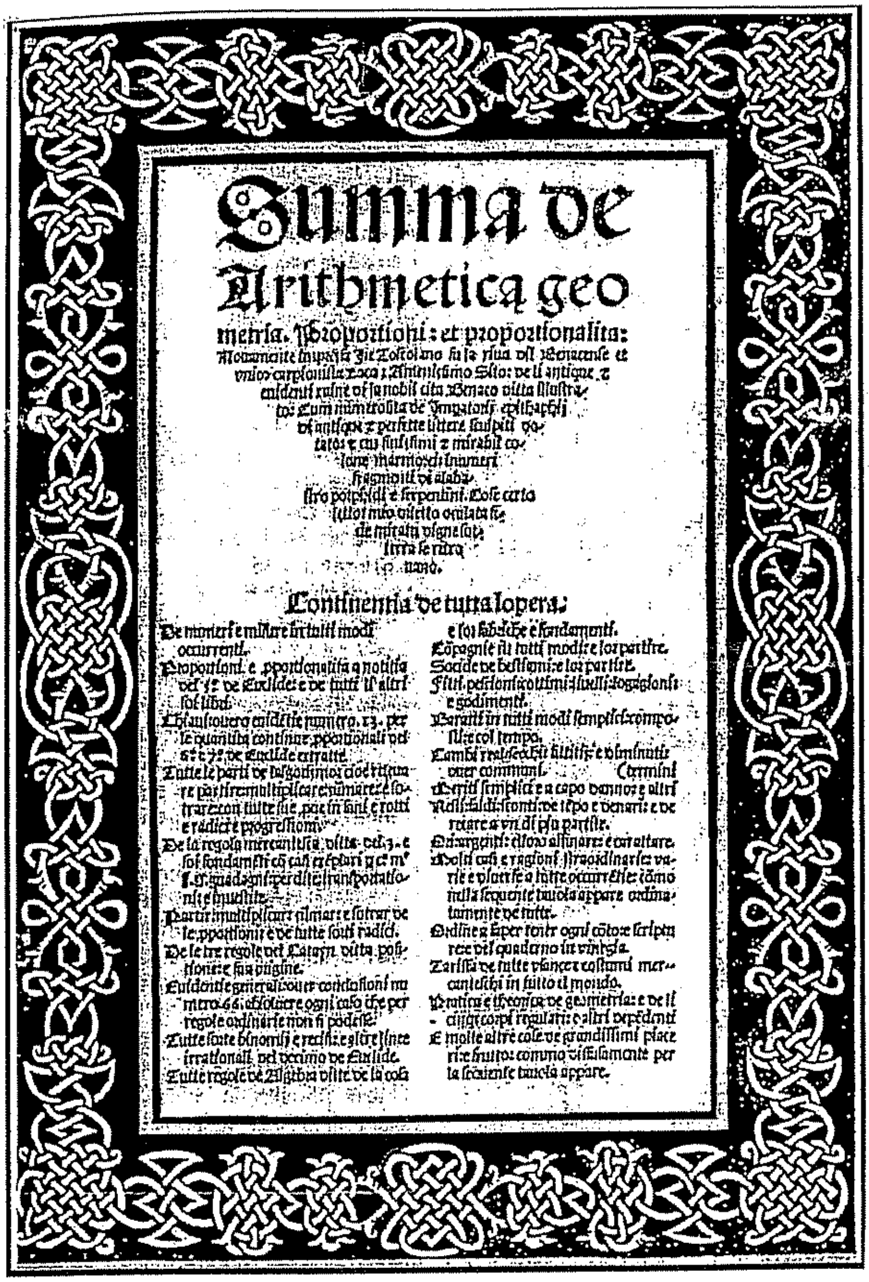
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univ lektor Olle Axling

Matematikens historia

ALGEBRANS UTVECKLING

FRÅN DIOFANTOS TILL GALOIS


Summa de Arithmetica geometria. Proportioni: et proportionalita:

Continentia de tutta lopera:

Titelbladet till Luca Paciolis Summa de Arithmetica et Geometria Venedig 1494

DIOFANTOs ARITMETICA ca 250 e Kr

D:s intar en mellanställning mellan retorisk och symbolisk algebra, ibland kallad synkoperad algebra. Vissa förkortningar införs för ofta använda storheter eller operationer. Till exempel får " okänd i kvadrat" en symbol.

Aritmetica är ett talteoretiskt verk. Här löses :

Ekvationer av grad 1, 2 och 3.

Ange alla Pythagoreiska trippler x,y,z., dvs han löste fullständigt ekvationen $x^2 + y^2 = z^2$.

Diofantos undersökte många problem om att skriva tal som summor av kvadrater och andra potenser.

Detta inspirerade senare matematiker som Fermat, Euler och Lagrange.

I Fermats exemplar av Aritmetica finns den berömda marginalnoteringen

" Ekvationen $x^n + y^n = z^n$ har inga heltalslösningar för n> 2 . Jag har ett underbart bevis, men det ryms inte här "

Detta är Fermats sista sats och bevisades verkligen av Andrew Wiles 1995.

En *diofantisk ekvation* är på formen ax +by = c , där a,b,c är heltal.

FIBONACCIs LIBER ABACI 1202 e Kr

Talteori och ekvationer.

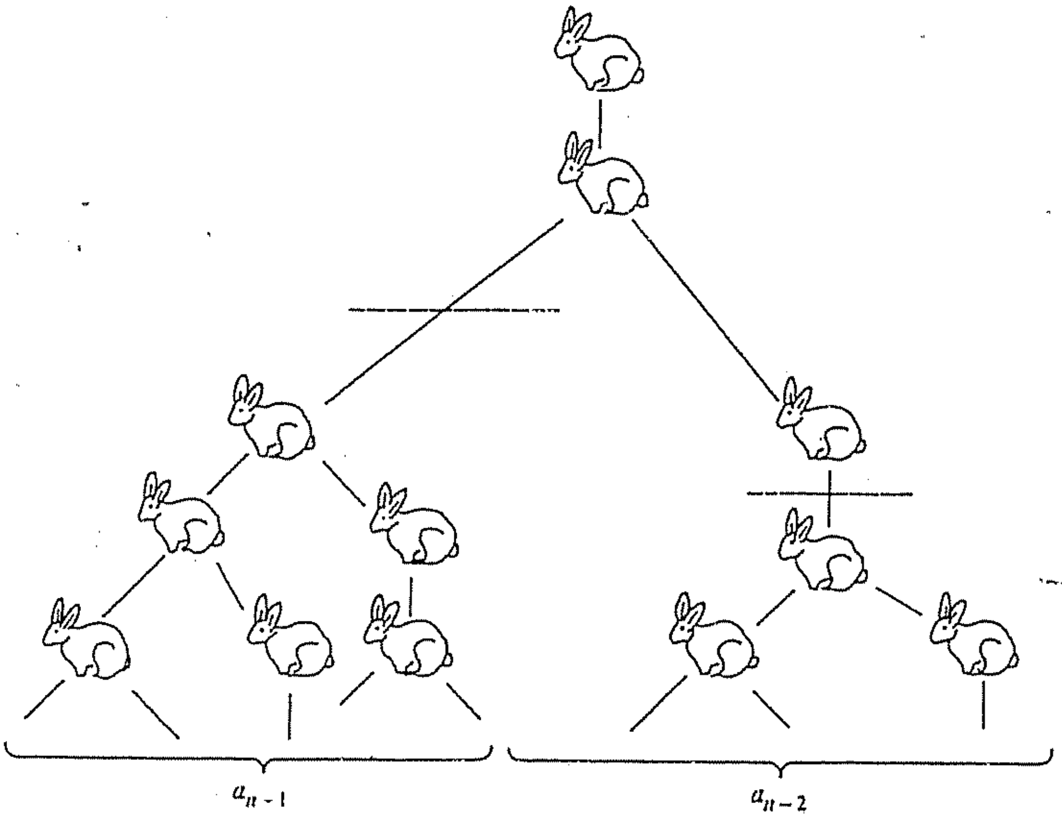
Kaninproblemet ger upphov till den berömda F.s talföljd 1 1 2 3 5 8 13 21... där $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ och kvoten närmar sig Gyllene snittet som är

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

LINKÖPINGS UNIVERSITET MAI
Olle Axling

FIBONACCIs TALFÖLJD I NATUREN

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geqslant 2,$



$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1\\
a_1 &= 1\\
a_2 &= 1 + 1 = 2\\
a_3 &= 2 + 1 = 3\\
a_4 &= 3 + 2 = 5\\
a_5 &= \cdots\\
&\vdots\\
a_n &= a_{n-1} + a_{n-2}.
\end{aligned}
$$

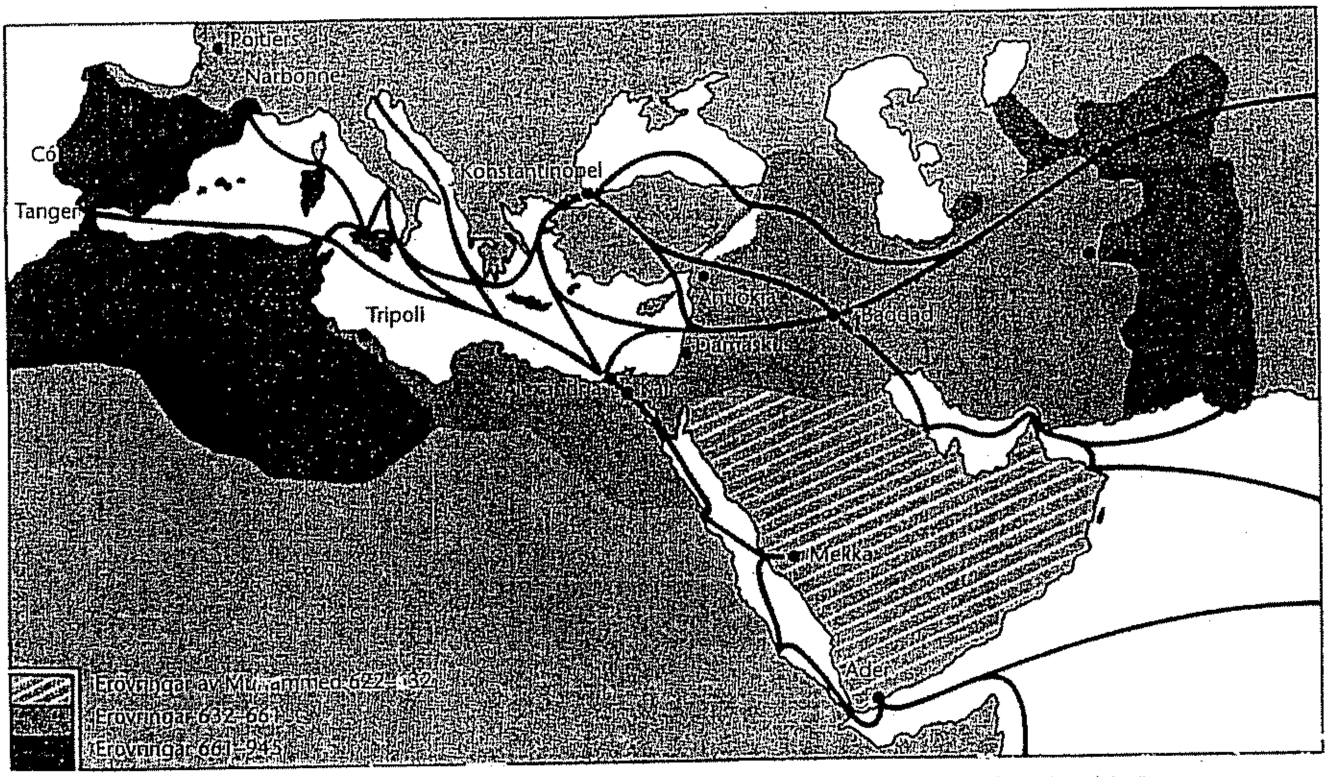


Bild 49. Karta över det arabiska väldets utsträckning från 600-talet till 1100-talet. Linjerna anger viktiga handelsvägar.

VISHETENS HUS

År 750 e Kr BLEV BAGDAD NY HUVUDSTAD I DET ISLAMSKA RIKET OCH MAN BYGGDE ETT " NYTT MUSEION " KALLAT *Bait-al-Hikma* dvs VISHETENS HUS .
" FÖRSTEBIBLIOTEKARIE " OCH ANSVARIG FÖR DET STORA ÖVERSÄTTNINGSARBETET BLEV *al – Khwarizmi* , SOM ÄVEN GJORDE ETT STORT UTVECKLINGSARBETE I ALGEBRA.

DIOFANTOS *ARITMETICA* , DÄR NYA METODER FÖR ATT LÖSA EKVATIONER UTAN GEOMETRISKA ARGUMENT GAVS, ÖVER-SATTES TILLSAMMANS MED INDISKA OCH BABYLONSKA VERK OCH ANDRA GREKISKA T EX ELEMENTA.

OMAR KHAYYAM (1047-1122) SKREV *ALGEBRA* DÄR TREDJE – GRADSEKVATIONER LÖSTES SOM SKÄRNINGAR MELLAN KÄGELSNITT , SOM HAN LÄRT AV APOLLONIUS. HAN SÖKTE RENT ALGEBRAISKA METODER OCH ANSÅG ATT EN SÅDAN EKVATION KUNDE HA MER ÄN EN LÖSNING. FÖR DEN FORT-SATTA UTVECKLINGEN AV SYNTESEN MELLAN ALGEBRA OCH GEOMETRI STÅR DESCARTES OCH FERMAT.

RETORISK ALGEBRA hos Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi ca 825
Samma metod finns hos babylonierna på lertavlor ca 1800 f Kr

Hans viktigaste verk är *al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wal muqabala.*

4 slag av förenklingar används och "al-jabr" är att eliminera negativa termer t ex från $10 = 5x - 4$ till $14 = 5x$.

I *al-Jabr* ges ett exempel på en ekvation av typ "kvadrater och rötter

lika med tal" Problemet är

Vilken är kvadraten som med tio av sina rötter ger en totalsumma av

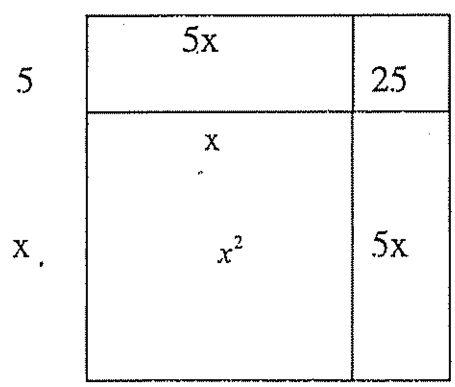
trettionio ?

Vi skulle skriva ekvationen $x^2 + 10x = 39$. Här är receptet :

Sättet att lösa är att ta hälften av rötterna. Nu är rötterna tio.
Tag därför fem , som multiplicerat med sig själv ger tjugofem, ett belopp som adderat till trettionio ger sextiofyra. Kvadratroten härur är åtta, varifrån subtraheras halva antalet rötter, fem, vilket ger tre. Talet tre representerar en rot av denna kvadrat, som är nio. Den sökta kvadraten är därför nio.

Symboliskt är receptet $x = -5 + \sqrt{25 + 39} = -5 + 8$.

GEOMETRISK TOLKNING



Areaberäkning $(x + 5)^2 = 64$

TVÅ VIKTIGA SKEENDEN FÖR VETENSKAP OCH KULTUR

1. UNIVERSITETEN GRUNDAS - "*Studia generalia*"

2. DEN GREKISKA VETENSKAPEN ÖVERSÄTTS TILL LATIN FRÅN ARABISKA.

NÅGRA UNIVERSITET :

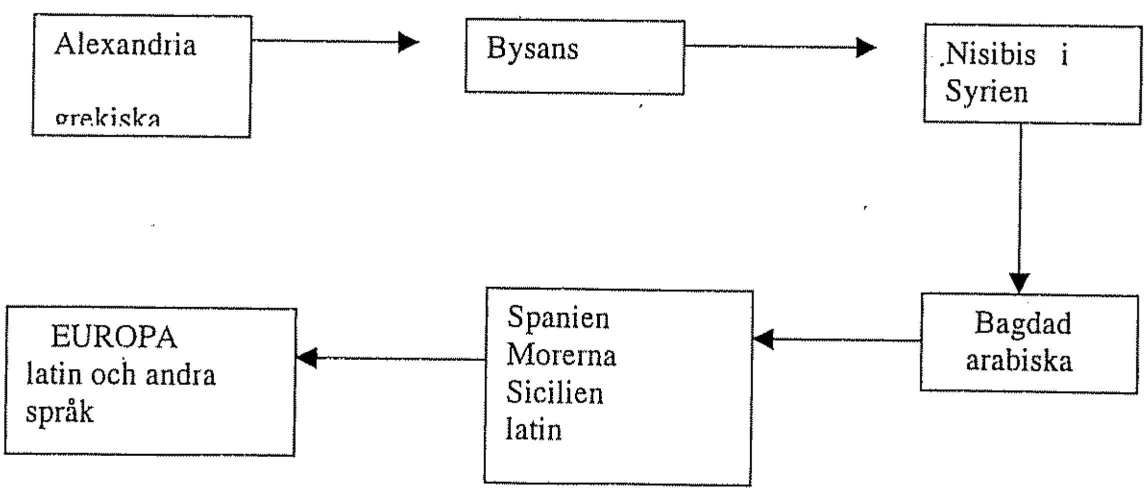
ITALIEN : BOLOGNA 1158 , MODENA 1170
ENGLAND : OXFORD 1214 , CAMBRIDGE 1220
FRANKRIKE : PARIS 1160 , TOULOUSE 1233
SPANIEN : PALENCIA 1208 , SEVILLA 1254
SVERIGE : UPPSALA 1477 , LINKÖPING 1975

Det fanns en *artes* –fakultet där man studerade de sju fria konsterna *quadrivium* och *trivium*

ÖVERSÄTTNINGARNA SKÖT FART CA ÅR 1100

I TOLEDO ÖVERSÄTTS Euklides, Aristoteles,Ptolemaios och al-Kwarizmi.
PÅ SICILIEN ÖVERSÄTTS Euklides och Archimedes

ELEMENTA I OLIKA SPRÅK



Universitetslektor Olle Axling

RENÄSSANSEN EKVATIONER I ITALIEN

Scipiona del Ferro, professor i Bologna , löste först tredjegradsekvationer. Hans elev Fior ärvde lösningen och utmanade andra på problemtävlingar. Fontana "Tartaglia" (stammaren) antog 1535 utmaningen och vann med 30 – 0. Fior behärskade bara ekvationer utan x^2 -term. Tartaglia visste hur man med en substitution först kunde få bort andragradstermen.

G.Cardano publicerade lösningen tillsammans med lösningen av fjärdegradsekvationer i *Ars Magna* 1545, trots att han lovat att inte publicera. Lösningen gavs av Tartaglia i for av en dunkel dikt, en retorisk lösning.

Under lösningens gång uppträdde rötter ur negativa tal, som Cardano dock inte accepterade.

Bara positiva reella tal accepterades som lösningar.

Först Leonard Euler 1732 gav de fullständiga lösningarna till tredjegradsekvationen och visade att den s k Cardanos formel ger alla tre lösningarna genom att ge en helt ny definition av kubikrot ur komplexa tal.

Cardano gjorde mycket i sannolikhetsteorin pga sitt stora spelberoende.

CARDANOS FORMEL

Ekvationen $x^3 + px = q \,;\, p,q > 0$ har roten

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2} - \frac{q}{2}}$$

Jämför detta symboliska uttryck med Tartaglias dikt !

När kuben och tingen tillsammans
är lika med något diskret tal,
finn två andra tal som skiljer sig åt med detta.
Då skall Ni taga som regel
att deras produkt alltid är exakt
lika med kuben av en tredjedel av tingen.
Som en allmän regel är därefter resten
av deras subtraherade kubikrötter
lika med det väsentliga tinget.
I den andra av dessa handlingar,
då kuben förblir ensam,
skall Ni notera dessa övriga överensstämmelser:
Ni skall genast dela talet i två delar
så att det ena gånger det andra tydligt ger
exakt kuben av en tredjedel av tingen.
Av dessa båda delar skall Ni alltid
taga de sammanlagda kubikrötterna,
och denna summa kommer att vara Eder tanke.
Den tredje av dessa våra beräkningar
löses med den andra om Ni ger noga akt,
eftersom de till sin natur näst intill överensstämmer.
Detta har jag funnit, och det inte med klumpiga steg,
år ettusen fem hundra trettiofyra.
På starka och gedigna grunder
i staden som omges av havet.

Lösning av en tredjegradsekvation så som den presenterades för Cardano av Tartaglia 1546

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Olle Axling

Girolami Cardanos *ARS MAGNA* 1545

Översättning av Inledningen

DEN STORA KONSTEN

eller

Algebrans Regler

av

GIROLAMO CARDANO

Enastående Matematiker, Filosof och Läkare
I en bok, den tionde, av Hela Aritmetiken
Som kallas det PERFEKTA VERKET

I denna bok, lärde läsare, har ni algebrans regler. Den är så överfull av nya upptäckter och demonstrationer av författaren att föregångarna är av litet värde eller helt utplånas. Den löser knuten inte bara när en term är lika med en annan eller två med en, men också när två är lika med två eller tre med en. Det är en glädje att publicera denna bok så att de mest dunkla och svåråtkomliga skatterna i aritmetiken bringas i ljuset och, som på teatern, exponeras för alla och manar dem att studera vidare med mindre aversion de övriga böckerna av det PERFEKTA VERKET.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Universitetslektor Olle Axling

BOKTRYCKARKONSTEN

Johannes Gutenberg lyckade ca 1440 bygga om en vinpress till en tryckpress.
Från en ram fylld med lösa färgade typer överfördes texten till papper eller pergament genom att ramen mekaniskt trycktes mot ytan.
Detta kunde naturligtvis mångfaldigas på enkelt sätt när typerna väl var på plats.

Latinet med ca 30 tecken passade utmärkt till tryckning med lösa typer, som då kunde återanvändas.

Boktryckarkonsten måste ha inneburit ett av de viktigaste paradigmskiftena i mediehistorien och för spridande av kunskap.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univ lektor Olle Axling

BOLOGNA 1515 : TREDJEGRADSEKVATIONEN LÖST !

Scipione del Ferro (1465-1526) och hans lösning till ekvationen

$$x^3 + px = q$$

Ansätt $x = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}$ i ekvationen

Vi får ny ekvation $x^3 + 3\sqrt[3]{a^2 - b}\,x = 2a$

Vi får en lösning med $a = \frac{q}{2}$ och $b = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$

CARDANOS FORMEL (Borde heta del FERROS formel)

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}$$

TVÅ EXEMPEL UR CARDANOs *Ars Magna*

1. Lös ekvationen $x^3 + 6x = 20$

Cardanos formel ger (den reella) lösningen

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} \quad (= 2)$$

2. Lös $x^3 + 20x = 6x^2 + 33$. Sätt $x - 2 = y$.

Ny ekvation blir $y^3 + 8y = 9$. Formeln ger lösning

$$y = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{4235}{108}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{4235}{108}} - \frac{9}{2}} = 1 \text{ Som ger } x = 3$$

BOMBELLIS SOFISTISKA TAL $a + \sqrt{-1}\,b$

ETT PROBLEM MED EKVATIONEN $x^3 = px + q$
och Cardanos formel

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Då $(\frac{q}{2})^2 < (\frac{p}{3})^3$ fås ROTEN UR NEGATIVT TAL !

RAFAELE BOMBELLI såg att $x^3 = 15x + 4$
gav den IRREDUCIBLA lösningen

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Bombelli gjorde djärvt ansatsen

$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$ och

$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}$ med positiva a, b

Bombelli satte in , räknade reellt och fick lösningen

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

Bombelli fann även rötterna $x = -2 \pm \sqrt{3}$

Bombelli ansåg att de $a + \sqrt{-1}\,b$ han infört
inte var <u>verkliga</u> , dvs <u>reella tal</u> , utan var
sofistiska eller IMAGINÄRA TAL !

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univ lektor Olle Axling

RAFAELE BOMBELLI 1572 och SIMON STEVIN 1585

SYNKOPERAD ALGEBRA och VARIABELNOTATION

I *L'ALGEBRA* BLANDAR BOMBELLI FÖRKORTNINGAR och VARIABLER

EKVATIONEN $4 + \sqrt{24 - 20x^2} = 2x$ skrivs

$$4.p.\ R.q.\ \lfloor\ 24.\ m.\ \overset{2}{20}\ \rfloor \text{ Eguale a } \overset{1}{2}$$

I *DE THIENDE* skriver STEVIN ekvationen

$$3x^2 + 4 = 2x + 4 \text{ som}$$

3 ②+ 4 egales a 2 ①+ 4

Likhetstecknet = först 1557 i *The Whetstone of witte* av Robert Recorde (1510- 1558)

STEVIN inför DECIMALTAL (Bråk)

STEVIN skriver decimalbråket 0,3759 som

3①7②5③9④

8, 937 skriver han

8⓪9①3②7③

STEVIN är nära att införa ett *kontinuum.*
Man kan skriva hur många decimaler som helst och skjuta in nya mellan de man skrivit.

Under franska revolutionen ca 200 år senare infördes decimalsystemet tillsammans med metersystemet.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Olle Axling

P- gradsekvationer. Finns formel för rötterna i koefficienter ?

Cardanos formel för 3-gradsekv fick många att söka en formel till p-gradsekvationen $x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \ldots + a_0 = 0$ där rötterna x_i uttrycks i ekvationens koefficienter a_k och där den "yttersta" roten är av ordning p.

EXEMPEL av L. Euler ca 1750

Ekvationen $x^5 - 2625x - 61500 = 0$ har enligt Euler roten

$$x = \sqrt[5]{75\,(5+4\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225\,(35+11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35-11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{75\,(5-4\sqrt{10})}$$

EXEMPEL av C.F. Gauss (1777-1855) ca 1795

För att konstruera en regelbunden 17-hörning ville Gauss lösa $z^{17} = 1$ med kvadratrötter. Lösningarna kan ju skrivas

$$z_k = e^{2i\pi k/n} = \cos(2\pi k/n) + i\sin(2\pi k/n)\ ,\ k = 0, 1, \ldots, 16.$$

C.F.Gauss visade denna svårfunna formel

$$\cos(2\pi/17) = \frac{1}{16}(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} +$$

$$+\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}).$$

Av den framgår det att man med passare och linjal kan konstruera en regelbunden 17-hörning. Efter denna framgång bestämde sig Gauss för att bli matematiker.
På Gauss gravsten i Göttingen kan man nu se en sådan.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univlektor Olle Axling

Niels Henrik Abel och Femtegradsekvationen

För femtegradsekvationen bevisade Abel följande enkla Sats

Om ekvationen är lösbar med radikaler, dvs rotutdragningar, har den exakt en reell rot eller 5 reella rötter

Ekvationen $x^5 - 4x^4 + x^3 + 4x^2 + 10x - 12 = 0$
har rötterna $1, 2, 3$ och de konjugerade rötterna
$1 \pm i$ och kan alltså inte lösas med radikaler.

Ett djupare resultat av Abel :

Om en ekvation är av primtalsgrad p med $p > 2$ och x och y är två rötter, kan de andra rötterna uttryckas som polynom i x och y.

Abel visade att rötterna vid lösbarhet måste vara på formen
$r = r_0 + \sqrt[p]{r_1} + \ldots + \sqrt[p]{r_{p-1}}$ där alla r_i är rötter till ekvationer av lägre grad än p.

Lagranges förmodan att den yttersta roten skulle vara av ordning p visade sig alltså vara korrekt.

Evariste Galois (1811-1832) kunde 1831 ge en abstrakt algebraisk karakterisering av vilka ekvationer som hade egenskapen att kunna lösas med en formel bildad från dess koefficienter.

Den nya algebraiska teori som kom att uppstå från Galois nya ideer om grupper kallas nu *Galoisteori*.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univ lektor Olle Axling

FERMATS SISTA SATS FLT $x^n + y^n \neq z^n, \forall n > 2$

Fermat påstod i marginalen av sin *Aritmetica* av Diofantos att han hade ett bevis, ett *demonstrationem mirabilem*

NÅGRA RESULTAT

Alla lösningar för $n = 2$ finns hos Euklides och kanske redan hos babylonier.

Fermat bevisade FLT för $n = 4$ och L. Euler 1770 för $n = 3$

Sophie Germain visade 1800 att FLT var sann för oändligt många n av en viss typ.

Dirichlet visade 1825 FLT för $n = 5$ osv.. Speciella bevis för olika n

Man hade visat FLT för $n < 4\,000\,000$ och att i ett eventuellt motex måste $x, y, z > 10^{75000000}$ år 1980

1983 visste man att det finns högst ändligt många lösningar (rel primiska)

Shimura-Taniyamas förmodan 1976 ST

ST: Varje elliptisk kurva över Q är *modulär.*

K. Ribet: Om $a^n + b^n = c^n$ är ett motex mot FLT är den elliptiska kurvan $(*) y^2 = x\,(x - a^n)\,(x + b^n)$ inte modulär.

Andrew Wiles (f. 1953) föresatte sig att visa ST, lyckades inte helt, men 1995 visade han att (*) var modulär.

Logiken i Wiles bevis

$\neg$ FLT $\Longrightarrow$ (*) inte modulär

ST $\Longrightarrow$ (*) är modulär och alltså
ST $\Longrightarrow$ FLT

1999 visades ST i sin helhet av Weils elev Richard Taylor m fl.

En liknande förmodan av Euler

L.Euler 1769 : Den diofantiska ekvationen
$a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ saknar heltalslösningar.

1988 fann N.Elkies lösningen

$a = 2682440$, $b = 15365639$, $c = 18796760$
och $d = 20615673$

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Universitetslekt Olle Axling

Fermat i marginalen

1621 utgav förlaget Bachet "Arithmetica" av Diofantos. Av de 13 böckerna finns 5 bevarade på grekiska och latin.
I marginalen på sitt exemplar skrev
Pierre de Fermat

Cubum autem in duos cubus, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividera: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

P. Fermats son Samuel gav ut en ny utgåva 1670 med faderns marginalanteckningar i marginalen vid Sats 8 i Bok 2.
Observatio Domini Petri de Fermat