste basen AD vara lika stor med basen FC och triangeln ABD lika stor med triangeln FBC (*g*). Men parallelogrammen BK är dubbelt så stor som triangeln ABD; ty de stå på samma bas BD och äro emellan samma parallela linier BD, AK (*h*). Qvadraten GB är också dubbelt så stor som triangeln FBC; ty de stå på samma bas FB och äro emellan samma parallela linier FB, GC (*h*). Men de, som äro dubbelt så stora som lika stora, äro lika stora med hvarandra (*i*). Derföre är parallelogrammen BK lika stor med qvadraten GB. På samma sätt bevisas, att parallelogrammen CK är lika stor med qvadraten CH, om man drager räta linierna AE, BI. Derföre är hela qvadraten DBCE lika stor med qvadraterna GB, HC tillhopa (*f*). Men qvadraten BDEC är uppritad på räta linien BC, och qvadraterna GB, HC äro uppritade på BA, AC; derföre är qvadraten, som är uppritad på sidan BC, lika stor med qvadraterna tillhopa, som äro uppritade på sidorna BA, AC. H. S. B.

Theorem.

De qvadrater, som hafva lika stora sidor, äro lika stora.



Låt qvadraterna AE, CG hafva lika stora sidor AB, CD: så säger jag, att AE och CG äro lika stora.

Ty sammanbind FB, HD.

Fördenskull, efter AE är en qvadrat, så måste sidan AB vara lika stor med sidan AF, och efter CG är en qvadrat, så måste sidan CD vara lika stor med sidan CH (a). *Men CD poneras lika stor med AB; derföre är AF lika stor med CH* (b). *Alltså äro två sidor FA, AB i triangeln FAB lika stora med hvar sin af sidorna HC, CD i triangeln HCD. Men vinkeln vid A är också lika stor med vinkeln vid C, efter de båda äro räta* (a); *derföre är basen FB lika stor med basen HD, och triangeln FAB lika stor med triangeln HCD* (c). *Men nu är qvadraten AE dubbelt så stor som triangeln FAB, och qvadraten CG dubbelt så stor som triangeln HCD* (d); *derföre, efter de, som äro dubbelt så stora som lika stora, äro lika stora med hvarandra* (e), *så måste qvadraten AE vara lika stor med qvadraten CG. H. S. B.*

a. 30. defin.
b. 1. axiom.
c. 4. propos.
d. 34. propos.
e. 6. axiom.

TRE KLASSIKER ATT LÖSA MED PASSARE OCH LINJAL

1. **KUBENS FÖRDUBBLING.** Konstruera sidan i en kub, som har dubbelt så stor volym som en given kub.

2. **VINKELNS TREDELNING.** Dela en given vinkel i tre lika stora delar.

3. **CIRKELNS KVADRATUR.** Konstruera en kvadrat, som har samma area som en given cirkel.

Alla tre problem är olösbara och det förklaras av följande.

SATS 1.

Med passare och linjal kan man konstruera de och endast de uttryck, som är bildade av de givna storheterna med hjälp av rationella funktioner och kvadratrötter.

SATS 2.

Rötterna till en irreducibel ekvation (polynomet kan inte faktoriseras i faktorer med rationella koefficienter), kan inte uttryckas med rationella funktioner eller kvadratrötter av ekvationens koefficienter.

Problem 1 leder till ekvationen $x^3 - 2 = 0$ som inte kan faktoriseras rationellt.

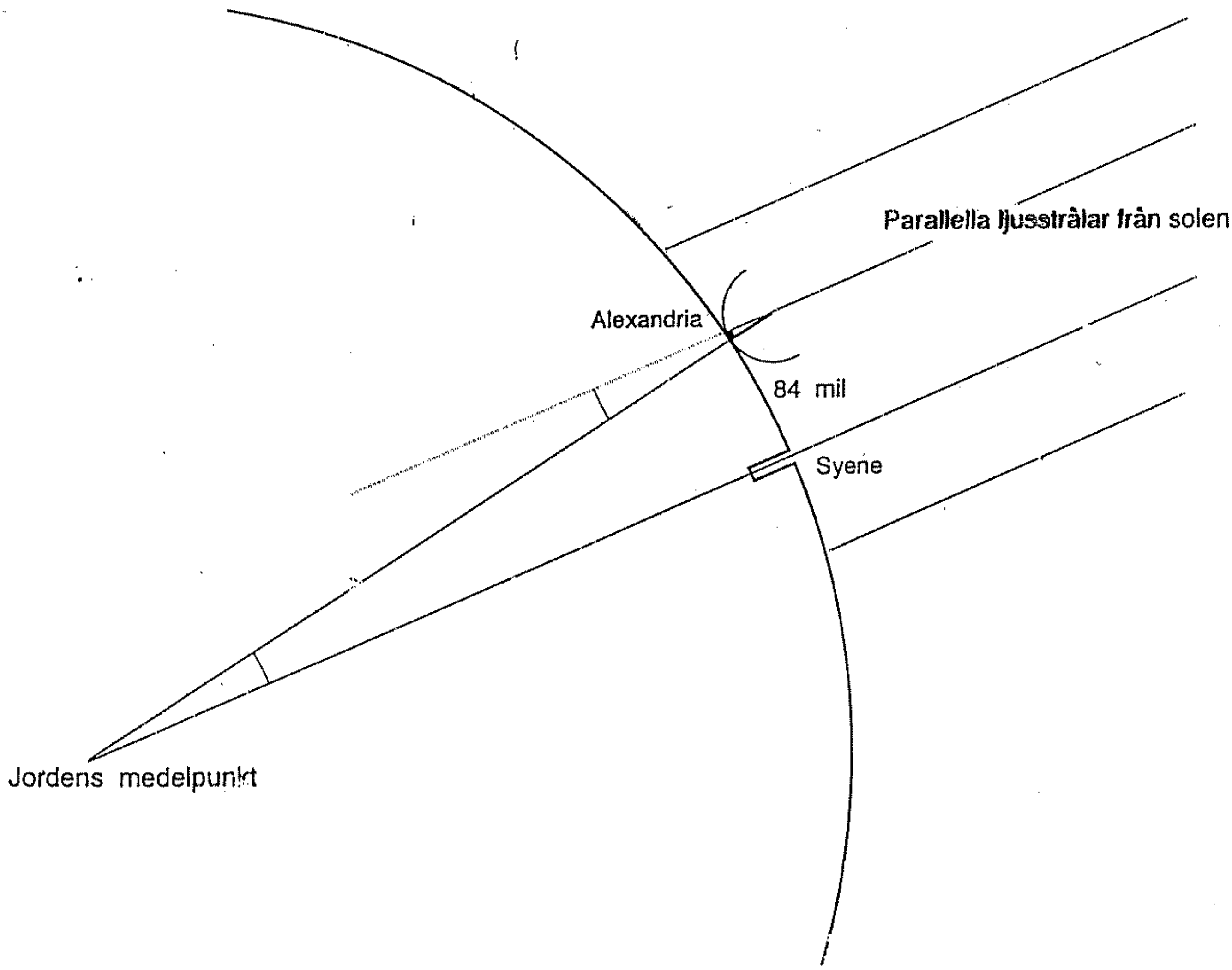
Problem 2 leder till ekvationen $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ för 60-gradersvinkel och den ekvationen kan inte heller faktoriseras rationellt.

Problem 3 leder till problemet att visa att π kan vara rot till någon ekvation med heltalskoefficienter, dvs att det är ett algebraiskt tal. 1882 visade Lindemann att så inte är fallet.

ERATOSTHENES MÄTER JORDENS OMKRETS.

När solen stod i zenit i Syene på midsommarafton och solens strålar lyste rakt ner i en brunn mätte Eratosthenes skuggan av en lodrät stav fastsatt i en halvsfär belägen i Alexandria, som ligger på samma meridian som Syene.

Skuggan i halvsfären i Alexandria utgjorde 1/25 av dennas omkrets vilket är 1/50 av hel. sfärens omkrets. Alltså utgjorde avståndet mellan Alexandria och Syene 1/50 av jordens omkrets. Avståndet mellan de båda städerna uppmättes till 84 mil och Eratosthenes drog slusatsen att jordens omkrets är 4200 mil. (4 000 mil)



ARISTARKOS ca 270 f Kr. Ett HELIO-centriskt planetsystem.

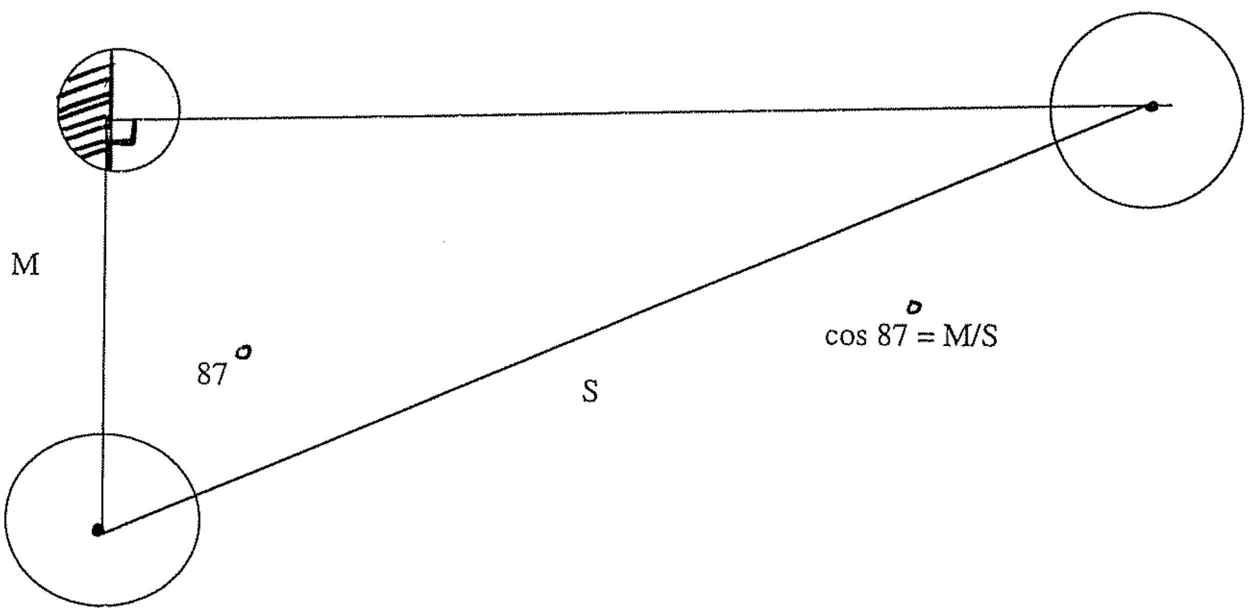
Ur " Om solens och månens storlek och avstånd "

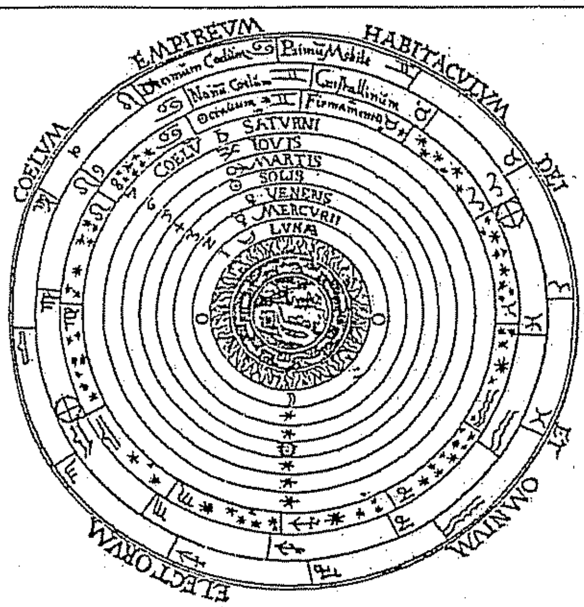
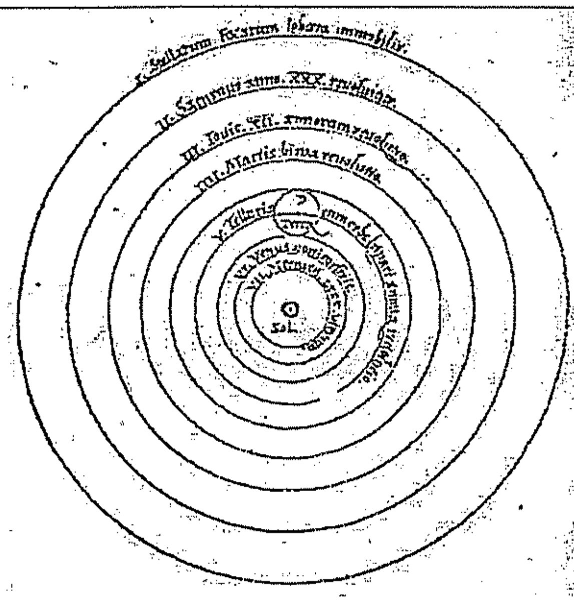
Ett bra exempel på den alexandrinska skolans vetenskap. Boken börjar med att på typiskt alexandrinskt sätt ange de hypoteser som är grunden för hans resonemang.

1. Månen erhåller sitt ljus från solen.
2. Jorden betraktas som en medelpunkt för den cirkel som månen går utefter.
3. Då månen är halv bildar solen, jorden och månen en rätvinklig triangel.
4. Då månen är halv befinner den sig i en riktning , som är en trettiondel av en rät vinkel mindre än en rät vinkel till solen.

osv

Hypotes 4 är resultat av felaktiga mätningar. Aristarkos värde blir 87 grader. Vinkeln är snarare 89,4 grader. Han fann att det är mellan 18 och 20 gånger så långt till solen som till månen.



Solsystemet enligt Ptolemaios	Solsystemet enligt Copernicus
	
Solsystemet enligt Brahe	**Solsystemet enligt Kepler**