

Datorlaboration 3 med geometriprogrammet Cabri

Logga in som för Laboration 1 och 2 med din student-e-post-identitet och -lösenord, först en gång och sedan en gång till för att öppna Windows.

I handledningarna för Laboration 1 och 2 finns beskrivningar av ett stort antal av Cabris ritfunktioner. Här beskrivs bara några funktioner som inte har behandlats där.

Med Ruta 10: Label får man en liten ruta intill ett objekt (punkt, linje m.m.), som anges i klartext, där man kan skriva in en beteckning för objektet. Det är mycket användbart för att ge tydlighet i följande övningar.

Med Ruta 4: Conic ritas ett kägelsnitt d.v.s. en parabel, ellips eller hyperbel (eller i undantagsfall två linjer) genom fem punkter där man klickar. Testa och se hur kurvan förändras då någon av punkterna flyttas. Mer precisa konstruktioner, som utgår från definitionerna av dessa kurvor visas i följande övningar.

Övning 1

(a) Rita en (lodrät) linje L , en linje L_0 vinkelrät mot L och en punkt F på L_0 till höger om L . Rita sedan en punkt Q på L och en linje genom Q vinkelrät mot L samt skärningspunkten P mellan denna linje och mittpunktsnormalen till sträckan FQ . Vad bör gälla för avstånden mellan P och F och mellan P och Q ? Kontrollera genom att mäta dem. Studera hur P rör sig då Q flyttas på L och hur avstånden ändras. Vilken slags kurva bör P röra sig längs?

Välj fyra nya punkter på linjen L och gör motsvarande konstruktion av punkter som för P . Använd nu Ruta 4: Conic för att rita en kurva C genom P och dessa fyra nya konstruerade punkter. Vad blir det för kurva? Studera hur P rör sig då Q rör sig och hur kurvan C förändras då F flyttas på linjen L_0 .

(b) Använd Ruta 11: Hide/Show för att dölja alla objekt i bilden utom kurvan C , linjerna L och L_1 och punkten F . (Man skall **inte** radera med delete-tangenten. Varför?)

Fortsätt nu med att rita en linje L' som skär kurvan C i två punkter och rita dessa punkter samt mittpunkten P' på sträckan mellan dem. Rita sedan parallellt med L' en annan linje L'' som också skär C i två punkter och rita dessa punkter samt mittpunkten P'' på sträckan mellan dem. Rita så en linje L''' genom P' och P'' samt skärningspunkten P_1 mellan L''' och C och slutligen en linje L_1 genom P_1 parallell med L' .

Studera hur linjen L_1 rör sig då man ändrar linjen L' eller punkten F . Vad tycks gälla för linjen L_1 ? För linjen L''' ? (Det senare kan undersökas med hjälp av Ruta 8: ...?)

(L_1 är tangent till C med tangeringspunkt P_1 och L''' är en sk diameter till C . I övning 3 på laboration 4 används ett annat sätt att konstruera tangenten, som hänger samman med övning 5.3 på sid 11 i kompendiet om kägelsnitt.)

Radera hela bilden eller öppna ett nytt ritfönster för

Övning 2

(a) Rita en (vågrät) linje L och två punkter F_1 och F_2 på L och mittpunkten M på sträckan F_1F_2 samt en cirkel C_0 med medelpunkt F_1 och radie större än avståndet mellan F_1 och F_2 . Strecka gärna cirkeln med Ruta 11: Dotted. Rita sedan en punkt Q på cirkeln C_0 och en linje genom F_1 och Q samt skärningspunkten P mellan denna linje och mittpunktsnormalen till sträckan F_2Q . Rita också sträckan PF_2 .

Studera hur punkten P rör sig då punkten Q rör sig på cirkeln C_0 . Vad gäller om längderna av sträckorna PF_2 och PQ ? Vad medför det för summan av längderna av PF_1 och PF_2 ? Vilken slags kurva bör P röra sig längs?

Välj fyra nya punkter på cirkeln C_0 och gör motsvarande konstruktion av punkter som för P . Använd Ruta 4: Conic för att rita en kurva C genom P och dessa fyra nya konstruerade punkter. Vad blir det för kurva? Studera hur P rör sig då Q rör sig och hur kurvan C förändras då punkten F_1 eller F_2 flyttas på linjen L . Vad för slags kurva bör C bli då F_2 sammanfaller med F_1 ?

(b) Vad för slags kurva blir C , om radien i cirkeln C_0 ändras eller någon av punkterna F_1 och F_2 flyttas, så att F_2 ligger utanför C_0 ? Eventuellt kan punkten P (eller någon av de andra punkterna som bestämmer C) då hamna utanför den synliga bilden. Flytta i så fall Q längs C_0 så att P kommer in i bilden.

För längderna av sträckorna PF_2 och PQ gäller detsamma som i (a). Men vad medför det nu för skillnaden mellan längderna av PF_1 och PF_2 och vilken slags kurva blir då C ?

(c) Ändra radien i C_0 eller flytta någon av F_1 och F_2 , så att båda åter ligger innanför C_0 .

Använd Ruta 11: Hide/Show för att dölja alla objekt i bilden utom kurvan C , linjen L , cirkeln C_0 och punkterna F_1 , F_2 och M .

Fortsätt nu med att rita en linje L' som skär kurvan C i två punkter och rita dessa punkter samt mittpunkten P' på sträckan mellan dem. Rita sedan parallellt med L' en annan linje L'' som också skär C i två punkter och rita dessa punkter samt mittpunkten P'' på sträckan mellan dem. Rita så en linje L''' genom P' och P'' samt skärningspunkterna P_1 och P_2 mellan L''' och C och slutligen en linje L_1 genom P_1 parallellt med L' och en linje L_2 genom P_2 också parallellt med L' .

Studera hur linjerna L_1 och L_2 rör sig då man ändrar linjen L' eller flyttar punkten F_1 eller F_2 . Vad kan sägas om skärningspunkten mellan linjerna L''' och L ?

(L_1 och L_2 är tangenter till C med tangeringspunkter P_1 resp P_2 och L''' är en diameter till C .)

(d) Ändra åter radien i cirkeln C_0 eller flytta någon av punkterna F_1 och F_2 , så att F_2 ligger utanför C_0 och kurvan C får formen i (b).

Det kan då hända att linjen L' eller L'' inte skär kurvan C och då ritas förstås inte punkten P' resp P'' och inte heller linjen L''' , punkterna P_1 och P_2 och linjerna L_1 och L_2 . Flytta då L' eller L'' så att båda skär C och då ritas P' , P'' och L''' igen automatiskt.

Men med vissa lutningar för linjen L' skär då linjen L''' inte kurvan C och därmed ritas inte punkterna P_1 och P_2 och inte heller linjerna L_1 och L_2 . Detta beror av lutningen för L' i förhållande till lutningarna av kurvans sk asymptoter, som kan konstrueras på följande sätt:

Rita en cirkel C^* med medelpunkt M och radie lika med längden av sträckan MF_1 samt en linje L^* som går genom skärningspunkten mellan linjen L och kurvan C och är vinkelrät mot L . Rita sedan skärningspunkterna P_1^* och P_2^* mellan C^* och L^* samt en linje L_1^* genom M och P_1^* och en linje L_2^* genom M och P_2^* . Göm gärna C^* , L^* , P_1^* och P_2^* med Ruta 11: Hide/Show och färga gärna L_1^* och L_2^* i någon annan färg med Ruta 11: Color. Linjerna L_1^* och L_2^* kallas asymptoter till kurvan C .

Studera hur L_1^* och L_2^* ändras då kurvans form ändras (tex genom att man flyttar F_2). Studera också hur lutningen för linjen L' i förhållande till asymptoternas lutning påverkar linjen L''' och därmed avgör om punkterna P_1 och P_2 och linjerna L_1 och L_2 ritas eller inte.

(Även här är L_1 och L_2 tangenter till C med tangeringspunkter P_1 resp P_2 i de fall då de ritas. Linjen L''' är en diameter till C då den ritas.)

Med Ruta 3: **Regular Polygon** kan man rita en regelbunden månghörning med medelpunkt i en punkt där man klickar först och ett hörn där man klickar igen. Man kan sedan bestämma antalet hörn genom att flytta pilen runt (i form av en penna) och klicka en gång till när rätt antal visas inom parentes. Då ritas hela månghörningen. ("Antal" som inte är heltal ger en stjärnformad månghörning så att t ex $9/2$ ger en nio-hörning som går två varv runt den osynliga cirkel som hörnen ligger på och $30/11$ ger en trettio-hörning som går elva varv runt denna cirkel.)

Med Ruta 6: **Reflection** speglas (reflekteras) ett ritat objekt i en ritad linje (eller sträcka, stråle, triangelsida eller polygon sida) om man först klickar på objektet och sedan på linjen.

Med Ruta 6: **Symmetri** speglas (reflekteras) ett ritat objekt i en punkt om man först klickar på objektet och sedan på punkten.

Testa detta genom att rita t ex en triangel och en cirkel samt en linje och en punkt och spegla triangeln och cirkeln dels i linjen och dels i punkten. Studera vad som händer då man ändrar triangeln, cirkeln, linjen eller punkten.

Dessa ritfunktioner kan t ex användas i följande

Övning 4

med enkla exempel på sk tessellering (som behandlas i avsnitt 7 i geometrikompndiet).

(a) Rita (i ett tomt ritfönster) en triangel med olika långa sidor. Rita mittpunkten på en sida och spegla triangeln i denna punkt med Ruta 6: **Symmetry**. (För att rita mittpunkten med Ruta 5: **Midpoint** är det enklast att klicka en gång på sidan, inte på hörnen.) Upprepa denna konstruktion med de övriga sidorna i den första triangeln och sedan successivt i ett lagom antal steg med de "fria" sidorna i de nya trianglar som bildas (d vs de sidor som ännu inte är gemensamma för två trianglar). Kan man fortsätta denna procedur i all oändlighet och på det sättet täcka planet med ett mönster med trianglar som är kongruenta med den första och inte överlappar varandra? Studera hur mönstret förändras då man flyttar något hörn i den första triangeln.

(b) Rita (i ett tomt ritfönster) en fyrhörning med Ruta 3: **Polygon**. Rita den mycket oregelbunden och gärna icke-konvex men så att den inte skär sig själv. (Observera att man måste sluta med att klicka igen på det första hörnet för att polygonen skall ritas.) Gör samma konstruktioner som i (a) först med alla sidorna i denna fyrhörning och sedan successivt i ett lagom antal steg med de "fria" sidorna i de nya fyrhörningar som bildas. Kan man också fortsätta denna procedur i all oändlighet och på det sättet täcka planet med kongruenta icke-överlappande fyrhörningar med given form?

(c) Rita (i ett tomt ritfönster) en oregelbunden femhörning som inte skär sig själv och gör samma slags konstruktioner med spegling i sidornas mittpunkter som i (a) och (b). Verkar det vara möjligt att täcka planet med kongruenta icke-överlappande femhörningar av vilken form som helst?

(d) Rita en regelbunden sexhörning (i ett tomt ritfönster) och använd Ruta 6: **Reflection** för att först spegla den i alla sina sidor och sedan successivt fortsätta proceduren ett lagom antal steg med de nya sexhörningarna. Rita sedan en regelbunden femhörning (i ett tomt ritfönster) och gör om denna procedur.

Kan man täcka planet med kongruenta icke-överlappande regelbundna sexhörningar? Med kongruenta icke-överlappande fem-hörningar?

Glöm inte att logga ut först från Windows och sedan en gång till när laborationen är slut.