LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Olle Axling Matematikens Historia HT 2008

HISTORISKA ÖVNINGAR i MATEMATIK

Nedan Historiens Musa Clio

Clio av Pierre Mignard.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Olle Axling

LEKTION 1

Räkna som TUTANCHAMON och HAMMURAPI

Uppgift 1 Gamla och nya skrivsätt för heltal.

a) Skriv årtalet 2008 med fornegyptiska hieroglyfer i det additiva systemet med bas 10. Hur många symboler behövs på papyrusen eller ristas in i tempelväggen?

b) Skriv 2008 med fornbabylonsk kilskrift i det ofullständiga positionssystemet med basen 60. Hur många symboler behöver man trycka in i leran med stylusen ?

c) Skriv slutligen 2008 i det binära positionssystemet med siffrorna 0 och 1. Hur många bitar ledigt utrymme måste finnas i datorns minne för lagring ?

Uppgift 2. Bråk som stambråk.

I Rhindpapyrusen finns en omfattande tabell över bråk $\frac{2}{n}$ framställda som summor av stambråk. Sådana framställningar är inte entydiga som vi ska se här.
Bevisa följande formler som kan användas för att generera stambråk när n är ett udda positivt heltal.

a) $\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{1}{2}(n+1)} + \frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}$

b) $\frac{2}{n} = \frac{1}{k} + \frac{2k-n}{nk}$ där $k \geq \frac{1}{2}(n+1)$.

c) $\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{1}{2}p(p+q)} + \frac{1}{\frac{1}{2}q(p+q)}$ om $n = pq$.

Uppgift 3. Multiplikation genom dubblingar. Binärt räknande enligt metoden i Rhindpapyrusen.

Beräkna produkten $63 \cdot 123$ med egyptiska metoden med succesiva fördubblingar.

Uppgift 4. Division genom halveringar.

Skriv bråket $\frac{2}{13}$ som stambråk genom att faktiskt utföra divisionen genom att halvera. Beskriv i ord hur man ska göra.

Uppgift 5. En berömd tavla.

På vår kursboks framsida finns en lertavla från Yaleuniversitetets samling.
Där kan man med stor noggrannhet avläsa diagonalens längd i en kvadrat.
Om man skriver ut det skrivna värdet med våra siffror men med babylonsk bas blir det $1; 24, 51, 10$.
Med ; resp , avskiljs heltal respektive de olika hexagesimalerna.
Vilket decimalt närmevärde fick man på $\sqrt{2}$ av detta ?
Hur många decimaler är korrekta ?

Uppgift 6. Plimptontavlan med Pythagoreiska trippler.

Låt oss kalla katetlängderna x och y och hypotenusans för z.
På den 4:e av de 15 raderna står värdena $y = 12709$ och $z = 18541$. Kolumnen för x är bortbruten på den funna tavlan. Vilket värde bör ha stått där med kilskrift ?
Hur kan man finna så stora trippler x, y, z sådana att $x^2 + y^2 = z^2$ med x, y, z positiva heltal ?
Vad tror du om $x^3 + y^3 = z^3$?

Uppgift 7. Regula falsi. En metod för ekvationer i Rhindpapyrusen.

En *aha* och dess sjundedel ut gör tillsammans 19. Vad är aha ?
Lös detta problem ur papyrusen genom att börja med falska ansatsen att aha är 7.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Inst
Univlektor Olle Axling

LEKTION 2

GEOMETRISK LÖSNING AV EN EKVATION

I EUKLIDES ELEMENTA BOK II FINNS

PROPOSITION XI SOM BEGÄR

" ATT SKÄRA EN GIVEN RÄT LINJE AB, SÅ ATT REKTANGELN

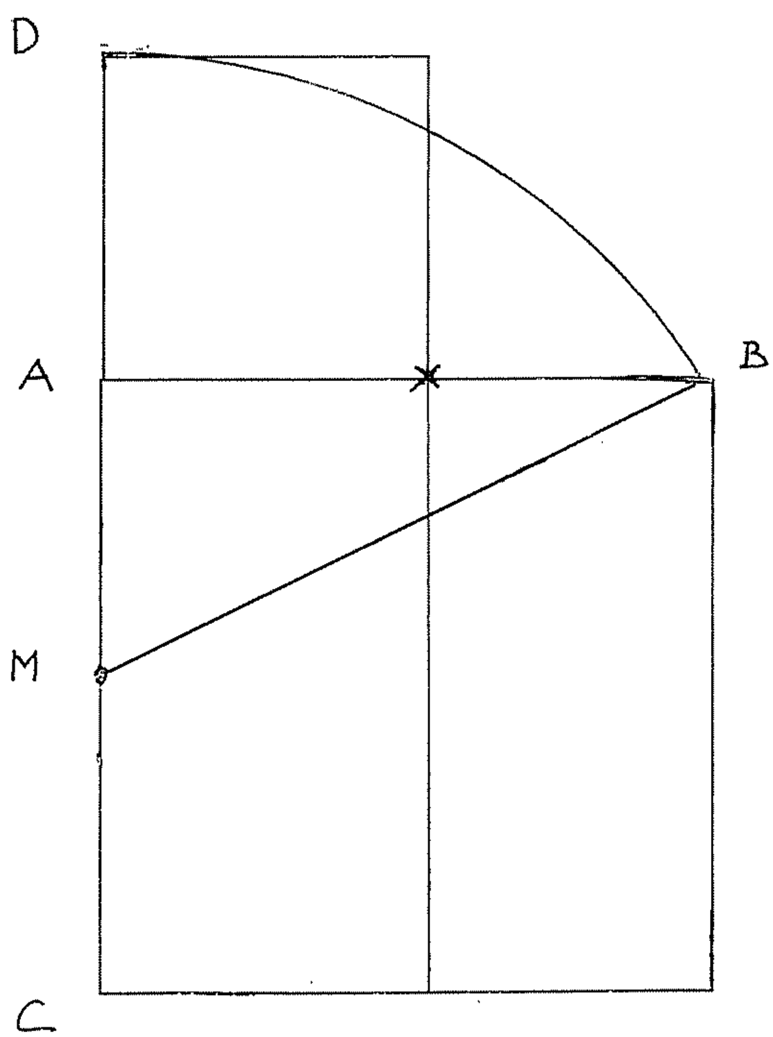
SOM INNEHÅLLES AV HELA LINJEN OCH DET ENA STYCKET

ÄR LIKA STOR SOM KVADRATEN PÅ DET ANDRA STYCKET "

LÖSNING

RITA EN KVADRAT PÅ AB OCH LÅT M VARA MITTPUNKTEN

PÅ AC. SÄTT PASSARSPETSEN I M OCH AVSÄTT MD = MB



LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Olle Axling Matematikens Historia HT 2008

REGULA FALSI. Problem från RMP

Du ska lösa två problem ur Rhindpapyrusen med metoden att göra en kanske falsk ansats och anpassa denna till en korrekt lösning.

PROBLEM 24 lyder

Ett rep mätt i khet och dess sjundedel utgör 19 khet.
Hur många khet utgör repets längd ?

PROBLEM 28 lyder

Ett antal bröd och dess två tredjedelar adderas och från denna summa tas bort en tredjedel och då återstår 10 bröd.
Vad är givna mängden bröd ?

När kuben och tingen tillsammans
är lika med något diskret tal,
finn två andra tal som skiljer sig åt med detta.
Då skall Ni taga som regel
att deras produkt alltid är exakt
lika med kuben av en tredjedel av tingen.
Som en allmän regel är därefter resten
av deras subtraherade kubikrötter
lika med det väsentliga tinget.
I den andra av dessa handlingar,
då kuben förblir ensam,
skall Ni notera dessa övriga överensstämmelser:
Ni skall genast dela talet i två delar
så att det ena gånger det andra tydligt ger
exakt kuben av en tredjedel av tingen.
Av dessa båda delar skall Ni alltid
taga de sammanlagda kubikrötterna,
och denna summa kommer att vara Eder tanke.
Den tredje av dessa våra beräkningar
löses med den andra om Ni ger noga akt,
eftersom de till sin natur näst intill överensstämmer.
Detta har jag funnit, och det inte med klumpiga steg,
år ettusen fem hundra trettiofyra.
På starka och gedigna grunder
i staden som omges av havet.

Lösning av en tredjegradsekvation så som den presenterades för Cardano av Tartaglia 1546

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Olle Axling Matematikens Historia HT 2008

Tartaglias dikt översatt till symbolisk algebra

Först behandlar Tartaglia ekvationen $x^3 + px = q$
naturligtvis med $p > 0$ och $q > 0$, där vi i VL har
kuben x^3 och p stycken rötter och i HL ett diskret tal q.

Enligt rad tre ska man finna två tal u, v som skiljer sig med q

och vars produkt ska vara $(\frac{p}{3})^3$.

Dessa tal måste då vara

$$u = \sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2} + \frac{q}{2}$$

respektive

$$v = \sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2} - \frac{q}{2}$$

Det väsentliga tinget dvs den sökta roten x fås nu enligt
raderna 7, 8, 9 till $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ dvs roten är

$$x = \sqrt[3]{(\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2} + \frac{q}{2})} - \sqrt[3]{(\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2} - \frac{q}{2})}$$

Detta är *CARDANOS formel*

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Olle Axling Matematikens Historia HT 2008

DIOFANTOS ÅLDER. En ekvation

Mycket litet är känt om den viktige alexandrinske matematikern *DIOFANTOS* liv (ca 250 eKr).
Hans stora verk *Aritmetica* i tretton band har inspirerat matematiker i alla tider: Fermat, Lagrange, Bernoullis, Euler...
Hans algebraiska notation intar en mellanställning mellan den ursprungliga *retoriska* receptbeskrivningen och våra *symboliska* uttryck med bokstäver och specialtecken såsom $+ \cdot - /, \times, \sqrt{\ }$ m fl.

Det är känt från den äldsta kända exempelsamlingen på grekiska hur gammal Diofantos blev. Den retoriska beskrivningen nedan ska du överföra till en symbolisk ekvation och med den bestämma hur gammal Diofantos blev enligt detta övningsexempel.

EPIGRAM 126 i Bok XIV ur *Grekisk Antologi.* Om Diofantos ca 500 e Kr
Möjligen från Hypathias kommentarer om Diofantos ca 400 e Kr.

Gudarna lät honom vara i barndom en sjättedel av hans liv och efter att ha lagt till en tolfdtedel kläddes hans kinder med skägg. Hans liv lystes upp av giftermål efter ytterligare en sjundedel av livet och fem år efter detta föddes hans son. Bortskämde senfödde sonen rycktes bort av grymma ödet vid en ålder bara hälften av vad fadern blev. Efter att ha bekämpat sorgen med hjälp av Aritmetiken, vetenskapen om talen, i ytterligare 4 år slutade Diofantos sitt liv. Vid vilken ålder kallade gudarna honom ?

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Olle Axling Matematikens Historia HT 2008

Descartes analytiska geometri. En ekvation

Med sin *analytiska geometri* skapade Rene Descartes en metod att med geometri lösa algebraiska problem och omvänt.

Speciellt använde han den för att lösa just ekvationer. Vi ska se och exemplifiera med ett exempel.

Betrakta ekvationen

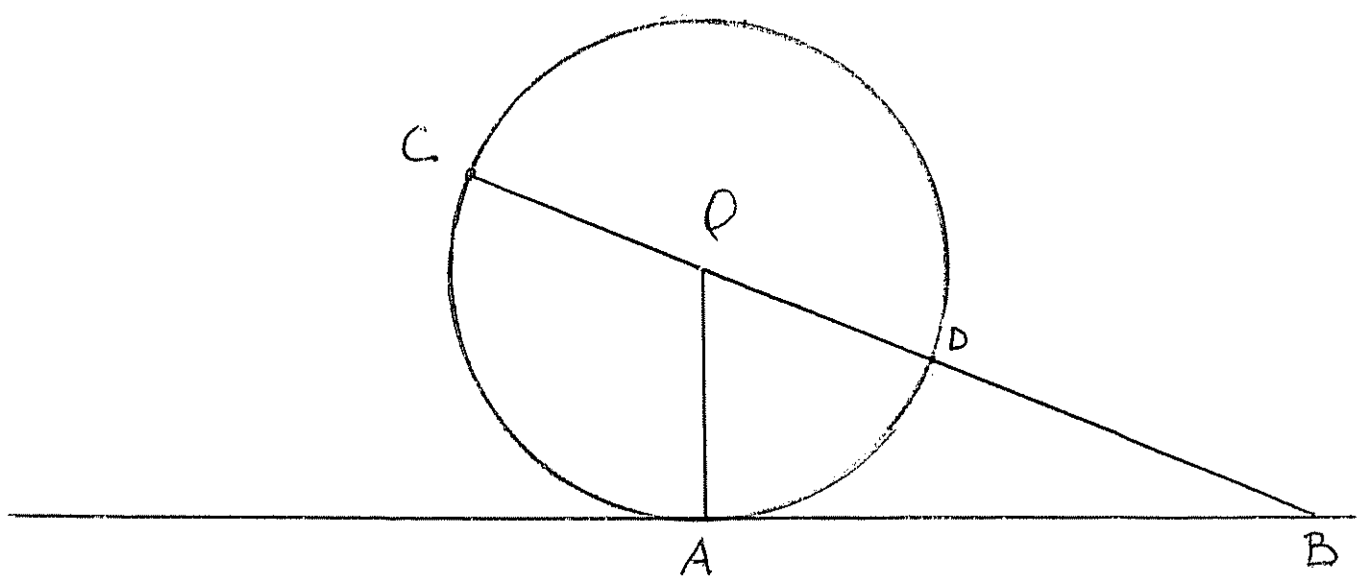
$$x^2 = 10x + 144$$

Descartes geometriska lösning ges av figuren nedan där cirkelns radie är $\frac{10}{2} = 5$ och sträckan $|AB| = \sqrt{144} = 12$.

Räta linjen BO skär cirkeln i punkterna C och D.

Descartes påstår att en (positiv) rot till ekvationen är sträckan $|BC|$.

UPPGIFT: Visa att Descartes har rätt.



LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Olle Axling Matematikens Historia HT 2008

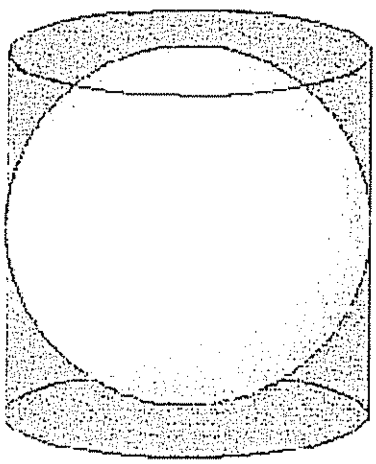
LEKTION 3

VOLYMER och AREOR. Arkimedes gravmonument 212 f Kr

Antikens (alla tiders ?) störste matematiker *ARKIMEDES* från Syracusa på Sicilien önskade sig ett gravmonument i form av en sfär inskriven i en rät cylinder. Se nästa sida ! Han hade noterat att samma förhållande råder mellan volymen och arean för den inskrivna sfären och den omskrivna cylindern.

Den lärde romaren *MARCUS TULLIUS CICERO* var år 75 f Kr quaestor på Sicilien och återfann detta monument i ruiner i Syracusa men dess öde är sedan dess okänt. Bevisa Arkimedes iakttagelse och bestäm det gemensamma förhållandet mellan volymerna respektive areor.

Rita och räkna gärna här nedan eller vänd !

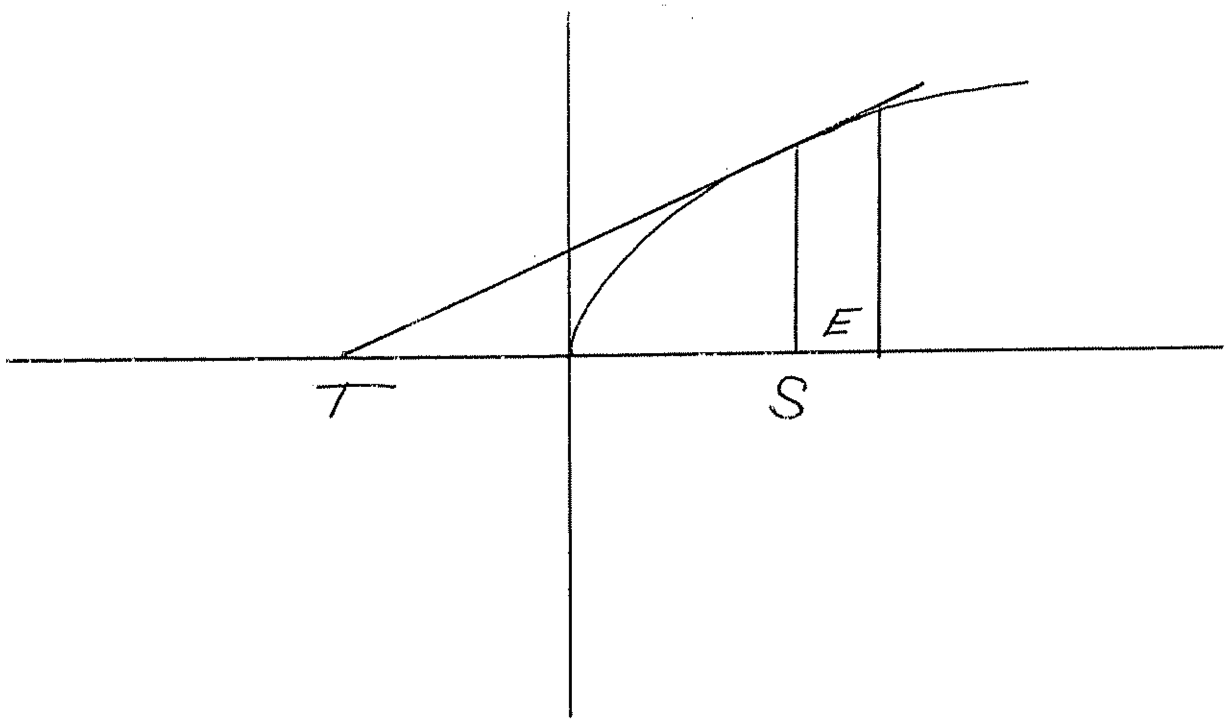


Arkimedes förhållande mellan sfär och cylinder.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Olle Axling Matematikens Historia HT 2008

FERMAT bestämmer tangenten

Fermat kunde utan att ha begreppet derivata lösa många problem som vi idag använder differentialkalkyl till för att bemästra.
Nedan ser du en figur som ska hjälpa dej att bestämma subtangenten ST till en parabel med likformighet och genom att, som Fermat, sätta $f(x+E) = f(x)$ för oändligt små tillskott E. Bestäm ST.

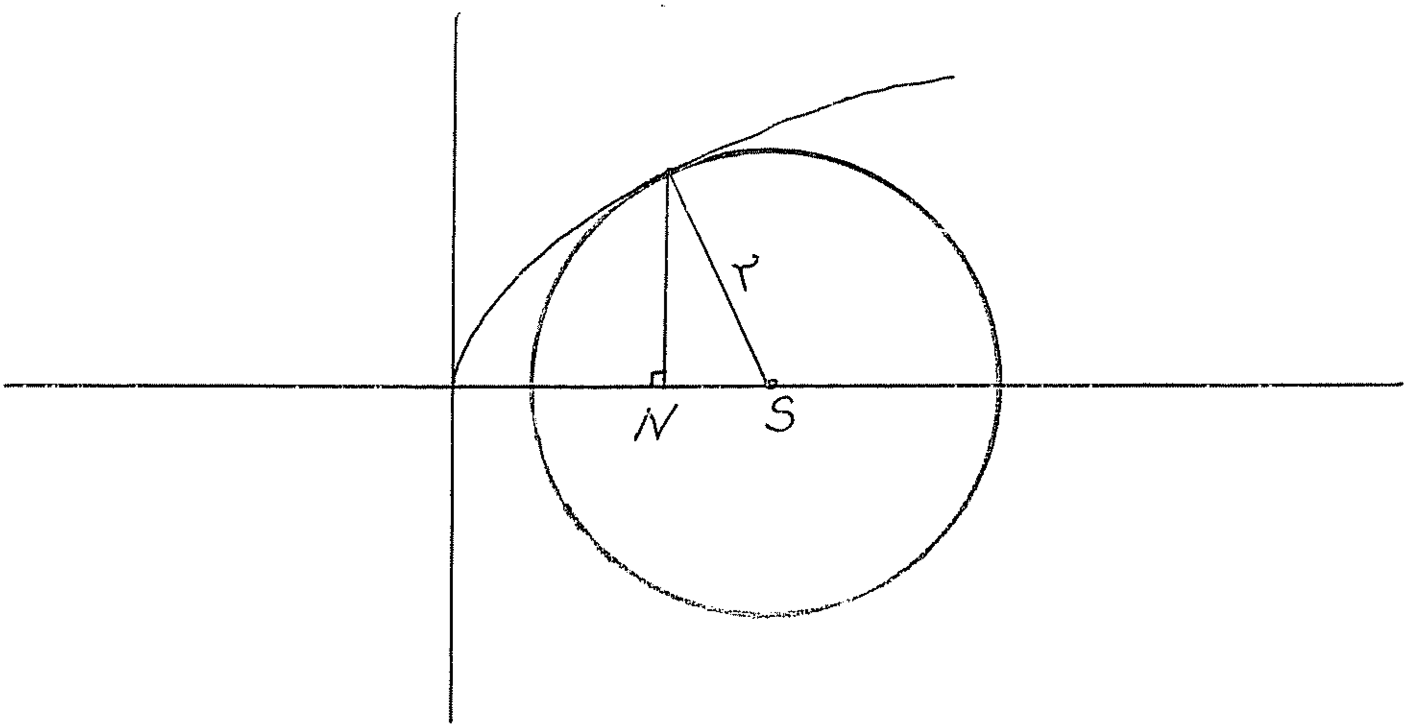


LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Olle Axling Matematikens Historia HT 2008

DESCARTES och subnormalen

Descartes kunde utan begreppet derivata bestämma normaler mm till många kurvor.
I figuren nedan tangerar en cirkel en parabel $y = \sqrt{x}$ och Descartes utnyttjar att vid tangering har vi en dubbelrot.
Bestäm med hjälp av detta subnormalen SN.

Rita och räkna gärna nedan !



LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Olle Axling Matematikens Historia HT 2008

FERMAT bestämmer extremvärden

Pierre de Fermat bestämde extrempunkter utan att känna till derivator. Han utnyttjade att funktionen f i en extrempunkt x satisfierade $f(x) = f(x+E)$ för ett infinitesimalt tal E. Karaktären hos eventuell extrempunkten motiverades sedan något bristfälligt geometriskt. Fermat kritiserades naturligtvis för detta, men fann ju de rätta punkterna. Använd Fermats metod för att lösa följande problem utan att behöva utstå negativ kritik.

ETT EXTREMVÄRDESPROBLEM

Givet den fixerade omkretsen $2a$, bestäm den rektangel som har den största arean.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Olle Axling Matematikens Historia HT 2008

NEWTON bestämmer tangenten till en partikelbana

Isaac Newton (1642-1727) kunde med sitt dynamiska synsätt bestämma tangenter till kurvor.
Han antog punktens läge på en kurva vara (x, y) , som kallades *fluenter*. Partikelns hastigheter längs respektive axel gavs av $(\dot{x}\,\dot{y})$, som Newton kallade partikelns *fluxioner*. Tangentens riktning fick han som $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.
En annan närliggande punkt på kurva är $(x+o\dot{x}\,, y+o\dot{y})$ där o är ett tidstillskott.

PROBLEM

Använd Newtons metod för att bestämma tangenten till kurvan $x^2 + xy + y^2 = 7$ i punkten $(2, 1)$ genom att låta tillskottet o vara infinitesimalt litet.

Anmärkning
Kurvan ovan är en *ellips* och Newton var ju den som visade att planetbanorna är ellipser allt enligt Johannes Keplers (1571-1630) lager.