LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Olle Axling Matematikens historia HT 2008

ANALYSENS och KALKYLENS HISTORIA

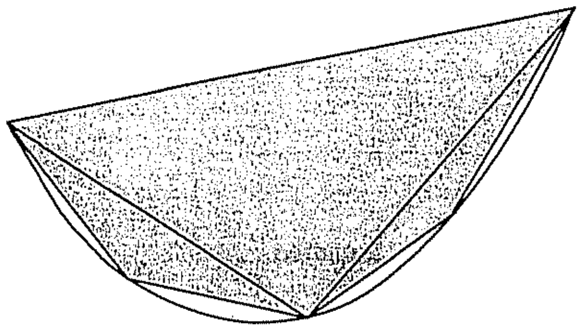
Från Arkimedes till Cauchy

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univ lektor Olle Axling

Matematikens historia

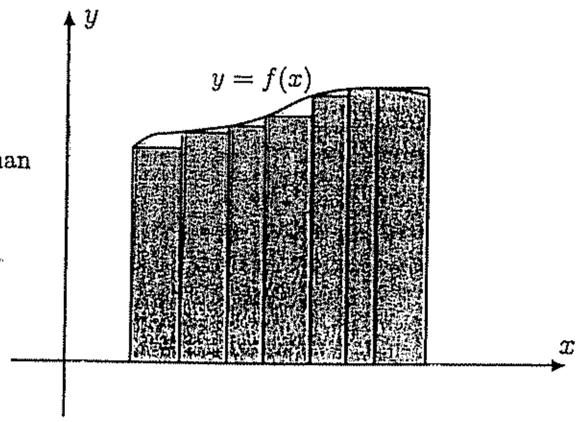
DE VIKTIGASTE STEGEN FÖR LÖSNINGEN AV

Problemet att bestämma arean under en kurva.

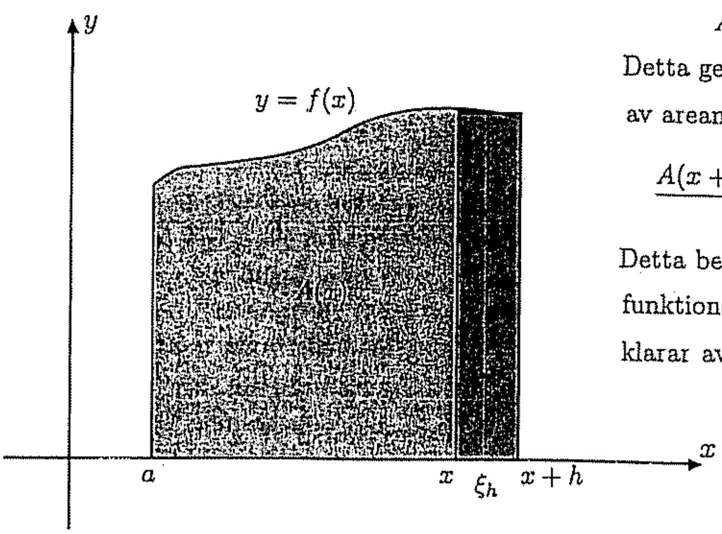


Arkimedes (287 - 212 fKr) bestämde arean av ett parabelsegment genom att succesivt fylla ut segmentet med trianglar vars areor han kunde bestämma. Trianglarnas areor bildade en geometrisk serie.

Motsvarande problem att finna arean under en kurva $y = f(x)$ försökte man på 1600-talet lösa genom att finna metoder för att summera rektangelareor.



Analysens huvudsats



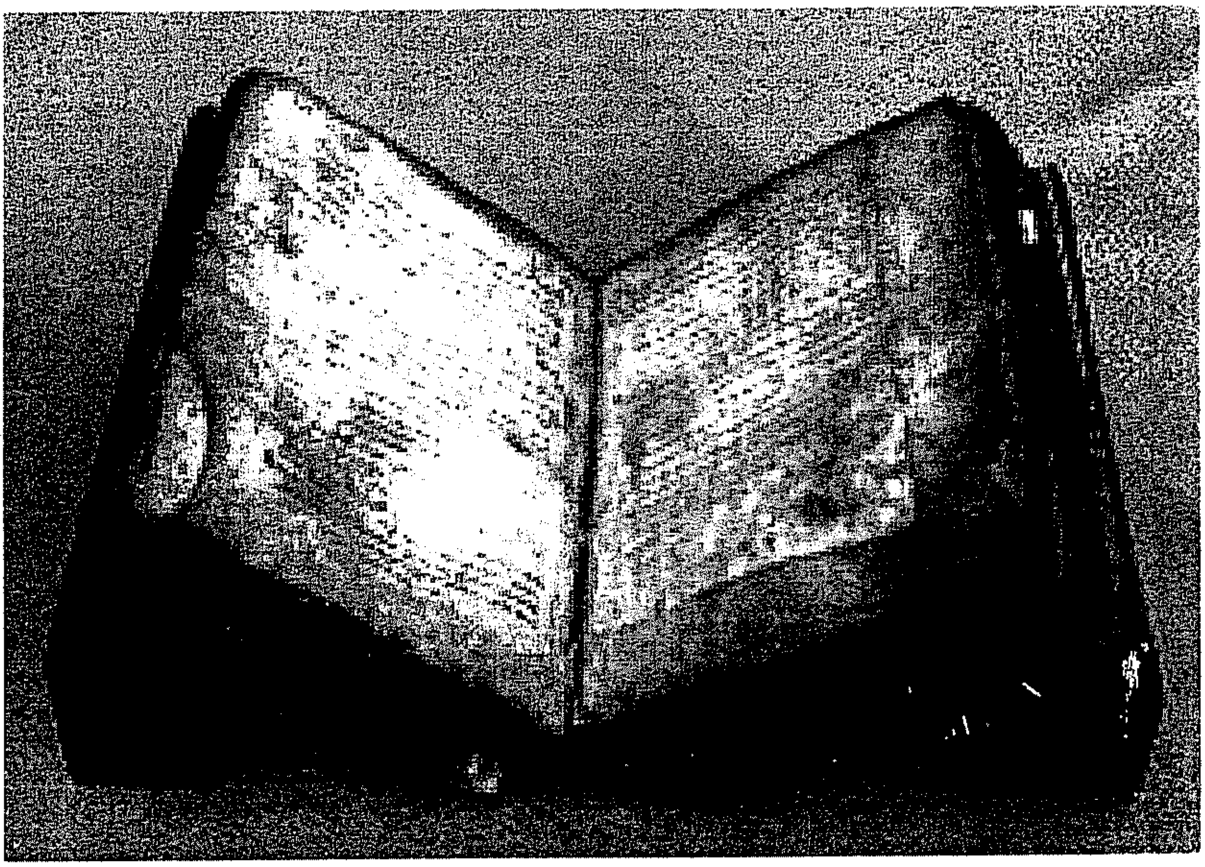
Den lite mörkare rektangelns area ges av

$$A(x+h) - A(x) = h \cdot f(\xi_h).$$

Detta ger oss differenskvoten för tillväxten av arean $A(x)$.

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(\xi_h) \to f(x), h \to 0.$$

Detta betyder att $A'(x) = f(x)$. Om vi känner funktionen kan vi bestämma arean om vi klarar av hitta den primitiva funktionen till f.



LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Olle Axling

ARKIMEDES TID och PLATS

- Arkimedes 287BC - 212BC i Siracusa på Sicilien.
  Fadern Fidias var astronom hos kung Hieron II.
  Faderns världsmodell används av A i Sandräknaren tillsammans med Aristarkos heliocentriska modell.

- *Arkimedes* anses betyda *den sluge mästaren*

- ca 250BC reser A till Alexandria för studier. A arbetar med Eratosthenes, överbibliotekarien i Museion, och Konon från Samos som skrev om kägelsnitt.

- A skrev på dorisk grekiska till kolleger och inte på de bildades grekiska språk *korei.*

- Inga papyrusrullar i original av A finns kvar.

- Äldsta handskrivna boken med A:s verk görs ca 900 AD i Konstantinopel.
  Byzans kultur blomstrade och A studerades intensivt i många skolor. Korståget 1204 gjorde slut på detta.

- 1229AD. Kristna munkar , bl. a. Iohannes Myronas återanvänder pergamentet från A:s bok för att göra en ny bönebok *Euchologion.*

Linköpings universitet
Matematiska Institutionen

Olle Axling

- Böneboken är en *PALIMPSEST*. Från grekiska *palin*: åter och *psaein*: skrapa. 174 pergamentark från 7 olika böcker användes till den nya böneboken.
- 1899. Kyrkomannen Papadopoulos katalogiserar patriarken av Jerusalems manuskript i klostret Metochion i Konstantinopel. Han skriver av en del matematik som han ser i undertexten i böneboken.
- Dansken J. L. Heiberg, professor i grekiska vid Köpenhamns universitet, läser om dessa anteckningar och ber att få böneboken sig tillsänd men nekas.
- 1906. Heiberg besöker klostret med förstoringsglas och kamera. Han lyckas tolka 80 % av A:s undertext. Han gör ett återbesök 1908.
- 1910 - 1915. Heiberg publicerar *Arkimedes verk*
- 1908 - 1930. Palimpsesten är försvunnen eller stulen.
- ca 1930 - 1991. En fransk turist köper palimpsesten i en basar i Istanbul och tar den hem till Paris.
- 1991. Franska familjen värderar palimpsesten hos Christies auktionsfirma.
  Uppskattat värde 0.8 till 1.2 miljoner dollar.
- 1998. Palimpsesten säljs för 2.2 miljoner dollar. Lånas ut till Walters Art Museum i Baltimore.

Linköpings universitet Olle Axling

ARKIMEDES SJU VERK i PALIMPSESTEN

- Om plana ytors jämvikt.

  Utifrån 7 postulat bevisas hävstångslagen.

- Om spiraler.

  Här bestäms bl. a. tangenter till spiraler.

- Om mätning av cirkeln.

  Här finns beviset för att det är samma π i arean som i omkretsen och approximation med 96-hörningar.

- Sfären och cylindern. Verk I och II.

  (A : s gravmonument med inskriptionen 2 : 3)

- Om flytande kroppar.

- Metoden med Mekaniska teorem.

  Här finns en kvadrering av parabelsegmentet på ett nytt sätt med en oändlig (!) summa.

- Stomachion. (Betyder *magplågaren*).

  Ett geometriskt och kombinatoriskt pussel påminnande om ett tangram. Kombinatoriken tycks alltså vara mycket äldre än man trott.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univ lektor Olle Axling

ANALYSENS UTVECKLING. ANTIKEN.

Med ANALYS avses här beräkning av tangent, normal, area och volym.

ANTIKEN

PYTHAGORAS definierade förhållanden, men visste också att det fanns inkommensurabla storheter. EUDOXOS (408 –355) vid PLATONS akademi definierade förhållande mellan jämförbara storheter a, b, c, d.

a:b = c:d omm ma < nb ger mc < nd, ma = nb ger mc = nd och ma > nb ger mc > nd. Förhållandena är inte TAL. Detta fungerar även på inkommensurabler!

EUDOXOS EXHAUSTATIONSMETOD

Om man från en given storhet tar bort mer än hälften av den, sedan från återstoden tar bort mer än hälften o s v, har men efter ändligt många steg en rest som är mindre än varje annan förut given storhet.

Denna metod användes av E, och t ex ARCHIMEDES (287 – 212) till att med motsägelsebevis beräkna areor och volymer.

ARCHIMEDES Något av vad han gjorde.

MÄTNING AV CIRKLAR och π MED STOR NOGGRANNHET.
DETTA GJORDES MED
OM - OCH INSKRIVNINGAR AV CIRKLAR
SAMT UPPSKATTNINGAR AV RÖTTER.

AREA- OCH VOLYMSBERÄKNINGAR
Bra ex är A:s beräkning av parabelsegmentets och sfärens area.

OM SPIRALER. OM TYNGDPUNKTER.

" OM METODEN", hur han tänkte själv. Funnen 1906 av dansken Heiberg.

ANALYS SEN MEDELTID. Nicole Oresmes 1323 – 1382 i Paris

" *Tractatus de latitudinibus formarum*" om formers latituder med diagram är en slags tidig integrering. Basen i diagrammet utgörs av ett tidsavsnitt och höjder , latituder representerar hastigheter. Arean so begränsas är då sträckan. Ingen förklaring ges. O. visar rörelselagar med diagrammen.

Oresme summerade serier med geometriska metoder, som areor.

ANALYS RENÄSSANSEN OCH NYARE TID

Reaktion mot skolastiken. T ex studeras Alexandrinernas praktiska och resultatriktade matematik intensivt. Spec Arkimedes.

FRANCOIS VIETE (1540 – 1603) :s symbolik används och förfinas.

INFINITESIMALER och INDIVISIBLER

Flera började nu betrakta areor och kroppar som sammansatta

av ∞ många delar. INDIVISIBLER kunde ha lägre dimension, en yta kunde sammansättas av sträckor t ex.

Ett ex på detta är JOHAN KEPLER (1571-1630) :s arbete om vintunnor " Nova stereometria doliorum vinariorum" , där tunnorna skivas i cylindrar infinitesimalt tunna vars volym summeras. En cirkel uppfattade han som en polygon med infinitesimala sidor , och ∞ många.

GALILEO GALILEO (1564 – 1642) studerade ∞ mängders mysterier, som skulle utredas av GEORG CANTOR m fl i sent 1800- tal.

EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647) visade att en ∞ lång kropp vid rotation kunde generera en ändlig volym. Rotera 1/x , x>1.

G.P. de ROBERVAL beräknade arean under " x upphöjt till n " på [0,a] till $\dfrac{a^{n+1}}{n+1}$ som en geometrisk summa och kasta "små" termer.

RENE DESCARTES (CARTESIUS) 1596 – 1650 (i Stockholm)

D. förfinade Viete :s symbolism. Han löste geometriska problem med algebra och omvänt och löste ekvationer geometriskt. Talteoretiker. Vänskapliga tal. Löste bl a tangent - och subnormalproblem.
D. är mest känd som rationalistisk filosof. " Cogito ergo sum "

PIERRE de FERMAT 1601 – 1665 jurist i Toulouse

Talteoretiker : F:s sista och lilla sats berömda.
Använde algebraiska ekvationer för kurvor tillsammans med infinitesimala metoder. F. beräknade många areor under kurvor

$\int_0^p x^r\,dx$ och $\int_p^\infty x^{-r}\,dx$ med approximering med geometriska

summor. Indelning : $p, pk, pk^2, pk^3, ..$ med $0 < k < 1$, följt av $k=1$.

Fermat löste extremproblem med infinitesimaler , men kritiserades för oklarheter.

ISAAC BARROW 1630 - 1677 (Newtons lärare i Cambridge)

- Barrows föreläsningar är sammanställda av Isaac Newton på 1660 –talet. I dessa kan man finna samband mellan tangent- och areaproblemet (derivering resp antiderivering) , men inget förklaras eller visas. Hans framställning är <u>geometrisk</u> och sambandet används aldrig till någon areaberäkning. Barrow kan därför inte sägas ha uppfunnit kalkylen.

ISAAC NEWTON 1642 – 1727 (Barrows efterträdare i Cambridge)

N. arbetade med kurvor i x, y kallade <u>fluenter</u> och deras hästigheter $\dot{x}, \dot{y}$, kallade fluxioner. o står för ett infinitesimalt tidstillskott.

Newton kan genom substutition av tillskotten , division med o följt av $o=0$, beräkna <u>tangent lutningen</u> $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ Han fann ett samband

mellan arean y(x) under en kurva och kurvans funktion $\dot{y}=f(x)$, $\dot{x}=t$.

Isaac Newton
(1642 – 1726)

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 – 1716)

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univlektor Olle Axling

KALKYLENS FRAMVÄXT

MOTIVERINGAR FÖR KALKYLEN

KALKYLEN VÄXTE FRAM SOM SVAR PÅ BEHOV ATT LÖSA STORA VETENSKAPLIGA PROBLEM PÅ 1600 – TALET. SÄRSKILT DESSA

1 GIVET DEN DISTANS EN KROPP TILLRYGGALÄGGER SOM FUNKTION AV TIDEN, ANGE DESS ACCELERATION OCH HASTIGHET I EN GODTYCKLIG TIDPUNKT.

OMVÄNT, GIVET EN KROPPS ACCELERATION SOM FUNKTION AV TIDEN, FINNS DESS LÄGE OCH HASTIGHET.

2 GIVET EN KURVA, FINN I EN GIVEN PUNKT PÅ KURVAN DESS TANGENT. DETTA VAR SÅVÄL ETT RENT GEOMETRISKT SOM ETT TILLÄMPAT PROBLEM. OPTIK VAR ETT BETYDANDE ÄMNE PÅ 1600- TALET OCH LINSER INTRESSERADE SÅDANA SOM FERMAT, DESCARTES, NEWTON OCH HUYGENS.

3 GIVET EN FUNKTION, FINN DESS MAXIMA OCH MINIMA. DETTA VAR AV INTRESSE I T EX BALLISTIK OCH ASTROFYSIK.

4 OM KURVOR OCH YTOR. ATT GIVET EN KURVAS EKVATION ANGE DESS LÄNGD VAR VIKTIGT FÖR ASTRONOMIN. BERÄKNING AV AREOR BEGRÄNSADE AV KURVOR, VOLYMER BEGRÄNSADE AV YTOR, TYNGDPUNKTERS LÄGE OCH VILKEN KRAFT GRAVITATIONEN UTÖVADE PÅ EN PLANET VAR ANDRA PROBLEM.

T EX ARKIMEDES METODER MED UTTÖMNING VAR INTE GENERELLA NOG UTAN KRÄVDE STORT SKARPSINNE I VARJE ENSKILT FALL.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univ lektor Olle Axling

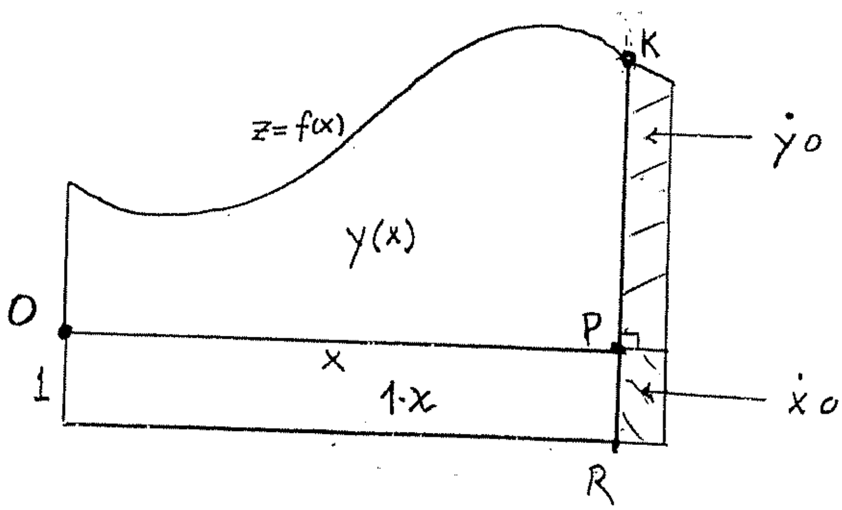
NEWTON FLUXIONER och AREA

I figuren nedan rör sig punkten P i tiden längs en linje OP.
KR är vinkelrät mot OP. $|PR| = 1$. Arean av undre rektangeln är $= x$.
Sträckan PK har rört sig över en yta, med area $y(x)$, under kurva $z = f(x)$.
$|PK| = f(x)$. Under ett infinitesimalt tidstillskott ökas fluenterna x, y med $\dot{x}o, \dot{y}o$, som är areor av rektanglar med höjder $|PR| = 1$ resp $|PK| \approx f(x)$, så

att $\dot{x}o \big/ |PR| = \dot{y}o \big/ |PK|$ som ger $\dot{y} / \dot{x} = |PK| = f(x)$. Om man väljer

$\dot{x} = 1$ så fås $\dot{y} = f(x)$, ofta kallad analysens huvudsats.

Newton ersatte senare många härledningar, som använde infinitesimaler, med resonerande om *ultimata förhållanden*, kvoter mellan storheter som går mot 0. Detta görs i hans berömda *PRINCIPIA*. För att derivera x^n bildas $(x+0)^n - x^n$, binomialutvecklas och divideras med o som får gå mot 0.



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ 1646 – 1716

Liksom Descartes är Leibniz kanske mer känd som rationalistisk filosof. Leibniz är den som använde de beteckningar vi använder i analys i dag.

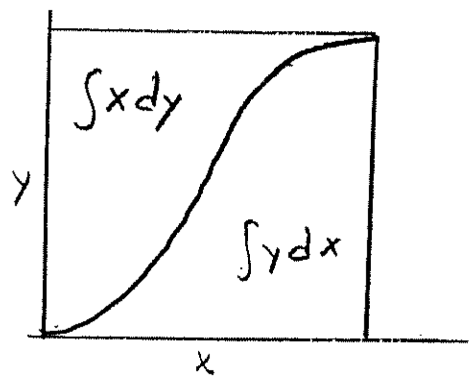
Extremvärdesproblem och tangentproblem löste Leibniz ofta med hjälp av sin karakteristiska triangel (sidor ds, dx, dy) och likformighet.

För en kurva y(x) betecknade L arean under kurvan först med " omn.y" men 29 /10 1675 stod för första gången skrivet $\int y dx$, kallad summa.

Om y(0) = 0 visade Leibniz att

$\int x dy = xy - \int y dx$ partiell integration

$z = \int y dx \Rightarrow dz = y dx$ huvudsatsen



Leibniz hade inte den dynamiska syn som Newton, som betraktade fluenter som varierade med tiden. Där Newton såg hastigheter och sträckor såg Leibniz differenser och summor. Kalkylen upptäcktes oberoende av dem , de var lika lite rigorösa och en del missuppfattningar kom att orsaka en dispytmed långvaria efterdyningar.

Läroböcker vid universiteten såg mycket olika ut beroende på om det var en kontinental " Analyse des infinement petits pour ..." a la Lebniz eller en engelsk " A treatise of fluxions ..." according to Newton.
Kanske kan man se motsatsparet Ingenjör Newton mot filosofen Leibniz ?

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ NOTATIONER

1673 I FLERA MANUSKRIPT

SUMMA HETER *OMNIA* PÅ LATIN SOM ÄR LEIBNIZ SPRÅK

KVANTITETEN dy SKRIVER LEIBNIZ SOM l OCH INTEGRALEN AV y

SKRIVS $omn.yl.$ EFTERSOM y ÄR $omn.l$ FÅS

$$omn.yl = \overline{omn.\overline{omn.l}\frac{l}{a}} \qquad \text{DÄR } a \text{ ÄR } dx$$

OCH ÖVERSTRYKNING FUNGERAR SOM PARENTESER.

LEIBNIZ VISAR MED INFINITESIMALER ATT $omn.yl = \frac{y^2}{2}$ OCH HAN HAR ALLTSÅ

VISAT $\frac{y^2}{2} = \int (\int dy)\,\frac{dy}{dx}dx = \int y\,\frac{dy}{dx}\,dx$ OCH ÄR STOLT.

29 OKTOBER 1675 VÄRLDENS FÖRSTA INTEGRALTECKEN !

I DEN DAGENS MANUSKRIPT SÄGER LEIBNIZ ATT HAN SKALL SKRIVA

$\int$ FÖR $omn.$ OCH ANGER $\int x = \frac{x^2}{2}.$

11 NOVEMBER 1675

I DETTA MANUSKRIPT SÄGERR LEIBNIZ ATT HAN SKRIVER $\int$ FÖR SUMMA OCH

x/d FÖR DIFFERENSEN MELLAN TVÅ KONSEKUTIVA $x-$ VÄRDEN SOM ÄR dx.

KRITIK MOT DEN NYA ANALYSEN

Den svåraste kritiken kom från filosofen Georg Berkeley, grundare av den kunskapsteoretiska idealismen. " Esse est percipe" Berkeley kritiserade spec Newton för oklarheter vad gäller begrepp som rella tal, infinitiemaler, kontinuitet och konvergens men med andra termer. "Vad är infinitiemaler för gångna storheters vålnader som ömsom finns och ömsom inte finns ? " Här gav teologen igen för vad han fått utstå.

ANALYS EFTER NEWTON LEONARD EULER 1707 – 1783

De första verken som använde kalkylen för att studera funktioner som allmänt begrepp (och inte kurvor) skrevs av Euler, tidernas mest produktive matematiker och problemlösare. För Euler var integration det inversa till derivering, inta att räkna ut en area. 1769 presenterar Euler begreppet <u>dubbelintegral</u> och gör variabelbyten.

RIGORÖSA DEFINITIONER BERNHARD BOLZANO 1781-1848

Bolzano och Augustine Cauchy (1789-1857) gav goda definitioner av de svåra begreppen gränsvärde , kontinuitet ,derivata och integral. Att de inte är vad vi har i dag beror på att man inte hade någon definition av begreppet *reellt tal.* Konvergens och likformig konvergens var länge problematiska och många misstag gjordes vid gränsövergångar och omsummeringar. Först 1858 kunde RICHARD DEDEKIND (1831-1916) definiera reella tal med s k *snitt* .

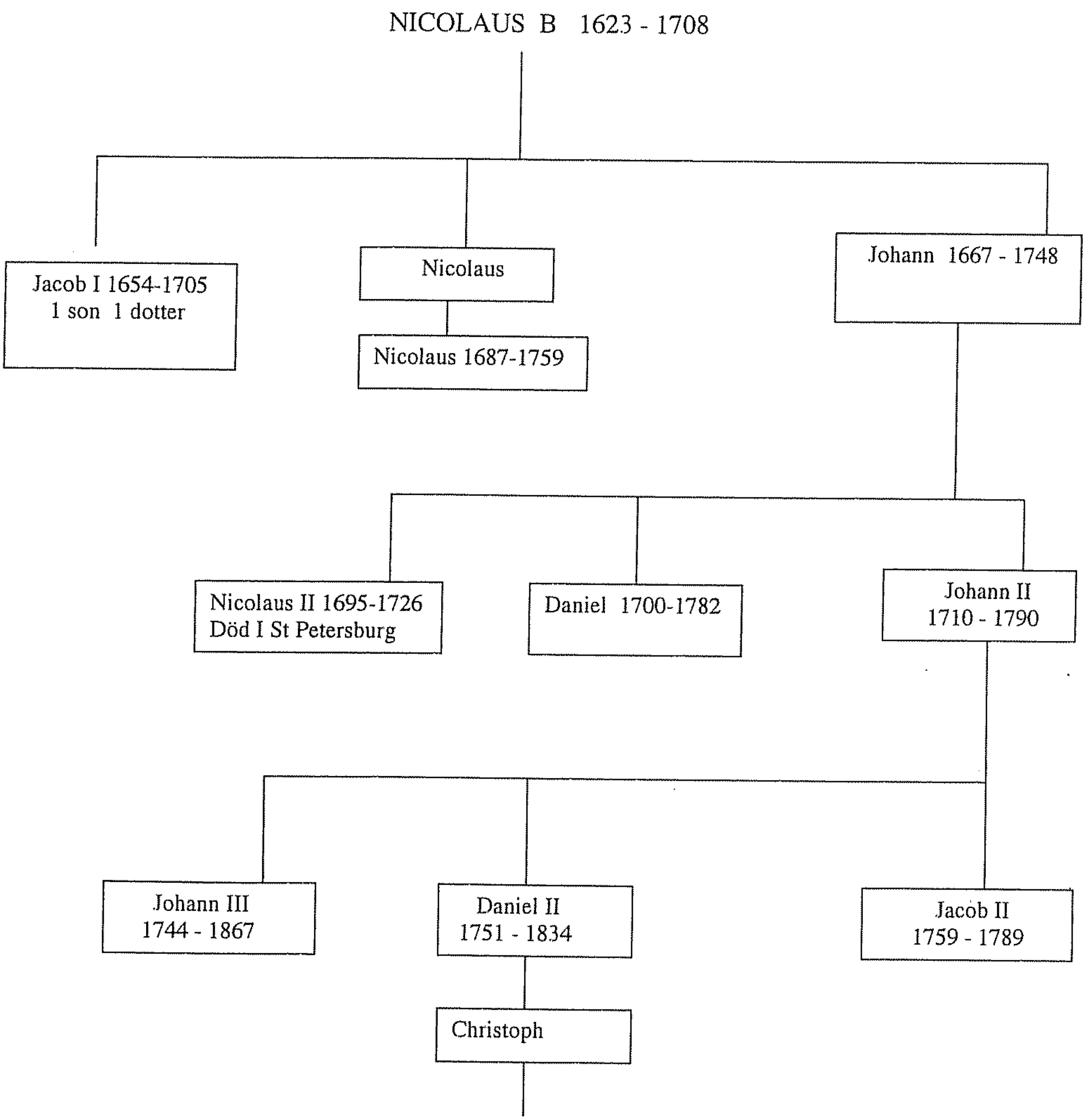
KOMPLEX ANALYS CAUCHY OCH C. F. GAUSS (1777-1855)

Från ca 1820 utvecklades analysen med komplexvärda funktioner av komplexa variabler av bl. a Cauchy och Gauss. Den senares doktorsavhandling 1799 är ett bevis för "Algebrans fundamentalsats" som säger att varje polynom har ett nollställe.


1957
250 ЛЕТ
СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
ВЕЛИКОГО
МАТЕМАТИКА,
АКАДЕМИКА
ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
40 к.
1707 — 1783
Почта СССР

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Univlektor Olle Axling

SLÄKTEN BERNOULLI



LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Univlektor Olle Axling

AUGUSTIN L CAUCHY 1789 – 1857

CAUCHY ÄR SKAPAREN AV DEN MODERNA ANALYSEN

STRINGENSKRAVEN HÖGRE ÄN FÖREGÅNGARNAS och INGA GEOMETRISKA MOTIVERINGAR

I CAUCHYS MEST BERÖMDA ARBETE " Cours d´analyse"

GES NYA DEFINITIONER AV ANALYSENS BEGREPP .

C AUCHY:s GRÄNSVÄRDESDEFINITION 1823

" När de successiva värdena av en variabel obegränsat närmar sig ett fixt tal, så att de slutligen skiljer sig från detta med ett godtyckligt litet belopp, kallas detta tal gränsvärdet för variabeln. "

NEWTON OCH LEIBNIZ INFINITESIMALER DEFINIERAS
" En variabel är oändligt liten, när dess värde minskar obegränsat, så att det konvergerar mot gränsvärdet noll"
INFINITESIMALERNA ÄR *VARIABLER* OCH INTE SMÅ TAL

CAUCHY DEFINIERAR KONTINUITET SÅLUNDA

" En funktion f(x) är kontinuerlig i ett intervall, om en oändligt liten ökning av variabeln x i intervallet ger en oändligt liten förändring av funktionen själv.

DERIVATAN DEFINIERAS AV C. OCH B. BOLZANO 1817

" Derivatan av f(x) är den kvantitet som kvoten $f(x+\Delta x) - f(x) / \Delta x$ närmar sig obegränsat, när Δx närmar sig noll genom positiva och negativa värden "

Man trodde då att en kontinuerlig funktion alltid är deriverbar.
LIKFORMIG kontinuitet kom först 1870 av HEINE

CAUCHY DEFINIERAR INTEGRALEN SOM GRÄNSVÄRDE AV EN SUMMA och använder likformighet omedvetet

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

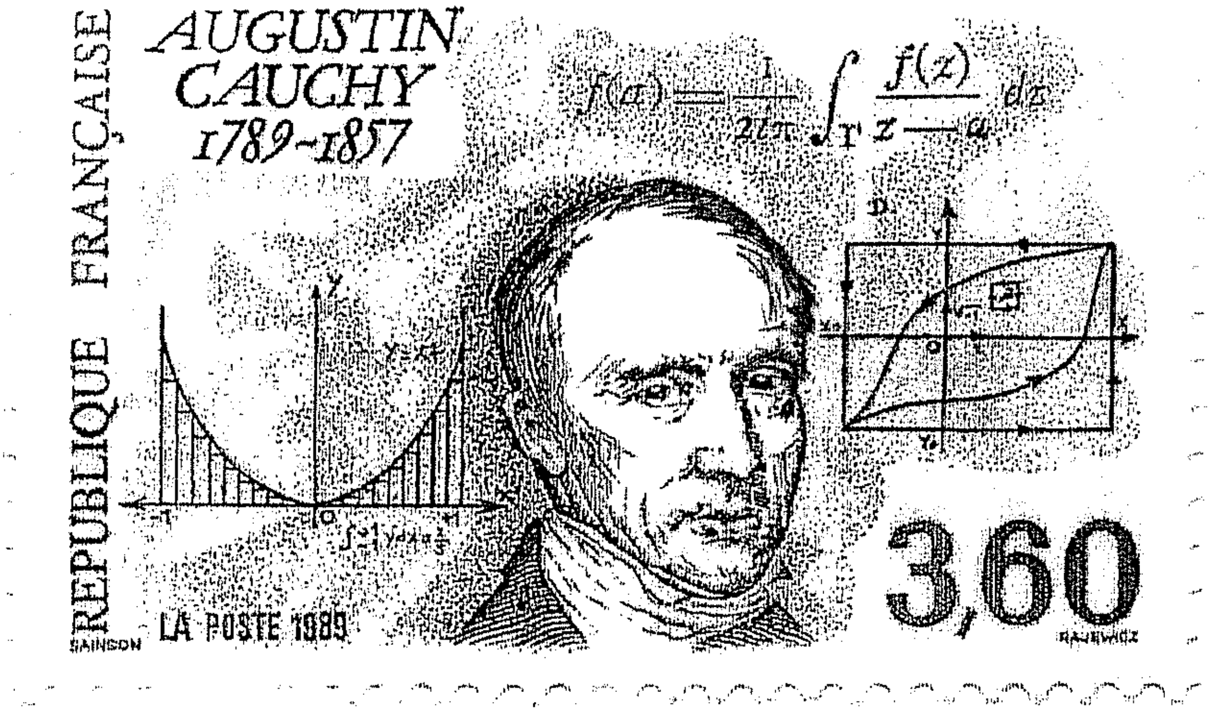
Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.


REPUBLIQUE FRANÇAISE
AUGUSTIN CAUCHY
1789-1857
$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz$
LA POSTE 1989
3,60
SAINSON