ANALYSRAPPORT TILL 323
2008

INTERNATIONELLA STUDIER

Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007

En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer

Skolverket

Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007

En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer

Beställningsadress:
Fritzes kundservice
106 47 Stockholm
Telefon: 08-690 95 76
Telefax: 08-690 95 50
E-post: skolverket@fritzes.se
www.skolverket.se

Beställningsnr: 08:1075
ISBN: 978-91-85545-53-7

Form: Ordförrådet AB

Förord

TIMSS *(Trends in International Mathematics and Science Study)* undersöker elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i årskurserna 4 och 8. Samtidigt samlas med hjälp av olika enkäter en mängd information in om nationella regler och mål, om faktisk organisation och undervisning och om elevernas attityder. Studien möjliggör jämförelser mellan länder och ger också information om förändringar i kunskap över tid inom de områden undersökningen mäter.

TIMSS 2007 har genomförts av Skolverket i samarbete med ämnesdidaktiker vid Göteborgs universitet. Skolverket har sammanställt en första nationell rapport med resultaten från TIMSS 2007, rapport 323. Skolverket har därutöver ambitionen är att använda TIMSS-data för olika former av fördjupade analyser för att därmed kunna bidra till skolans utveckling.

Denna rapport har tagits fram inom ramen för arbetet med TIMSS 2007. I rapporten analyseras elevernas lösningar av enskilda TIMSS-uppgifter i matematik inom de innehållsliga områden där de svenska elever klarar sig mindre bra. Det gäller *taluppfattning och aritmetik* samt *geometri och mätningar* i årskurs 4 samt *algebra* och *geometri* i årskurs 8. Analysen syftar till att belysa hur väl eleverna förstår centrala matematiska begrepp och kan tillämpa beräkningsprocedurer inom dessa innehållsliga områden. För att ytterliga stärka analysens resultat har även uppgifter av liknande karaktär från de nationella ämnesproven i årskurs 5 analyserats. I rapportens avslutande avsnitt sammanfattar författaren de åtgärder han anser behövas för att eleverna ska få en bättre utveckling av sina kunskaper i matematik.

Det är Per-Olof Bentley, universitetslektor och filosofie doktor vid Göteborgs universitet, som har både genomfört den vetenskapliga analysen och skrivit rapporten inom ramen för uppdraget som ämnesdidaktisk expert i TIMSS-projektet. Författaren ansvarar för rapportens innehåll och de uppfattningar som uttrycks.

Stockholm, november 2008

Per Thullberg	*Camilla Thinsz Fjellström*
Generaldirektör	Undervisningsråd

Innehåll

Introduktion

1. Introduktion

Då det uppföljande TIMSS-projektet 2007 planerades var ambitionen, att utöver den deskriptiva resultatbilden analysera elevernas lösningar av enskilda uppgifter för att förbättringsåtgärder skall kunna sättas in med högre precision. Generell utbildning av lärare som undervisar i matematik är troligen ett mer trubbigt sätt att åtgärda elevernas kunskapsproblem än att i en sådan utbildning ta upp de specifika innehållsliga problem, som eleverna faktiskt har.

Inom TIMSS-projektet genomfördes en förstudie på våren 2006. Under bedömningen av elevuppgifterna märkte vi, att vissa misstag, som eleverna gjorde, var mer vanliga än andra. Lösningsfrekvenserna var under 50 % i flera uppgifter. Iakttagelserna bekräftades när huvudstudien gjordes våren 2007. Utifrån dessa erfarenheter bestämdes, att en analys av elevers lösningar av de testuppgifter som skulle offentliggöras skulle göras både för årskurs 4 och 8. De preliminära erfarenheterna av elevernas misstag bekräftades i denna analys. Resultatet av den återges som en del i denna studies resultatavsnitt. Det kunde visas, att vissa misstag var återkommande och frekventa. Emellertid räckte inte detta för att kunna dra säkra slutsatser om hur eleverna tänkte och resonerade samt vad som hade orsakat misstagen.

En möjlighet till att mer precist få fram orsakerna till de olika misstagen som eleverna gjorde erbjöds då jag tillsammans med områdeschefen i Lilla Edet, Magnus Olsson, planerade ett fortbildningsprojekt i matematik för samtliga lärare på två av skolorna i kommunen. Det förtjänar att påpekas att kontakten etablerats genom TIMSS. Förutom förbättrade matematikkunskaper var ambitionen att den sociala situationen också skulle förbättras. Några vetenskapliga resultat visade på att ett lyckat lärande medförde, att eleverna uppfattade klassrumssituationen mer positivt, vilket i sin tur ledde till en förbättrad social situation (Arzt & Armour-Thomas, 1999). Utgångspunkten i fortbildningsprojektet var att stimulera elevernas matematikutveckling. Därför startade projektet med en vetenskaplig undersökning för att ta reda på vilka hinder, som eleverna erfor i sin matematikutveckling. Eleverna i årskurserna 1, 2, 3, 4 och 7 djupintervjuades, tillsammans ca 300 elever. Det visade sig snart, att det största problemet låg inom elevernas förståelse av talbegreppet samt inom aritmetiken. Detta var ett område inom vilket också svenska elever i årskurs 4 i TIMSS-projektet presterar under EU/OECD-länderna i genomsnittet. Avgörande delar av resultatet av undersökningen i Lilla Edet presenteras i denna studies forskningsgenomgång.

Genom den vetenskapliga undersökningen i Lilla Edet var det möjligt att härleda hur eleverna resonerade då de gjorde vissa typer av misstag. Tillsammans med resultat från tidigare forskning kunde därför orsakerna till elevernas misstag bestämmas med hög precision. Läromedlens roll var också möjlig att belysa, vilket ytterligare ökade precisionen. Det visade sig att bara hälften av eleverna i årskurs 7 hade utvecklat beräkningsprocedurer som var optimala för arbetsminnet och därmed för fortsatt lärande. Här har den matematikdidaktiska forskningen genom att utnyttja resultat från hjärnforskningen bland annat visat vilken avgörande roll arbetsminnet och dess funktionella delar har i elevers utveckling av aritmetiskt kunnande.

För att säkerställa TIMSS-resultatens generaliserbarhet har också ca 500 elevlösningar från det nationella ämnesprovet i årskurs 5 från våren 2007 analyserats.

För de tre övriga områdena inom vilka svenska elever presterade under EU/OECD-genomsnittet tar analysen av elevlösningarna sin utgångspunkt i den internationella forskningens resultat.

Geometri i årskurs 4 och 8 är två sådana områden inom vilka flera internationella studier bidrar med resultat om elevers förståelse av centrala nyckelbegrepp. Ett urval av dessa studier redovisas i denna studies forskningsgenomgång. Även kunskaper inom aritmetik och algebra ligger till grund för utvecklingen av elevers kunskaper inom geometriområdet. Därför kan analyserna av dessa områden även belysa problembilden inom geometriområdet.

Inom algebra i årskurs 8 har likhetsbegreppet, bokstavsbeteckningar och variabelbegreppet centrala funktioner. Dessa ligger till grund för elevers förståelse av en rad viktiga begrepp såsom ekvationer, uttryck, funktioner, formler och grafer. Tillsammans med kunskaper inom aritmetik utgör variabelbegreppet en viktig byggsten inom det algebraiska kunskapsområdet. Därför kommer särskild uppmärksamhet att riktas mot elevers förståelse av likhetstecknet och variabelbegreppet. I forskningsgenomgången redovisas några klassiska studier inom detta område.

Teoretiska förutsättningar

2. Teoretiska förutsättningar

Utgångspunkten för analyserna av elevernas lösningar avseende dels uppgifterna i TIMSS 2007 och dels i nationella ämnesprovet är en utvidgad fenomenografisk teoriram inom det postpositivistiska paradigmet (För en mer specifik redogörelse se Bentley (2008a; 2008b) samt Marton och Booth (2000)).

2.1 Inlärning av begrepp och procedurer

Både begrepp och procedurer uppfattas som *fenomen* inom fenomenografin. Tidigare inlärda begrepp spelar en viktig roll då nya begrepp erfares. Om ett nytt begrepp skall kunna erfaras, så måste det skilja ut sig från tidigare inlärda begrepp. Detta sker då *särskiljande begreppsattribut* urskiljs och uppfattas, vilket kan ske då egenskapen som attributet representerar varieras. På detta sätt får variationen en central roll i erfarandeprocessen. Sådana begreppsattribut benämns ofta som kritiska och kan vara individberoende. Olika individer uppfattar därför inte nödvändigtvis samma attribut som särskiljande (Bentley, 2008a; Marton & Booth, 2000).

Upprepad exponering för attributen spelar en viktig roll vid inlärning. Två delvis olika processer ”theory revision” och ”rediscription” opererar vid olika frekvent exponering för begreppen.

Vid lågfrekvent exponering svarar *”theory revision”* för inlärningen. Först skapas en begreppsprototyp, som kan vara en relativt grov uppfattning av begreppet. Vid ny exponering förfinas successivt uppfattningen för att över tid närma sig en uppfattning, som står i överensstämmelse med individens inflöde av sensomotoriska data. Beskrivningen av denna process liknar i hög grad Vygotskys (1986) teori om inlärning av vardagliga begrepp (Bentley, 2008a).

Processen *”rediscription”* å andra sidan opererar vid högfrekvent exponering för begreppet i fråga. Uppfattningen av begreppet formas i hjärnans associativa delar och kontrolleras mot individens inflöde av sensomotoriska data innan den lagras via ”rediscription” i långtidsminnet (Bentley, 2008a).

Ett begrepp anses ha *förståtts*, då tillräcklig kunskap har tillägnats om begreppsattributen och andra involverade begrepp samt om relationen dem emellan (Bentley 2008a s.11).

I skolmatematiken förkommer förenklingar av den matematiska disciplinens begrepp. Sådana förenklingar, som görs för att öka tillgängligheten för eleverna och underlätta deras lärande, benämns *begreppsmodeller* och har ofta begränsade tillämpningsområden. Många av de modeller, som används i svenska skolor, har beforskats internationellt (Bentley, 2008a).

Procedurer, som också uppfattas som fenomen, har en med begrepp analog uppbyggnad. Då begrepp byggs upp av attribut och andra kända begrepp, så byggs procedurer upp med utgångspunkt i för individen tidigare kända procedurer, vilka då utgör delprocedurer. Dessa delprocedurer, som ofta är strikt sekvenserade, utgör *procedurens olika steg* och hänger ihop i procedurens helhet. En procedur kan *tillämpas* både korrekt och inkorrekt. Speciellt den inkorrekta tillämpningen är intressant, då den också kan avslöja hur individen har uppfattat både proceduren i fråga samt dess involverade begrepp. Ur forskningssynpunkt är det därför mer givande att studera hur en procedur tillämpas i ett sammanhang än att avgöra om tillämpningen är korrekt eller inkorrekt. Om en procedur tillämpas korrekt i rätt sammanhang, så anses det att individen *behärskar* proceduren. De modeller av den matematiska disciplinens procedurer som används i skolmatematiken kan ibland benämnas *procedurmodeller* (Bentley, 2008b).

I benämnda problem beskriver texten en problemsituation. Utifrån denna skall en matematisk modell skapas. Denna process benämns *enkodning*. Den matematiska modellen kan innehålla minst en operation. För att komma fram till en sådan modell måste eleverna vara bekanta med de fyra elementära operationerna addition, subtraktion, multiplikation och division samt kunna avgöra problemsituationens beskaffenhet.

Teoretiskt sett är en problemsituation att uppfatta som ett begrepp med sina begreppsattribut, vilka beskriver situationens karaktär. Ett exempel på en problemsituation är en jämförelsesituation där två tal skall jämföras. Själva jämförelsen karaktäriserar då situationen. Till en viss typ av problemsituation är en specifik operation förknippad. Så enkodningen består av att identifiera vilken typ av problemsituation, som texten beskriver samt av att bestämma här till hörande operation (Bentley, 2008a).

2.2 Analys av data

Inom fenomenografin utgörs traditionellt data av transkriberade intervjuer. Det förutsätts att individernas berättelser speglar deras sätt att tänka och förstå olika fenomen. Men även individers beteenden har varit utgångspunkt för fenomenografiska analyser (Lindahl, 1996). Genom komparativa analyser av data vaskas uppfattningskategorier fram, först på gruppnivå, eftersom stabiliteten i uppfattningar är större där än på individnivå. Detta beror på att en individ kan exponera både fragment av uppfattningar och mer eller mindre hela uppfattningar. Från ett fragment kan det vara svårt att skapa en fullständig kategori. När kategorierna, som epistemologiskt betraktas som vetenskaplig kunskap, väl är beskrivna, kan analysen återvända till individnivå. Utifrån data identifieras då vilka uppfattningar varje enskild individ har exponerat. En individ kan både ha flera uppfattningar om samma begrepp och tillämpa olika beräkningsprocedurer på samma operation, vilket gör att variationen blir tvådimensionell, en som kvalitativt beskriver en uppfattnings beskaffenhet samt en som beskiver hur antalet uppfattningar varje individ exponerat varierar. Den senare kan därför också analyseras statistiskt. Ett antal individer i ett sampel har var och en ett antal uppfattningar eller tillämpningar. I TIMSS-projektet kan emellertid en elev exponera endast en lösning per uppgift. Detta kan beskrivas statistiskt med frekvenser och relativa frekvenser, vilket gör att slutsatser om förhållanden i populationen kan dras från resultat funna i samplen (Bentley, 2008a).

I vissa fall kan uppfattningarna verka oförenliga. Det är viktigt att notera, att en individ kan ha flera uppfattningar och tillämpningar än vad som exponeras i intervjusituationen. Intervjun och frågornas karaktär kan avgöra om en speciell uppfattning eller procedur exponeras. Lärandets process och resultat ses alltså ur den lärandes perspektiv i en fenomenografisk teoriram (Bentley, 2008a).

Då elevlösningar av uppgifterna i TIMSS-projektet och i det nationella ämnesprovet analyseras, ses lösningarna som dokumenterade beteenden utifrån tillämpningar av procedurer och uppfattningar av begrepp. Precisionen i dokumentationen varierar givetvis och därmed kan också tolkningen vara mer eller mindre precis. Även om en lösning är väl dokumenterad kan det vara svårt att kausalt binda den till en speciell begreppsuppfattning eller tillämpning av en procedur. Om begreppsuppfattningen eller proceduren är tidigare känd kan detta avsevärt underlätta en sådan kausal analys. Har däremot elever intervjuats om begreppsuppfattningar och tillämpningar av procedurer i relation till en viss problemtyp och det därmed har framkommit hur deras uppfattningar och tillämpningar är manifesterade i lösningen av ett sådant typproblem, så kan en kausal relation lättare identifieras. Med dessa förutsättningar blir tolkningsprocessen av elevlösningar betydligt enklare. En viss osäkerhet kan dock finnas i det enskilda fallet genom att en lösning slumpvis skulle kunna överensstämma med tillämpningen av en viss procedur utan att eleven har tillämpat proceduren ifråga. Om däremot stora grupper av elever uppvisar samma lösningsprofil på en uppgift, så är det knappast troligt att detta enbart beror på slumpen. Sannolikt hänger detta i stället samman med en speciell tillämpning av en procedur eller tillämpning av en för sammanhanget icke avsedd procedur.

Mot ovanstående bakgrund kan ett lämpligt tillvägagångssätt vid analys av elevlösningar av uppgifter i matematik vara att först intervjua ett antal elever om hur de gått tillväga, då de löst uppgifterna samt om deras uppfattningar om involverade begrepp och deras tillämpningar av procedurer. När sålunda beskrivningskategorierna framkommit, är det möjligt att dra slutsatser utifrån övriga icke intervjuade elevers lösningar. Denna studie grundar sig därför på antagandet, att elevers lösningar speglar deras uppfattningar om begrepp och deras tillämpningar av procedurer.

Om det inte har varit möjligt att genomföra intervjuer som förberedelse för analysen av elevers lösningar, så kan tidigare forskning, såväl nationell som internationell, kunnat utgöra motsvarande vägledning.

2.3 Reliabilitet och validitet

Reliabilitet är ett mått på noggrannhet i datainsamlingsprocessen (Swedner, 1978). Hög reliabilitet förutsätter en avslappnad intervjusituation, icke vägledande frågor samt icke bekräftande responser från intervjuaren. Studeras elevers lösningar av testuppgifter så har noggrannheten vid testets genomförande betydelse för reliabiliteten.t

Validitet i fenomenografiska studier innefattar primärt intern och extern validitet. Den interna validiteten består dels av innehållsvaliditet och dels av konstruktionsvaliditet.

Innehållsvaliditet fångar hur väl otolkade data beskriver individers uppfattningar om begrepp och deras tillämpningar av procedurer. Därför måste frågor och problemuppgifter ha en sådan karaktär, att de tillåter en allsidig exponering av uppfattningar av begrepp och tillämpningar av procedurer. I annat fall kan uppfattningar och tillämpningar förbli oexponerade. Eftersom tillämpningar av vissa procedurer är kontextuellt betingade, måste en uppsättning av problemuppgifter innehålla en kontextuell variation. Innehållsvaliditeten utgör alltså ett autenticitetskriterium (Bentley, 2008a).

Konstruktionsvaliditet däremot, fokuserar tolkningsresultat av data och är därför ett mått på hur väl kategorierna speglar försökspersonernas förståelse av begrepp och tillämpningar av procedurer givet de data som föreligger (Bentley,2008a).

Extern validitet berör begreppet generalitet. I en utvidgad fenomenografisk teoriram har generalitetsbegreppet en något annan betydelse än vid kvantitativa studier. Beskrivningskategorierna anses representera den variation som föreligger i populationen. Eftersom denna studie utförs i en utvidgad fenomenografisk teoriram förekommer också en statistisk behandling av data. I denna del av studien får generalitetsbegreppet en delvis annan innebörd, som berör möjligheten att från sampel dra sannolika slutsatser om populationen. Samplen representativitet blir då av central betydelse (Bentley, 2008a).

Denna studie innefattar tre sampel från våren 2007, dels de elever som gjort TIMSS-testet i årskurs 4 och dels de i årskurs 8 samt den grupp av elever i årskurs 5, som gjort det nationella ämnesprovet och vars lösningar insamlats. Det är viktigt att belysa frågan om extrapolering av dessa tre resultat från samplen till att gälla respektive population dvs. samtliga elever i årskurserna 4, 8 och 5.

Urvalet av TIMSS-deltagarna är gjort på skolnivå, dvs. slumpvis utvalda skolor, 155 för årskurs 4 och 159 för årskurs 8. Då urvalet är gjort på skolnivå är enskilda elever inte slumpvis utvalda.

Alla uppgifter, som deltagarna gjort, har inte analyserats utan huvudsakligen de som frisläppts. Per årskurs kommer de frisläppta uppgifterna från 6 test av totalt 14, vilket motsvarar ungefär 43 % av samtliga uppgifter. I årskurs 4 har varje test gjorts av ca 450 elever som tilldelats häften efter TIMSS roterande design. I årskurs 8 är det 550 elever. Totalt har alltså i årskurs 4 närmare 33 000 elevlösningar analyserats och i årskurs 8 närmare 40 000. Mot denna bakgrund har endast tydliga trender vad gäller elevernas kunskaper behandlats.

Elevlösningarna i det nationella ämnesprovet för årskurs 5 är ca 500, vilket är en relativt liten andel av de ca 100 000 elever, som går i en årskurs på grundskolan. De ca 500 elevlösningarna är för få för att självständigt kunna utgöra en solid grund för slutsatser. Om däremot samma typ av elevmisstag eller kunskapsprofiler skulle konstateras i flera studier, så blir generaliseringsmöjligheterna säkrare och större.

Arbetsminnets gränssättande roll

3. Arbetsminnets gränssättande roll

Den vanligaste funktionella modellen av arbetsminnet består av tre delar, den centrala exekutiva funktionen, den fonologiska loopen samt den visuellt spatiala funktionen. Modellen är utvecklad av Baddeley och hans kollegor (Baddeley, 1986, 1996; Baddeley & Hitch, 1974; Logie, 1995). Den centrala exekutiva funktionen genomför operationer och hämtar data från långtidsminnet. Den dirigerar också uppmärksamheten och koordinerar både den fonologiska loopens och den visuellt spatiala funktionens aktiviteter. Den fonologiska loopen avkodar ljud från tal till ord och meningar samt till betydelser och arbetar konstant utan avbrott. I aritmetik lagrar den de involverade talen samt deras delresultat. Visuell och spatial information lagras in den visuellt spatiala funktionen, i vilken aritmetikproblem och deras resultat kan visuellt representeras. Var och en av dessa funktioner har således en speciell roll, då aritmetiska beräkningar utförs (Adams & Hitch, 1998).

Talfakta, som inte är några egentliga fakta utan snarare är att betrakta som en färdighet, hämtas av den centrala exekutiva funktionen från långtidsminnet och belastar därför inte de två andra funktionerna. Därmed kan ytterligare minneselement lagras i dessa två minnesfunktioner. Snabbhet är en avgörande faktor, då minnesfunktionerna endast kan hålla kvar innehållet en kort tid (DeStefano & LeFevre, 2004).

När det gäller ensiffriga aritmetiska problem, så är den centrala exekutiva funktionen alltid engagerad, medan den fonologiska loopens engagemang tycks bestämmas av de räkneprocedurer som används. När till exempel stegvis beräkning eller kompensationsberäkning används, så ökar belastningen, men när talfakta används blir belastningen låg eller ingen alls. Den visuellt spatiala funktionen tycks inte hittills ha undersökts tillräckligt grundligt och därför är dess roll något osäker. I flersiffriga operationer är den exekutiva funktionens engagemang stort och ökar i takt med det antal minnesiffror, som involveras (DeStefano & LeFevre, 2004).

Om elever inte har utvecklat talfakta, så belastas deras arbetsminne i högre grad vid beräkningar. Detta gör att uppmärksamhet inte kan riktas mot mycket annat än själva beräkningen. Om undervisningen behandlar exempelvis ett geometriskt innehåll och en beräkning ingår, så kommer de elever, som inte utvecklat talfakta, att behöva lägga en stor del eller hela sin uppmärksamhet på själva beräkningen och liten eller ingen alls på det geometriska innehållet (Bentley, 2008b).

Elevers begreppsförståelse – några avgörande forskningsresultat

4. Elevers begreppsförståelse – några avgörande forskningsresultat

Först kommer elevers utveckling av förståelse för talbegreppet att behandlas. Därefter uppmärksammas ett annat minst lika centralt begrepp, nämligen variabel. Olika sätt att missförstå eller förstå detta begrepp beskrivs i det andra avsnittet. I det tredje avsnittet analyseras elevers förståelse av några geometriska begrepp samt hur dessa begrepp tas upp i undervisningen.

4.1 Elevers utveckling av talbegreppet

I första avsnittet behandlas talbegreppets olika kontextuella betydelser. Sedan beskrivs de olika utvecklingsstegen, som barn tar på vägen mot full förståelse av talbegreppet. Dessa bygger på en forskningsöversikt av Fuson (1992). Sedan analyseras hur principiellt skilda typsituationer i matematiska problem kan enkodas med hjälp av de fyra elementära operationerna, addition, subtraktion, multiplikation och division. Sist beskrivs proportionalitetsbegreppets egenskaper.

4.1.1 Talbegreppets kontextuella betydelse

Talbegreppet har sju olika kontextuella betydelser. Den *kardinala* betydelsen avses, när talen används till att beskriva antalet objekt i en mängd. Den kardinala aspekten representerar talbegreppets månghet. Den andra betydelsen, den *ordinala*, innebär, att varje tal utgör namn på ett av objekten i en ordnad följd av objekt och representerar samtidigt en beskrivning av detta objekts relativa position i mängden. Den tredje matematiska betydelsen är *mätetalet* för en kontinuerlig storhet i en mätningskontext. Mätetalet är sammanlänkat med mängden av en viss enhet i storheten. I den fjärde kontexten används räkneordet i en *sekventiell* betydelse, utan att det finns några objekt närvarande på liknande sätt, som alfabetet rabblas. Med objekten närvarande får vi en kontext där talen har *räknande* betydelse och då varje tal har ett ett-till-ett förhållande till objekten. I en *sifferkontext*, kan tal kodas med en sifferkod eller med en språklig kod. I *kategorikontexten* används tal som telefonnummer, adressnummer, bussnummer, osv. (Fuson, 1992).

4.1.2 De olika utvecklingsstegen

Först rabblar barn talraden utan att skilja de ingående talorden åt. Detta liknar ett rabblande av meningslösa stavelser. Efterhand skiljs de olika talorden åt men ibland kan tal hoppas över eller dess ordning kastas om. Barn kan ha en egen ordning på talen, som till viss del kan vara personlig och leva kvar upp i åldrarna, om den inte uppmärksammas. Barn kan till exempel hoppa över ett visst tal i räkneramsan men kan utföra beräkningar, som för den oinvigde verkar felaktiga, men som har en konsistens enligt barnets egen räkneramsa. Om till exempel barnet hoppar över talet åtta, så kan tre plus fem bli nio, eftersom talet nio tjänar samma funktion som talet åtta för barnet. Det verkar då som om barnet tänkt fel men i själva verket finns det alltså en inre konsistens i barnets tänkande. Då ett sådant ”räknefel” upptäcks, kan en lämplig första åtgärd vara att kontrollera barnets räkneramsa (Fuson, 1992).

I nästa steg i utvecklingen av förståelsen av talbegreppet så förstås talens ordinala aspekt, det vill säga objektens relativa ordning uppfattas. Barnet kan tillordna varje objekt ett talord. Ett objekts relativa ordning beskriv också av dess tillordnade talord. Man brukar säga att den implicita ett-till-ett-principen behärskas av barnet (Gelman & Gallistel, 1978). Så småningom uppfattar barnet, att det sist sagda talet också svarar på frågan, hur många. I början kan denna övergång från den ordinala till den kardinala aspekten vara mer eller mindre en applikation av en regel (the last-number-word-rule), men efter hand ökar förståelsen. Barnet kan nu behärska enkla additioner genom uppräkning från början. Adderas till exempel tre och fem så börjar barnet räkna upp från början till tre och fortsätter med de fem tills åtta nås. När barnet senare kan räkna upp från delen och inte behöver starta från början varje gång, så förstås också övergången från den kardinala till den ordinala aspekten (Fuson, 1992).

Den additiva del-helhetsaspekten är en viktig pusselbit i barns förståelse av talbegreppet. I talet åtta ingår till exempel talen 5 och 3 samt 4 och 4 men också 2 och 6. Denna förståelse spelar stor roll vid barns senare utveckling av beräkningsstrategier (Fuson, 1992).

En ofta försummad aspekt av talbegreppet är den multiplikativa del-helhetsaspekten. I talet 12 finns till exempel 4 och 3 men också 2 och 6. Förståelse för denna aspekt har visat sig vara särskilt betydelsefull, då begreppet proportionalitet behandlas i undervisningen.

Begreppet platsvärde, som är förknippat med vårt positionssystem, är centralt för elevers förståelse av talbegreppet. Speciellt vid subtraktioner, som kräver växling, poängteras denna betydelse.

Förståelse av talens abstrakta karaktär, det vill säga abstraktionsprincipen, innebär, att eleven övergår från att uppfatta talet två som en bestämning till ett substantiv till att vara ett substantiv, som betecknar varje konstellation av två objekt (Gelman & Gallistel, 1978). I exempelvis två bilar får ”två” rollen som adjektiv, vilket utgör en bestämning till substantivet bilar. I en konstellation av en elefant och en myra utgör två en beskrivning av antalet objekt men är samtidigt en beskrivning av alla tänkbara konstellationer av två objekt. Överdriven användning av konkretion kan motverka en utveckling av förståelse av talens abstrakta karaktär (Fuson, 1992).

Ett vanligt misstag bland yngre elever är en reversering av de i ett tal ingående siffrorna. Om en elev till exempel ombeds skriva talet 21 men skriver talet 12, då är detta en reversering av talets siffror. Reversering kan ha sin grund i att talområdet 1 till 20 vanligtvis fokuseras under de två första årskurserna i grundskolan. När en elev skall skriva talet femton med sifferkod, så ska inte femman skrivas först utan ettan. Ordningen av de ingående siffrorna i den språkliga koden stämmer alltså inte överens med sifferkoden utan är omvänd (Bentley, 2008b).

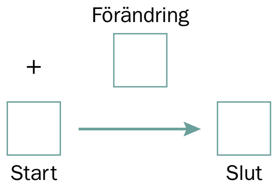
Då däremot tal över tjugo skrivs, sker detta inte med omvänd ordning utan stämmer överens med den språkliga koden. Talet tjugotre skrivs alltså följdenligt med tiotalstvåan först och entalstrean efter. Det är alltså i detta avseende en markant skillnad mellan talområdet 10 till 20 och tal större än 20. Denna svårighet kan vara mer påtaglig för elever med annat modersmål än svenska, då i övriga språk kodningen kan se annorlunda ut (Bentley, 2008b; Johansson, 2005).

4.1.3 Enkodning av problemsituationer med addition och subtraktion

Enkodning kallas den process, som en elev utför då han/hon från att ha läst en problemtext skapar en matematisk modell av problemet. Enligt en forskningsöversikt av Fuson (1992) finns det tre principiellt skilda problemsituationer, vilka kan representeras med hjälp av additionsmodeller. Ytterligare tre principiellt skilda problemsituationer kan representeras med subtraktionsmodeller. Problemsituationerna som representeras med hjälp av addition är *förändring, fysisk kombination av två delar* samt *begreppslig kombination av två delar*.

I förändringssituationen är utgångspunkten tre kvantiteter av vilka en kan vara okänd. Man tänker sig att ett visst antal utgör starten. Detta antal förändras genom att något antal tillkommer och slutar då med ett nytt antal. I figur 1 illustreras problemsituationen schematiskt.

Figur 1 Additionssituation, förändring lägga till (efter Fuson 1992)



Om sluttillståndet är okänt kan ett problem lyda: ”Kalle har 3 kakor. Han får ytterligare 2 av Stina. Hur många har han då?”

Den andra situationen handlar om en fysisk kombination av två delar, vilka tillsammans utgör en helhet såsom i figur 2.

Figur 2 Additionssituation, kombination fysiskt (efter Fuson 1992)

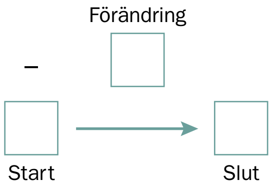
Om resultatet av kombinationen är okänt kan ett problemexempel lyda: ”Lena har 2 gräddbakelser och 3 glassbakelser som hon lägger tillsammans på en tallrik. Hur många bakelser blir det då?” Den fysiska kombinationen sker, då Lena lägger bakelserna tillsammans på en tallrik.

Situationen i figur 3 skiljer sig från den i figur 2 genom att kombinationen nu endast är begreppsligt betingad, som i exemplet ”ett brännbollslag består av 8 flickor och 7 pojkar. Hur många är det i laget?”

Figur 3 Additionssituation, kombination begreppsligt (efter Fuson 1992)

För operationen subtraktion finns följande problemsituationer *förändring ta bort, utjämna* samt *jämföra.* ”Förändring ta bort” situationen illustreras i figur 4. Utgångspunkten eller starten är ett antal, som förändras genom att ett visst antal tas bort. Resultatet blir då ett förändrat antal.

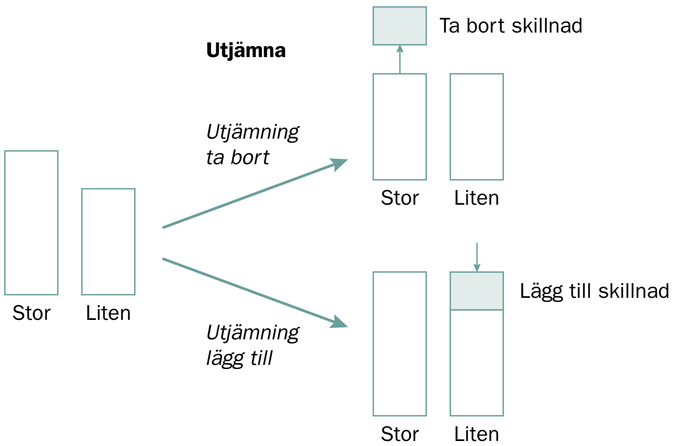
Figur 4 Subtraktionssituation, förändring ta bort (efter Fuson 1992)



Om resultatet efter förändringen är okänt blir exemplet: ”Erik har 9 kulor. Han ger 5 till Tom. Hur många har han kvar?”

Utjämningssituationen består egentligen av två skilda fall, ”utjämning ta bort” samt ”utjämning lägga till”. Figur 5 illustrerar båda situationerna. Om två kvantiteter skiljer sig, den ena är större än den andra, så kan en utjämning ske, om skillnaden dem emellan är känd eller om en beräkningsuppställning kan göras, där skillnaden betraktas som okänd. Utjämningen kan ske på två sätt, dels genom att den överskjutande delen av kvantiteten tas bort och dels genom att motsvarande mängd läggs till där den saknas.

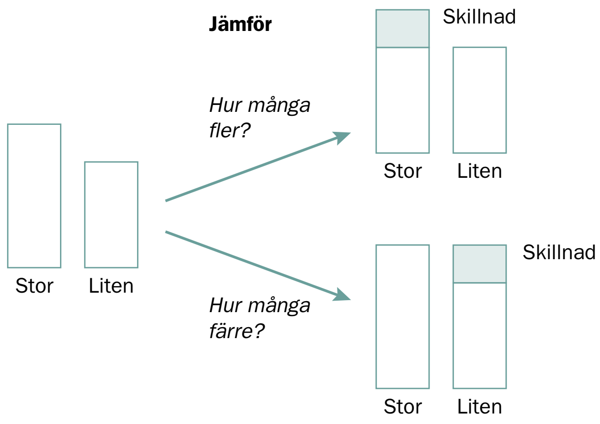
Figur 5 Subtraktionssituation, utjämna (efter Fuson 1992)



Om resultatet efter utjämningen är okänt kan exemplet bli: ”Sven har 11 kronor och Lisa 14 kronor. Hur många kronor måste Lisa ge bort för att ha lika många som Sven?”

I figur 6 presenteras en jämförelsesituation, som besvarar de två frågorna ”Hur många fler?” och ”Hur många färre?” I första fallet betraktas den överskjutande delen av den största kvantiteten som skillnad, i andra fallet är skillnaden den del, som den mindre kvantiteten saknar.

Figur 6 Subtraktionssituation, jämför (efter Fuson 1992)



Om resultatet av jämförelsen är okänt kan ett exempel lyda: ”Jimmy har 4 ballonger. Hans bror Niclas har 2 ballonger. Hur många ballonger färre har Niclas än Jimmy?”

Fuson (1992) rapporterar, att om eleverna i undervisningen får lära sig känna igen de olika problemsituationerna, så förbättras deras möjligheter att lösa motsvarande problem.

4.1.4 Enkodning av problemsituationer med multiplikation och division

Följande beskrivningar bygger på en forskningsöversikt av Greer (1992). De olika principiella problemsituationer, som enkodas med operationerna multiplikation och division, påminner om de problemsituationer som Fuson beskrev för addition och subtraktion. För att bringa reda i dessa principiellt skilda problemsituationer måste multiplikationer betraktas begreppsligt och multiplikator och multiplikand särskiljas. Greer tar ett exempel:

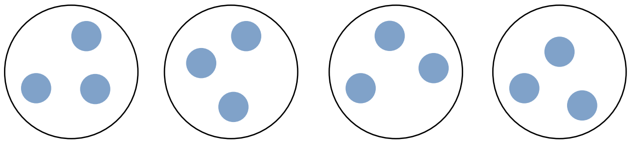
> ***”4 barn har 3 kakor var. Hur många kakor har de tillsammans?” (s. 276, författarens översättning).***

De två talen fyra och tre spelar olika begreppsliga roller. Antalet barn opererar på antalet kakor, som varje barn har. *Multiplikanden*, antalet kakor, multipliceras med *multiplikatorn*, antalet barn. Begreppsligt sett finns därför i en multiplikation ett asymmetriskt förhållande mellan faktorerna.

På grund av detta förhållande kan två typer av division urskiljas. Antalet barn kan betraktas som ekvivalent med antalet grupper av kakor. Då totala antalet kakor divideras med antalet grupper för att komma åt antalet kakor i varje grupp så representeras detta av en *fördelningsdivision*. Om däremot det totala antalet kakor divideras med antalet kakor i varje grupp så representerar detta *innehållsdivision*, vilken också är förknippad med principen för mätning. För att till exempel mäta en längd av en sträcka undersöks hur många gånger mätenheten går i sträckan.

I figur 7 illustreras *”lika grupper”* situationen. För att enkodas med multiplikation kan problemet formuleras: ”4 barn har 3 äpplen var. Hur många äpplen har de tillsammans?” Fyra har rollen som multiplikator medan tre har rollen som multiplikand.

Figur 7 Multiplikations- och divisionssituation, ”lika grupper” (efter Greer 1992)



Fördelningsdivision som modell av problemsituationen kan erhållas från exemplet: ”Det finns 12 äpplen som 4 barn skall dela lika. Hur många får var och en?” Detta motsvarar en division med multiplikatorn.

Innehållsdivision å andra sidan fås om totala antalet äpplen divideras med multiplikanden: ”Det finns 12 äpplen. Hur många barn kan få 3 äpplen var?”

Förändringssituationer kan representeras med multiplikation och division beroende på vad som är känt. Följande problemformulering kan illustrera detta: ”Ett gummiband, som från början är 3 dm, kan sträckas 4 gånger sin ursprungliga längd. Hur långt kan det då bli?” Problemet beskrivs schematiskt i figur 8. Fyra är i detta fall multiplikatorn och tre multiplikanden.

För att enkodas med en fördelningsdivision kan problemet formuleras: ”Ett gummiband kan sträckas 4 gånger sin ursprungliga längd till 12 dm. Hur långt var det ursprungligen?” Den utsträckta längden divideras med multiplikatorn, fyra. Om däremot totala längden 12 dm divideras med multiplikanden, 3 dm, så representerar en sådan modell innehållsdivision.

Figur 8 Multiplikations- och divisionssituation, ”förändring” (efter Greer 1992)

En förändring kan beskrivas som addition, subtraktion, multiplikation och division beroende på hur problemet är formulerat. Följande problem kan representeras av både en subtraktion och en innehållsdivision: ”Den utsträckta längden av ett gummiband är 12 dm. Det var ursprungligen 3 dm. Hur stor var förändringen?”

Jämförelsesituationer kan också enkodas med multiplikationer och divisioner. En jämförelsesituation kan beskrivas: ”Pia har 2 par skor och Siv har 3 gånger så många. Hur många har Siv?” Multiplikatorn är tre och multiplikanden två. För att leda till en fördelningsdivision kan problemet ha följande lydelse: ” Siv har 3 gånger så många par skor som Pia. Siv har 6 par skor. Hur många par skor har Pia?” Totala antalet par divideras med multiplikatorn 3. Om enkodningen skall resultera i en innehållsdivision kan problemet vara: ”Siv har 6 par skor och Pia 2 par. Hur många gånger fler par skor har Siv?” I detta fall divideras det antalet par skor som Siv har med det antal som Pia har, som också är multiplikand.

Beräkningar av en *rektangelarea* leder till en multiplikativ modell som problemet i figur 9.

Figur 9 Multiplikations- och divisionssituation, ”rektangelns area” (efter Greer 1992)

Beräkna rektangelns area då höjden är 2 dm och basen 4 dm. I detta exempel finns ingen begreppslig skillnad mellan 2 dm * 4 dm och 4 dm * 2 dm, vilket får till följd att någon distinktion mellan fördelnings- och innehållsdivision i detta fall inte är möjlig. Lägg särskilt märke till att denna beräkning av arean inte är det samma som att mäta arean. Vid mätning av arean undersöks hur många areaenheter som går åt för att täcka rektangelns area. Detta representerar begreppsligt en innehållsdivision.

Fischbein, Deri, Nello och Marino (1985) undersökte elevers misstag vid enkodning av benämnda problem. Uppgiften för eleverna bestod i att välja vilken operation, som modellerar en benämnd uppgift och som bara kräver en operation, alltså inga sammansatta operationer. Resultatet fick Fischbein et al. att föreslå följande teori:

> ***Varje grundläggande aritmetisk operation förblir kopplad till en implicit, omedveten och primitiv intuitiv modell. Identifikationen av operationen, som behövdes för att lösa ett problem infattande två numeriska uppgifter, genomfördes inte direkt utan medierades av modellen. Modellen överförde sina egna begränsningar på undersökningsprocessen (s. 4).***

För multiplikation så kan en sådan modell vara upprepad addition och fungera så länge multiplikatorn är ett heltal. Om den vore ett decimaltal, så skulle denna primitiva modell inte fungera. Uppgiften skulle helt enkelt inte kunna lösas korrekt.

När det gäller fördelnings- och innehållsdivision som modeller av problemsituationer, hävdar Fischbein et al., att fördelningsdivision är den ursprungliga primitiva modellen för division. Innehållsdivision däremot tillägnar sig eleverna långt senare genom undervisning. Flera studier som belyser detta förhållande finns. Elever har uppmanats att utforma ett benämnt problem, som leder till divisionen, 12/3. En stor majoritet av eleverna beskriver då benämnda problem som leder till fördelningsdivision och inte till innehållsdivision (Af Ekenstam & Greger, 1983; Bell, Fischbein & Greer, 1984; Kaput, 1985; Mangan, 1986). Lärarstuderande med inriktning mot de tidiga åren i grundskolan uppvisade liknande beteenden (Graeber & Tirosh, 1988). En slutsats möjlig att dra mot denna bakgrund är, att elever tillägnar sig innehållsdivision relativt sent under sin skoltid.

4.1.5 Bearbetning av elevers uppfattningar av addition av tal i bråkform

Davis undersökte ett antal lektioner med speciellt fokus på interaktionen mellan lärare och elever i de tidiga åren i motsvarande grundskolan. Han har då dokumenterat att elever som inte undervisats om addition av tal i bråkform spontant adderar både täljare och nämnare.

Till exempel blir

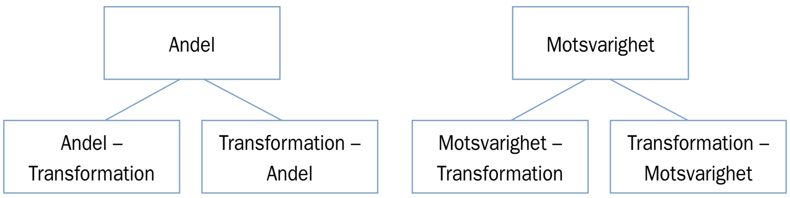
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ istället för det korrekta $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

Då lärare bearbetade elevens uppfattning om detta förhållande påverkades eleven och efter lektionssviten verkade det som eleverna att tillägnat sig detta (Davis, 1997).

4.1.6 Proportionalitet

Beskrivningen av proportionalitetsbegreppet och uppfattningar om det bygger på Bentleys studie (2008a). Proportionalitet består först och främst av en multiplikativ förändring eller av en multiplikativ jämförelse. Ett proportionalitetsproblem består egentligen av två situationer, en i vilken den multiplikativa förändringen presenteras, och en i vilken denna förändring appliceras på en ny situation. Två huvuduppfattningar av begreppet kan urskiljas. Den ena består av en relation mellan delen och helheten medan den andra består av en relation mellan två delar. Exempelvis kan den första relationen uttryckas som 2 delar av 8 delar, vilket innebär att de 2 delarna ingår i de 8 delarna, dvs. i helheten. Den andra relationen kan uttryckas som 2 delar till 6 delar. Tillsammans kan de delarna bilda helheten 8 delar. Men det kan också vara fråga om att relatera två olika storheter till varandra. Relationen mellan del och helhet betecknas som *andel* eller *proportion*, medan relationen mellan delar eller storheter betecknas som *förhållande* eller *motsvarighet*. I figur 10 visas lärares uppfattningar om begreppet proportionalitet.

Figur 10 Kategorier av lärares exponerade begreppsliga förståelse av proportionalitet



I det följande beskrivs kategorierna andel och motsvarighet mer ingående. För en mer fyllig redogörelse se Bentley (2008a).

Beskrivningen bygger på det så kallade ”saftproblemet” känt från internationell forskning. Det lyder: ”Du skall blanda saft. På flaskan står det 2 delar saft till 6 delar vatten. Du har 9 liter vatten i en hink. Hur mycket saft skall Du hälla i?” Andelsuppfattningen manifesteras av att lärarna urskiljer att 2 delar och 6 delar tillsammans bildar en helhet, 8 delar. De olika andelarna av saft och vatten uttrycks som 2 åttondedelar och 6 åttondedelar. Problemet representeras schematiskt i figur 11.

Figur 11 Begreppslig förståelse av andel

Relationen mellan 6 och 8 i den första situationen kan beskrivas med den multiplikativa förändringsfaktorn 4/3. Denna tillämpas på den andra situationen, vilket ger 4/3 * 9 = 12. Totala mängden blandad saft blir alltså 12 liter och därmed blir mängden koncentrerad saft 3 liter.

Uppfattningen förhållande eller motsvarighet utgår från en relation mellan två delar av samma helhet. Med utgångspunkt i saftproblemet så är det de 2 delarna saft, som motsvaras av 6 delar vatten. Tillsammans bildar de helheten 8 delar. I figur 12 nedan visas problemet schematiskt.

Figur 12 Begreppslig förståelse av motsvarighet

Första situationen	2	→	6
Andra situationen	?	→	9

Motsvarigheten är fullt bestämd i den första situationen:
2 * k = 6, vilket innebär att k = 3.

Genom denna beräkning är motsvarigheten känd i sina huvudaspekter. För en viss mängd saft skall man alltså ta tre gånger så mycket vatten. I den andra situationen är mängden vatten känd, 9 liter. Den efterfrågade mängden koncentrerad saft skall därför multipliceras med 3 för att bli 9. Mängden saft blir då 3 liter.

4.1.7 En vanligt förekommande begreppsmodell

Hart (1981) har beskrivit en modell, som man försökt introducera i Storbritannien dock med mindre lyckat resultat. Modellen har också flitigt använts i Sverige.

Den skrivs: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Den utläses: ”*a* förhåller sig till *b* som *c* förhåller sig till *d*”. Någon begreppslig förklaring till divisionen i modellen ges vanligtvis inte utan tillämpas oftast procedurellt. Modellen kan appliceras på både ett andelsproblem och ett motsvarighetsproblem men gör ingen åtskillnad mellan dem. Detta kan innebära svårigheter för eleverna att urskilja vilka tal variablerna *a, b, c* och *d* representerar. Formeln skall snarare uppfattas som en beräkningsanvisning.

Proportionalitetsproblem brukar vara förenade med låga lösningsfrekvenser.

4.2 Elevers förståelse av några centrala begrepp i algebra

De två begreppen som är av central betydelse för behärskandet av algebran är variabelbegreppet och likhetstecknet. De behandlas i de två följande avsnitten.

4.2.1 Variabelbegreppet

Variabelbegreppets betydelse bestäms av den kontext, som innehåller bokstavsbeteckningen. De fyra vanligaste sätten att missförstå variabelbegreppet är som icke-symbolisk representation, sifferrepresentation, konkret objektsrepresentation samt som ett specifikt okänt tal (Küchemann, 1981; Wagner, 1983; Booth, 1984; Philipp, 1992; MacGregor & Stacey, 1997; Bentley, 2008a).

Uppfattningen *icke-symbolisk representation* innebär, att bokstavsbeteckningen inte tilldelas någon betydelse och därför ignoreras i ett uttryck. Om till exempel uttrycket $3a + 2a$ skall förenklas, så tas endast koefficienterna framför variabeln i beaktande och uttrycket blir efter en sådan förenkling lika med fem.

Om en elev uppfattar variabeln som en *sifferrepresentation*, så betyder till exempel $2b$, om $b = 8$, inte 2 gånger 8 utan talet 28. Uppfattningen dyker upp framför allt i beteckningar med utelämnade multiplikationstecken.

Uppfattningen *konkret objektsrepresentation* har sina rötter i en begreppsmodell, som används i algebraundervisningen. Denna modell, som har ett relativt snävt tillämpningsområde, brukar användas för att förenkla addition av variabler av olika slag i ett uttryck. I exemplet $3a + 2b + 4a$ står bokstaven a för apelsiner och b för bananer. De olika frukterna adderas var för sig. Modellen fungerar inte på multiplikativa uttryck som exempelvis $2a * 3a$. Multiplikation av en apelsin med en annan apelsin saknar begreppslig betydelse och hjälper därmed inte eleverna till någon förståelse eller ger någon operativ vägledning.

Dessa tre missuppfattningar, som de utifrån en normativ utgångspunkt kan benämnas, är mer heller mindre oberoende av kontexten. Uppfattningen *ett specifikt okänt tal* är inte heller kontextberoende men borde utifrån en normativ utgångspunkt vara det. I en ekvationskontext kan det vara korrekt, att variabeln står för ett specifikt okänt tal. Emellertid dyker uppfattningen 'ett specifikt okänt tal' även upp i helt andra kontexter, där variabeln borde ha en helt annan betydelse, som i funktioner, grafer och ekvationer med två obekanta.

Det förefaller vara relativt ovanligt, att variabeln i ovannämnda kontexter uppfattas stå för ett *generaliserat tal*. I dessa kontexter betecknar variabeln samtidigt många tal eller oändligt många tal. Man brukar säga, att variabeln står för varje tal. En sådan korrekt uppfattning har visat sig underlätta elevers förståelse av funktioner och grafer.

En annan begreppsmodell, som också används i undervisningen, benämns *förkortad storhet*. Den brukar introduceras, då formler presenteras. Till exempel då formeln för area av en rektangel introduceras kan det sägas:

”arean = basen * höjden, som med förkortningar kan skrivas, $A = b * h$”.

Den förståelse, som följer av denna introduktion, innebär att b uppfattas beteckna en förkortning av ett ord och ingen egentlig variabel. Formeln för arean kan därför inte behandlas inom den strukturella algebran. Till exempel kan inte b lösas ut, då b står för en förkortning av ett ord.

4.2.2 Likhetstecknet

Även elevers uppfattning av likhetstecknet är av central betydelse för deras möjligheter att lösa ekvationer inom algebran. Många elever uppfattar likhetstecknet som en signal att göra något, det vill säga som en operator. Detta brukar benämnas den *dynamiska* uppfattningen. Många yngre elever har erfarit, att vid beräkningar av till exempel en addition, $3 + 5$, så skrivs svaret till höger om likhetstecknet, $3 + 5 = 8$. Tecknet utläses då ofta ”det blir”. Denna hantering av likhetstecknet är vanlig i grundskolans tidiga år. Trots omfattande försök i undervisningen har det visat det sig, att den dynamiska uppfattningen lever kvar högt upp i åldrarna och orsakar svårigheter speciellt vid ekvationslösning. För att lösa en ekvation med obekanta i båda led krävs den *statiska* uppfattningen eller ekvivalensuppfattningen av likhetstecknet. Exempelvis kan inte ekvationen, $3x + 2 = 4x – 3$, lösas om likhetstecknet uppfattas som ”det blir”, eftersom uttrycket, $3x + 2$, aldrig kan förenklas till att bli uttrycket, $4x – 3$. Däremot kan för ett visst värde på x, de båda uttrycken ha samma värde, $3 * 5 + 2 = 4 * 5 – 3$ (Ginsburg, 1977; Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Kieran, 1981; Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Carpenter, Franke & Levi, 2003).

4.3 Elevers förståelse av några geometriska begrepp

I det första avsnittet tas begreppen omkrets och area upp med fokus på hur de kan komma till uttryck i undervisningen. Det som kommer att behandlas i det andra avsnittet är vinkelbegreppet med dess tre olika begreppsmodeller. Internationellt har ett antal studier gjorts om hur spatial förmåga tränas med datoranimering och vilka effekter detta får på elevernas förståelse av tvådimensionella representationer av tredimensionella objekt.

4.3.1 Begreppen area och omkrets

Australiensiska lärares förmåga att förklara begreppen area och omkrets undersöktes av Chick & Baker (2005). Lärarna ställdes inför fiktiva elevuppfattningar, och uppmanades beskriva hur de skulle hantera elevens misstag. Se exempel nedan. Areabegreppets additiva karaktär belyses av uppgiften. Lärarna redogjorde först skriftligt för hur de skulle bemöta denna fiktiva elev. Senare blev de också intervjuade. En av de nio undersökta lärarna förstod inte själv problemet.

A student cuts the following shape in half to make a new shape, saying that the two shapes have the same area and perimeter:

What would you say to this student?

De flesta av lärarna gav en sammansatt procedurell och begreppslig förklaring. Några kunde inte ge någon förklaring, medan en lärare gav en procedurell förklaring. Detta visar, att samtliga av de undersökta lärarna inte på ett tillfredställande sätt kan undervisa om de båda begreppen area och omkrets. Eftersom endast nio lärare undersökts kan självfallet inga generella slutsatser dras.

En intressant aspekt med studien kan vara, att den använda uppgiften har sin förebild i en av TIMSS-projektets testuppgifter, M05_06 (Se avsnitt 8.2.2).

Barn i åldern 4 till 5 kan använda längden av en sida för att jämföra storleken av figurer. Cuneo (1980) visade, att barn i denna ålder ibland använder summan av längden och bredden som ett storleksmått. Barn mellan 6 och 8 år utnyttjar ofta en linjär utsträckning som mått på en rektangels area, medan de flesta äldre barn byter till en multiplikativ struktur (Clements & Stephan, 2003).

Elevers svårigheter att förstå areabegreppet fullt ut tycks bero på, att aktiviteter saknas i undervisningen, som belyser areabegreppets konservation. Man manipulerar inte olika areor genom att flytta eller sätta samman dem på nya sätt. Även den prematura användningen av formler för areor av olika figurer orsakar att alltför många barn får svårigheter inom detta område (Kordaki & Potari, 1997; Piaget, Inhelder & Sheminska, 1981).

En alltför snabb övergång i undervisningen från begreppsligt studium av areor till ett mera numeriskt inriktat leder lätt till, att elever endast utvecklar numeriska svar utan att ha någon begreppslig förståelse (Hiebert, 1981; Douady & Perrin, 1986). Denna procedurella ansats, som är vanlig i skolmatematiken har tidigt kritiserats (Patronis & Thomaidis, 2008).

Från TIMSS-videostudie finns inspelningar som illustrerar ovan nämnda beskrivning. Speciellt intressant är två inspelningar av lektioner om tringelns area, vilka hölls av en japansk och en amerikansk lärare (Stigler & Hiebert, 1999).

Den japanska lektionen var uppbyggd kring ett problem som presenterades initialt. Läraren frågade eleverna om vilka trianglar de hittills lärt sig. Eleverna nämnde likbenta, liksidiga och rätvinkliga trianglar. Läraren satte då upp papperstrianglar på skrivtavlan. Eleverna, som fick i uppgift att bestämma arean av en tilldelad papperstriangel, erhöll utklippta trianglar, saxar och klister. Sedan arbetade eleverna självständigt. Väl klara skickade läraren fram elever till tavlan för att presentera sin lösning. Tillsammans med läraren växte formeln för triangelns area fram. Därefter övade eleverna självständigt att bestämma olika trianglars areor (Stigler & Hiebert, 1999).

Den amerikanska lektionen startades med att läraren gav en kort översikt av begreppet omkrets. Därefter gjordes en bestämning av en rektangels area genom att kvadratenheter räknades. Läraren visade formeln för arean av en rektangel och arbetade igenom några exempel med formelns hjälp. Sedan visade läraren en utskuren kvadratenhet och förklarade, att i trianglar är det svårt att räkna antalet kvadratenheter. Genom att först kombinera två rätvinkliga trianglar fick man en rektangel. Sedan kombinerades två likadana godtyckliga trianglar skurna i lämpliga bitar till en rektangel. Detta ledde till formeln för triangelns area, som sedan övades under elevernas självständiga arbete (Stigler & Hiebert, 1999).

Det intressanta med den japanska lektionen var, att eleverna aktivt deltog i framtagandet av formeln för triangelns area genom att mätandets idé tillämpades, vilket bidrog till den begreppsliga förankringen.

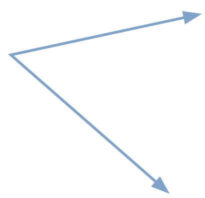
I den amerikanska klassen var eleverna inte lika aktivt engagerade i framtagandet av formeln för triangelns area utan deras engagemang bestod snarare i tillämpningen av den. Detta var en typisk procedurell ansats.

4.3.2 Vinkelbegreppet

Vinkelbegreppets tre olika begreppsmodeller finns redovisade i internationell forskning (Mitchelmore & White, 2000). Samtliga modeller inbegriper strålar och deras gemensamma ändpunkt. En stråle har en ändpunkt och sträcker sig rakt, oändligt långt bort. Linjer däremot saknar ändpunkter, medan två punkter på en linje avgränsar en sträcka. Därmed kan en sträcka ha egenskapen, längd.

I den första lite äldre modellen av vinkelbegreppet avgränsar de två strålarna två öppna områden (Figur 13).

Figur 13



Denna modell användes tidigare i Sverige och finns beskriven i ”Matematikterminologi i skolan” från dåvarande skolöverstyrelsen (s. 36, 1966). En av modellens nackdelar var dess svaga operationella förklaringsvärde. Den gav ingen eller endast liten vägledning för hur en vinkel skulle mätas.

I den andra modellen, som inte skiljer sig nämnvärt från den förra, är vinkeln inte området utan strålarna och deras gemensamma ändpunkt. På så sätt undviker denna modell problemet med ett öppet oändligt stort område. Men inte heller denna modell ger någon direkt operationell förklaring till hur man mäter en vinkel.

I den tredje modellen, som är mer dynamisk, finns däremot en operationell förklaring till hur en vinkel mäts. Även i denna modell finns de två strålarna samt deras gemensamma ändpunkt. Vinkeln utgörs av en vridning av den ena strålen, så att den sammanfaller med den andra. På så sätt representeras vinkeln av vridningen och vridningens storlek avgör därmed vinkelns storlek. Modellen utnyttjar begreppet vridning, som i sin tur, då det definieras, måste använda vinkelbegreppet, alltså till viss del en cirkeldefinition. Trots detta har modellen operationella förtjänster.

Läroböcker i flera länder använder sig av dessa tre modeller för vinkelbegreppet i skolmatematiken (Close, 1982; Freudenthal, 1973; Strehl, 1983; Roels, 1985; Schweiger, 1986; Krainer, 1989; Mitchelmore, 1989; Lo, Gaddis & Henderson, 1996).

Förståelsen och behärskandet av vinkelbegreppet har visat sig vara besvärligt för elever i många länder. Mitchelmore och White (1998) förklarade: ”It is clear from the research literature that school students have great difficulty in coordinating the various facets of the angle concept. For example, students do not readily incorporate turning into their angle concepts.” Vridningen tycks alltså vara speciellt svår att förstå. Även Foxman och Ruddock (1983) rapporterade att bara 4 % av de 15-åringar, som undersöktes, spontant nämnde vridning, då de skulle beskriva vinkelbegreppet.

En slutsats möjlig att dra av forskningen på området är, att vinkelbegreppet borde ha fått stor uppmärksamhet både i grundskolans undervisning och i fortbildningsprogram för lärare.

4.3.3 Spatial visualiseringsförmåga

Att föreställa sig hur vridningen av ett tredimensionellt objekt avbildas i två dimensioner är en viktig komponent i den spatiala visualiseringsförmågan enligt McGee (1979). Denna förmåga tränas i många länder med speciella datorprogram, som gör det lättare för eleverna att förstå tvådimensionella representationer av tredimensionella objekt. Ryu, Chong och Song (2007) fann emellertid, att även begåvade elever ofta hade svårigheter att föreställa sig ett tredimensionellt objekt rumsligt utifrån dess tvådimensionella representation.

Ben-Chaim, Lappan och Houang (1988) studerade hur undervisning med datoranimering påverkade cirka 1000 elevers spatiala visualiseringsförmåga. Före undervisningens genomförande förelåg signifikanta skillnader med avseende på ålder, kön och socioekonomisk status. Elever i klasserna fem till åtta deltog i studien. Undervisningen resulterade i en avsevärt förbättrad spatial visualiseringsförmåga. Skillnaderna mellan pojkar och flickor utjämnades också. Dessutom kvarstod samtliga förbättringar efter ett år.

Elevers beräknings-procedurer

5. Elevers beräkningsprocedurer

Först kommer olika huvudräkningsprocedurer, som förekommer i undervisning och läroböcker, att beskrivas. Sedan refereras huvuddragen av resultatet av forskningsprojektet i Lilla Edet. Det utgör en betydelsefull logisk länk för resultatanalysen, som kommer i kapitel 8.

5.1 Huvudräkningsprocedurer

I första avsnittet görs en terminologisk genomgång av betydelsefull internationell forskning. Elevers tillämpningar av olika beräkningsprocedurer leder inte alltid till korrekta svar. En i detta avseende betydelsefull studie refereras i avsnitt två.

5.1.1 Terminologi

En algoritm är en stegvis procedur, som vi tillämpar på en uppgift vi önskar slutföra (Usiskin, 1998, p. 7). Denna definition är vanlig i den internationella forskningslitteraturen. Det vi i Sverige ibland kallar ”skriftlig huvudräkning” är således en form av algoritmer. Så i fortsättningen kommer inte enbart termen huvudräkningsprocedurer att användas i beskrivningarna utan även huvudräkningsalgoritmer.

Inom forskningen existerar något olika terminologier för huvudräkningsprocedurer, men likheterna mellan dem är slående. En harmonisering av benämningarna är därför inte svår att göra. Den tar sin utgångspunkt i en rapport från forskningsprojektet i Lilla Edets Kommun, ”Pupils’ Arithmetic Knowledge and the Procedural Models in Their Teaching – A Field-Study in two Schools” (Bentley, 2008b).

I huvudräkningsproceduren, *stegvis beräkning* (The Jumping strategy), sker stegen eller hoppen entalsvis och tiotalsvis.

Exempel: $37 + 16 = [37 \xrightarrow{3} 40;\ 40 \xrightarrow{13} 53] = 53$

Avsikten är att genom att hoppa till närmsta tiotal, så kan beräkningarna underlättas, vilken är den grundläggande principen för samtliga algoritmer. Stegvis beräkning används också på subtraktioner, men inte direkt, utan de omvandlas först till motsvarande additioner.

Exempel: $37 - 16 = [16 \xrightarrow{4} 20;\ 20 \xrightarrow{10} 30;\ 30 \xrightarrow{7} 37;\ 4 + 10 + 7] = 21$

Fuson et al. (1997) använder en beteckning som anger syftet med algoritmen ”Easier Number strategy” medan Yackel (2001) föredrar the ”Counting-Based strategy”, vilken uttrycker något om hur algoritmen fungerar.

I den andra huvudräkningsproceduren, *kompensationsberäkning* (The Compensating strategy), är den grundläggande idén att förändra det första talet så att det jämnas av till närmsta tiotal.

Exempel: $37 + 16 = [37 + \boldsymbol{\mathit{3}} = 40;\ 40 + 16 = 56;\ 56 - \boldsymbol{\mathit{3}}] = 53$

Sedan kompenseras för tilljämningen genom att talet tre subtraheras från resultatet (Carpenter et al., 1997). Också ” the Complementary Addition or Subtraction strategy” används för att nå det närmsta tiotalet (Klein & Beishuizen, 1998). Detsamma gäller även ”the Flexible Counting strategy” (Heuvel & Panhuizen, 2001).

I algoritmen *transformationsberäkning* (The Transformation strategy) transformeras också uppgiften till en beräkning, som lättare kan utföras. Denna strategi liknar mycket kompensationsberäkningar och hänförs därför ofta till dessa som en undergrupp. Algoritmen finns i två versioner, en för addition och en för subtraktion. I additionsversionen, adderas ett tal till den första termen och samma tal subtraheras från den andra termen (Seyler, Kirk & Ashcraft, 2002).

Exempel addition:
37 + 16 = [37 + ***3*** + 16 – ***3*** = 40 + 13] = 53

I versionen avsedd för subtraktioner adderas eller subtraheras samma tal till båda termerna.

Exempel subtraktion:
64 – 27 = [64 – ***4*** – 27 – ***4*** = 60 – ***20*** – 23 – ***20*** = 40 – 3] = 37

Båda versionerna ses alltså som en undergrupp till kompensationsberäkningar.

I *talsortsvis beräkning* (The Splitting strategy) så delas beräkningarna upp i tiotal för sig och ental för sig. Därefter kombineras delresultaten. Algoritmen finns i två versioner, dels en avsedd för addition och för subtraktion utan växling, dels en för subtraktion, som kräver växling (Thompson, 1999; Heuvel & Panhuizen, 2001; Klein & Beishuizen, 1998).

Exempel: 37 + 16 = [30 + 10 = 40; 7 + 6 = 13; 40 **+** 13] = 53
↑

I den första versionen adderas de partiella resultaten som pilen visar. Däremot som i exemplet nedan så subtraheras i den andra versionen de partiella resultaten. Detta beror på det negativa resultatet från subtraktionen av entalen.

Exempel: 64 – 27 = [60 – 20 = 40; 4 – 7 = –3; 40 **–** 3] = 37
↑

Yackel (2001) benämner dessa versioner “the Collection-based solution”, Fuson et al. (1997) “the Decompose-tens-and-ones strategy” och Carpenter et al. (1997) “the Combining of units separately”. Så flera forskare har identifierat samma algoritm men tilldelat den olika namn.

Mixad beräkning (Mixed strategy) är en kombination av talsortvis beräkning och kompensationsberäkning (Fuson et al., 1997).

Exempel: 64 – 27 = [60 – 20 = 40; 40 – 7 = 33; 33 + 4] = 37

Denna beräkning löser elegant problemet med växling vid subtraktion med hjälp av en och samma version.

Således finns det tre huvudalgoritmer, stegvis beräkning, kompensationsberäkning samt talsortsvis beräkning. Kompensationsberäkning omfattar förutom den vanliga kompensationsberäkningsproceduren också transformationsberäkning samt mixad beräkning. Stegvis beräkning består förutom av de två redovisade versionerna även av dubbelräkning från början och från delen samt nedräkning.

5.1.2 Lösningsfrekvens

Foxman och Beiszhusern (2002) analyserade APU-materialet (APU = Assessment of Performance Unit), som består av elevlösningar från 1987, bland annat för att studera de olika algoritmernas lösningsfrekvenser (accuracy). I materialet ingick också testuppgifter avseende begreppslig förståelse. Med hjälp av dessa uppgifter delades eleverna in i tre grupper, en med hög begreppslig förståelse, en med medelgod och en med mindre god. Grupperna analyserades sedan med avseende på användning av huvudräkningsprocedurer. Det visade sig då att elever, som hade en hög begreppsförståelse, i större utsträckning använde sig av kompensationsberäkning, medan de med mindre god förståelse, använde sig mer av talsortsvis beräkning. Medellösningsfrekvensen för de olika algoritmerna visade sig vara 79 % för kompensationsberäkning, 75 % för standardalgoritm samt 33 % för talsortsvis beräkning.

En god förståelse av talbegreppet och av platsvärde kan troligen underlätta användandet av algoritmen för kompensationsberäkning. Huruvida det finns ett kausalt samband mellan val av beräkningsstrategier och begreppsförståelse framgår inte av studien. Däremot tyder modellen av arbetsminnets funktion på ett sådant samband.

5.2 Elevers aritmetiska färdigheter

I detta avsnitt kommer forskningsprojektet i Lilla Edet att beskrivas (Bentley, 2008b). Bakgrunden till studien kommer först att ges. Sedan kommer elevernas exponerade huvudräkningsprocedurer att beskrivas. Därefter rapporteras om den komparativa läroboksanalysen, i vilken elevernas exponerade strategier jämförs med en av läroböckernas presentationer av motsvarande beräkningsprocedurer. Sist analyseras relationen mellan elevernas utveckling av talfakta och deras möjligheter att tillgodogöra sig undervisningen i matematik.

5.2.1 Bakgrund

Anledningen till att den omfattande studien i Lilla Edets kommun startades, var ett fortbildningsprojekt för lärare i matematik på två av skolorna. Utgångspunkten för projektet var, att innehållet skulle vara en bearbetning av de problem, som lärarna ställs inför i vardagen. Därför måste hindren i elevernas matematikutveckling kartläggas. Djupintervjuer bedömdes vara ett effektivt sätt att med precision avgöra vilka problem som fanns. Nästan 300 elever i årskurserna 1, 2, 3, 4 och 7 intervjuades. Intervjuerna, som i medeltal tog en halvtimma, transkriberades för att underlätta den efterföljande vetenskapliga analysen.

Avgörande för den vidare analysen av elevlösningarna i TIMSS-projektet var, att kartlägga hur eleverna i Lilla Edet resonerade vid olika högfrekventa typer av lösningar. Genom att koppla ihop resultat från projektet i Lilla Edet med resultatet i TIMSS-projektet, kunde slutsatser dras om elevernas misstag på en betydligt mer specifik nivå.

5.2.2 Elevers huvudräkningsprocedurer

Utrymmet här medger ingen längre genomgång av resultatet från Lilla Edet utan fokus läggs på eleverna i årskurs 4 och deras beräkningsalgoritmer. För en fylligare redovisning se Bentley (2008b). De problem, som identifierats uppkom i årskurs 3 och hade ännu i årskurs 7 inte arbetats bort. I tabell 1 presenteras en

Tabell 1 Elevers exponerade beräkningsalgoritmer, Klass 4, n = 16 (17)

	Talfakta		Räkna upp från			Talsortsvis beräkning			Kompensations-beräkning			Standard Algoritm		
Elev[1]	Säker	Osäker	Alla	Delen	Ned	Korrekt	Inkorrekt	Modifierad	Vanlig	Transformation	Mixad	Vanliga	Modifierad	Kommentar
Dan		x		x			x	x[2]		x				[2] Växling
Dave		x		x	x	x	x							
Ed		x		x	x				x		x[2]			[2] inkorrekt
Felicia				x						x[2]			x	[2] inkorrekt
Fia				x			x							
Ivar		x					x	x[2]	x	x[3]				[2] Också växling [3] inkorrekt
Inge		x				x	x	x[2]	x					[2] inkorrekt
Meg							x		x				x	
Mia				x					x[2]	x				[2] inkorrekt
Ofelia					x							x	x	
Qintus		x		x	x			x						
Rune							x	x[2]	x					[2] Också växling
Tim							x	x[2]						[2] inkorrekt
Yngve				x			x		x					
Uno		x		x	x		x		x[2]	x[2]				[2] inkorrekt
Urban		x			x			x[2]						[2] Också växling, inkorrekt
Totalt		**8**		**9**	**6**	**2**	**10**	**8**	**8**	**5**		**1**	**3**	

[1] Fingerade namn har används

sammanställning av elevernas beräkningsalgoritmer i en fjärde klass, såsom ett typexempel.

Ingen av eleverna hade utvecklat någon säkerhet vad beträffar *talfakta* (Se kapitel 3, s. 8). Många använde sig av *uppräkning från delen* med fingerräkning. Då Dave blev tillfrågad om 51 – 48, svarade han:

> ***Vet du hur jag gör detta? Jag tar det [48] och räknar upp till det [51]. Det är det samma som minus. [Vad blir det då?] Tre. [Kan du göra det på något annat sätt?] Du kan också räkna bakåt, som, 50, 49, 48. Det har vi lärt av vår lärare.***

Övergång till addition och uppräkning är typiskt för den *stegvisa beräkningsproceduren.*

Ett mindre antal elever dubbelräknade ned till delen också med hjälp av fingrarna.

Talsortvis beräkning utfördes korrekt av två elever. Huvuddelen av eleverna däremot tillämpade konsekvent den beräkningsversion, som är avpassad för subtraktion utan växling på subtraktion, som kräver växling. Som illustration till denna beräkningsprocedur får Inges resonemang tjäna: ”[Hur utförde du beräkningen av 3 * 21?] 63. Jag tog 2 + 2 + 2, som är 6 och sedan 1 + 1 + 1, som är 3.” Eftersom ingen växling behövdes, så var det rätt version som användes. Andra lyckades mindre bra, eftersom de använde fel version. Fia hävdade då hon löste subtraktionen 51 – 48: ”[tystnad] 17. Jag tänkte att 5 – 4 och 1 – 8.” Detta betyder, att eleven delade upp talen i tiotal och ental och beräknade dem separat. Delresultaten blev 1 och 7. Efter kombination blev resultatet 17, vilket visar, att fel version av algoritmen talsortvis beräkning tillämpades. Flera elever försökte modifiera proceduren för talsortsvis beräkning för att passa subtraktion med växling. Några elever lyckades, vilket Urbans resonemang är exempel på: [20 – 10 = 10; 7 – 11 = 4] fyra. Beräkningen av tiotal och ental var för sig är typisk för algoritmen talsortsvis beräkning. Eleven urskiljde inte ordningen av termerna i den sista subtraktionen och skrev 7 – 11 istället för 11 – 7 = 4. Emellertid visade det sig, att eleven fick skillnaden till 4 ändå.

Hälften av eleverna använde *kompensationsberäkning* och fick oftast korrekt resultat. Uno förklarade: [nio plus fem?] Jag tänker att ett plus nio är tio och då har jag fyra kvar, så det blir fjorton". Att addera upp till tiotal och sedan fortsätta beräkningen, karaktäriserar det sätt att resonera, som är typiskt för algoritmen kompensationsberäkning.

Två av eleverna använde korrekta versioner av *transformationsberäkning*, medan några elever blandade ihop versionerna. Dan genomförde en korrekt beräkning med hjälp av transformationsberäkningsalgoritmen. Han ombads beräkna 82 – 47, han sade: "Det är fyrtio … Nåja, 45 om jag tar 2 – 7 då har jag fem kvar och sedan tar jag 45 – 80 och det är 35." Eleven subtraherade två från varje term och kastade om subtraktionen. Istället för att komma fram till 80 – 45 så fick han 45 – 80. Trots den omkastade subtraktionen, illustrerar resonemanget en principiellt korrekt tillämpning av algoritmen för transformationsberäkning.

När Ivar ombads att beräkna 51 – 49, förväxlade han de två versionerna: "Vad var det? Då tar jag ett från 51 och får 50 – 50 och det är noll." Denna elev exponerade alltså ett av de vanliga misstagen, som är förknippat med transformationsberäkningsalgoritmen. Istället för att subtrahera båda termerna med samma tal, så subtraherade han ett från 51 och adderade ett till 49. Han tillämpade den version, som är anpassad för addition, på en subtraktion.

Eleven Ed exponerade *mixade beräkningar*: "[Hur gjorde du när du beräknade 23 – 17?]. Först beräknade jag 20 – 10 och sedan minus sju och minus tre [20 – 10 = 10; 10 – 7 = 3; 3 – 3] = 0." Först behandlas tiotalen och sedan entalen. Modifikationen innebär, att entalen sju och tre subtraheras från tiotalet istället för att beräknas separat. Om treorna hade adderats istället för subtraherats i sista ledet, så hade beräkningen varit korrekt.

Som framgår av tabellen, så hade varje elev flera beräkningsalgoritmer, några utfördes korrekt, andra inte. En sammanfattning av situationen i denna klass är, att eleverna gav ett förvirrat intryck. De andra klasserna uppvisade liknande resultat.

5.2.3 En komparativ analys av läromedel och elevers beräkningsprocedurer

Elevernas exponerade beräkningsprocedurer jämfördes med hur procedurerna presenterades i deras läroböcker. Huvudsakligen hade två olika läroböcker använts, en i treorna och en i fyrorna. Det är viktigt att notera, att ingen av läroböckerna beskrev i vilket sammanhang de olika procedurerna skulle användas. I stället angavs endast exempel. I den lärobok, som användes i årskurs tre, togs den stegvisa beräkningsproceduren (Jumping strategy) upp även för subtraktion, som då ersattes med motsvarande addition. Poängen med detta, som inte beskrevs i boken, är emellertid av avgörande betydelse för elevernas korrekta tillämpning av proceduren. Flera elever tillämpade den på ett felaktigt sätt. Vid beräkning av till exempel, 17 – 7, fick ett antal elever detta till 7. De räknade ned till 7 istället för att räkna ner sju steg. Detta beteende var fast etablerat och eleverna besvarade flera exempel på samma sätt.

Algoritmen för kompensationsberäkning beskrevs i läroboken och flera elever uppvisade, att de behärskade proceduren.

Det samma gällde i stort den av versionerna av transformationsberäkning, som var anpassad för subtraktion.

I läroboken beskrevs inte båda versionerna av den talsortsvisa beräkningsstrategin (Splitting strategy), utan bara den, som är avsedd för subtraktion utan växling. Denna version använde emellertid ett flertal elever på subtraktionsuppgifter, som krävde växling och fick därför felaktiga resultat. Till exempel blev 51 – 49 = 18.

Slutsatsen av läroboksanalysen för årskurs fyra blev, att böckernas bristfälliga beskrivningar speglades i elevernas misstag.

5.2.4 Utveckling av talfakta

I årskurs sju hade ungefär hälften av eleverna utvecklat talfakta. Denna färdighet är avgörande för elevers fortsatta inlärning i matematik. Eleverna exponerade i medeltal tre beräkningsprocedurer förutom standardalgoritmen samt dubbelräkning från delen och ned till delen. De elever, som inte hade utvecklat talfakta, exponerade minst en beräkningsprocedur, som stundom gav felaktigt resultat. Empirin visade således är det ett nödvändigt villkor för att talfakta inte har utvecklats, att en tillämpning av beräkningsprocedurerna inte alltid ger korrekt resultat. Däremot exponerade de elever, som hade utvecklat talfakta, beräkningsprocedurer, vilka samtliga gav korrekta resultat. Om beräkningsprocedurerna alltid leder till korrekta resultat, så tycks detta vara ett tillräckligt villkor för att talfakta ska ha utvecklats (Bentley, 2008b).

Problem-
formulering
och syfte

6. Problemformulering och syfte

Då tidigare deskriptiva analyser av TIMSS-resultaten redovisats, planerades vid studien 2007 en kompletterande mer analytiskt inriktad redovisning. Ett problem med en sådan redovisning är, att testuppgifterna måste beskrivas, för att analysen skall kunna förstås. Eftersom ett antal uppgifter efter varje mättillfälle görs offentliga och de resterande uppgifterna förblir konfidentiella, så uppenbarades en möjlighet att analysera elevers lösningar av de offentliga uppgifterna. En analys av detta slag kan ge en bild av elevernas kunskaper. Dessa kunskaper kan förklara, varför eleverna exponerar lyckade eller misslyckade lösningar. I fortsättningen kommer därför benämningen lösningar att hänföras till både sådana, som leder till korrekta och sådana, som leder till inkorrekta resultat.

Analysen av orsakerna till TIMSS-resultatet består av en specifik nivå och en generell nivå. På den specifika nivån beskrivs elevernas lösningsstrategier samt dessas frekvens. På den generella nivån är känt från tidigare forskning hur förståelsen av begrepp och hur tillämpningen av procedurer kan påverka elevers lösningar. Genom att utnyttja kunskaper från dessa båda nivåer kan slutsatser dras om vilken förståelse av begrepp och vilken tillämpning av procedurer, som kan ligga bakom TIMSS-elevernas lösningsstrategier. Denna kunskapsbild avslöjar på ett djupare plan orsakerna till TIMSS-resultatet och utgör därför en solid grund för förbättringsåtgärder.

Studien i Lilla Edet, där ca 300 elever djupintervjuades, erbjöd en grund, som behövdes för att komplettera vissa delar i analysen av TIMSS-projektets resultat.

Det kan också konstateras att de begreppsmodeller, som används i skolans geometriundervisning, spelar en stor roll för elevernas lösningsmöjligheter, något som visar sig inte minst i den internationella forskningens resultat. Begreppsmodellernas operativa tillämpningsbarhet kan också avgöra hur svårt det är för elever att lösa en uppgift.

Inom algebra så spelar variabelbegreppet en stor roll för elevernas förståelse, vilket inte bara är beskrivet i internationella forskningsrapporter utan även i nationella. Även andra uppfattningar om vissa centrala begrepp inom skolmatematiken kan påverka elevers framgångar inom algebra området.

Avsikten med denna studie är därför att koppla elevernas sätt att lösa testuppgifterna till hur de förstår centrala begrepp och tillämpar centrala procedurer i skolmatematiken. Studien syftar därför till att genom analys av elevlösningar på de frisläppta TIMSS-uppgifterna i årskurs fyra och åtta belysa vilken förståelse av centrala matematiska begrepp och tillämpning av procedurer som eleverna exponerat.

Då det antal elever som genomfört TIMSS-testet är förhållandevis stort är generella slutsatser möjliga att dra utifrån trender som är relativt frekventa. För att med bred marginal vara på den säkra sidan genomfördes dessutom en motsvarande analys av elevlösningar av vissa uppgifter inom det nationella ämnesprovet för årskurs 5 från 2007.

6.1 Syfte

Syftet är alltså

- att beskriva elevers lösningsstrategier av de inom TIMSS-projektet frisläppta uppgifterna i årskurserna 4 och 8 samt av de insamlade elevlösningarna av det nationella ämnesprovet i årskurs 5.
- att försöka belysa vilken förståelse av centrala matematiska begrepp och tillämpning av beräkningsprocedurer, som ligger bakom dessa elevers exponerade lösningsstrategier.

Metod

7. Metod

I TIMSS finns tre olika typer av uppgifter, som är klassificerade efter hur lösningarna skall redovisas. Den första typen utgörs av uppgifter med valbara svarsalternativ, så kallade multiple-choice uppgifter. I den andra typen av uppgifter skall eleverna endast redovisa ett svar och inte hur de kommit fram till detta, medan i den tredje typen av uppgifter skall även lösningsförfarandet redovisas.

Bedömningen av multiple-choice uppgifterna är förhållandevis enkel då en elev har kryssat i en ruta för ett alternativ eller ej, vilket gör att statistisk behandling av dessa alternativa val relativt enkelt resulterar i frekvensfördelningar för uppgifterna. I flertalet uppgifter representerar inte distraktorerna vilka slumpmässiga fel som helst, utan misstag som har sina rötter i en specifik begreppsuppfattning eller en viss tillämpning av en procedur. Sådana alternativ har identifierats utifrån studien i Lilla Edet och tidigare forskning inom området, som visar hur en viss begreppsuppfattning och procedurtillämpning manifesteras i elevers lösningar och svar.

Emellertid måste hänsyn tas till gissningar och dessas påverkan på frekvensfördelningen. Om fyra svarsalternativ föreligger och dessa väljs slumpmässigt så är samtliga lika sannolika och 25 % av eleverna kommer att välja varje alternativ. Ett så kallat Chi^2-test mäter avvikelsen från dessa förväntade frekvenser. Om en tillräckligt stor avvikelse från den förväntade fördelningen föreligger så beror den inte på en gissning utan elevernas kunskaper anses ha gjort sig gällande. Mot denna bakgrund har endast uppgifter med tydliga sådana avvikelser använts som underlag vid kartläggningen av elevernas kunskaper.

Bedömning av uppgifter, som endast kräver svar, har skett efter en mall som används internationellt inom TIMSS-projektet. I några fall har avvikande svar, som har rötter i en specifik begreppsuppfattning eller en tillämpning av viss procedur uppmärksammats i bedömningsmallen medan i andra har elevsvaren analyserats på nytt för att beskriva karaktären på de andra svar som har avgivits samt för att avgöra hur frekvent de förekommit.

Den tredje typen av uppgifter har erbjudit en rikare beskrivning av elevernas lösningsstrategier. Ett antal elevlösningar av dessa uppgifter har analyserat på nytt då bedömningsmallen inte alltid fokuserat på olika typer av elevers lösningar utan mer på deras svar. I dessa dokumenterade elevlösningar har det varit möjligt att framför allt se olika tillämpningar av beräkningsprocedurer men även hur olika uppfattningar av begrepp kommit till utryck.

I både årskurs 4 och 8 består TIMSS-testet av fjorton olika uppgiftsblock. I varje häfte ingår två 14 uppgiftsblock på ett sådant, sätt att en överlappning mellan häftena föreligger. Sex uppgiftsblock i vardera årskurs 4 och 8 är frisläppta. Varje sådant uppgiftsblock görs av ca 450 elever i årskurs 4 och av ca 550 elever i årskurs 8. Följaktligen grundar sig denna resultatredovisning på totalt ca 6 000 elevers lösningar.

Analysmaterialet i det nationella ämnesprovet omfattade drygt 500 elevers lösningar. Den totala populationen i en årskurs är ungefär 100 000 elever.

Del D av det nationella ämnesprovet var så konstruerat att vissa benämnda uppgifter ledde till samma subtraktion, som någon sida senare testades ickebenämnt. Dessutom var de subtraktioner utan problemtext försedda med korta beskrivningsalternativ om hur eleverna hade utfört beräkningarna. Detta gjorde det möjligt att jämföra elevers lösningsstrategier i de båda kontexterna.

Vid redovisningen av resultatet från Lilla Edet har fingerade namn används på eleverna i den klass som redovisas. Eftersom skolledningen offentliggjort projektet samt delar av resultatet i press, radio och TV har inte de vanliga etiska reglerna i övrigt tillämpats vid redovisningen.

Först har olika lösningsstrategier för respektive testuppgift beskrivits. Därefter har för varje område konstaterats om det finns relevant forskning, som visar en tänkbar orsak bakom de olika lösningsstrategierna. Utifrån sådana forskningsresultat har det varit möjligt att skapa en bild av elevers kunskaper, olika sätt att förstå eller missförstå begrepp samt hur tillämpningar av beräkningsprocedurer har skett. På detta sätt är flera tänkbara orsaker till förekomsten av vissa elevsvar och lösningar kända. Dessa orsaker utgör tillräckliga villkor för denna förekomst av elevlösningar. Det kan emellertid inte omedelbart uteslutas att elever kan ge motsvarande svar eller lösningar av andra anledningar. Mot denna bakgrund är det viktigt att endast relativt frekventa val av svarsalternativ och lösningsstrategier behandlas. I ett sådant fall minskar sannolikheten att ett slumpmässigt misstag skulle ha samma karaktär, som exempelvis ett misstag som beror på olika sätt att förstå eller missförstå ett begrepp eller tillämpning av beräkningsprocedur i fel kontext. Detta är alltså anledningen till att endast orsaken bakom högfrekventa svarsalternativ och lösningsstrategier har analyserats.

I de frekvenser, som olika svarsalternativ har i TIMSS internationella underlag, har också de elever, som inte försökt lösa en uppgift medtagits i frekvensfördelningen. Det är viktigt att notera att man inte riktigt kan veta anledningen till att eleven inte försökt. Detta behöver inte nödvändigtvis betyda att eleven inte kan lösa uppgiften, en annan orsak kan tillexempel vara tidsbrist eller ovilja att delta i undervisningen. Vid den förnyade genomgången av testuppgifter med redovisade lösningar, visade det sig att många av de elever, som lämnat blankt på den analyserade uppgiften, hade försökt lösa uppgifterna, som var placerade både före och efter den. Detta tyder troligtvis inte på tidsbrist utan mer på att eleven faktiskt inte klarat att lösa uppgiften. I några fall var samtliga uppgifter efter den analyserade blanka. Detta har emellertid tolkats, som att eleven upplevde tidsbrist. I det förra fallet har därför för dessa uppgifter också redovisats frekvensen för de elever som inte försökt lösa testuppgiften. Speciellt i de fall då relativt många elever avstått från att försöka lösa en uppgift har detta redovisats särskilt.

Resultat
– elevers matematiska resultat i årskurs fyra

8. Resultat – elevers matematiska kunskaper i årskurs fyra

För eleverna i årskurs 4 ligger TIMSS-resultatet inom delområdena aritmetik och geometri under EU/OECD-genomsnittet. Det är mot denna bakgrund som utfallet på dessa områdens testuppgifter analyseras och beskrivs.

8.1 Taluppfattning och aritmetik

Testuppgifterna avseende elevers aritmetiska förmåga omfattar huvudsakligen förståelse av talbegreppet samt förståelse och tillämpning av inblandade operationer. I det följande kommer därför, förutom enkodningsprocessen, operationerna addition, subtraktion, multiplikation och division att beröras. Även enkla beräkningar med tal i bråkform samt proportionalitet kommer att tas upp.

8.1.1 Talbegreppet

Testningen av talbegreppet omfattar fyra uppgifter. Den första uppgiften (M04_01) förutsätter förståelse av begreppet platsvärde.

M04_01

Vilket tal motsvarar 3 ental + 2 tiotal + 4 hundratal?

Ⓐ 432
Ⓑ 423
Ⓒ 324
Ⓓ 234

M041052

I de fyra alternativen är siffrorna permuterade. Det mest frekventa alternativet är också det korrekta, 423, och är valt av fyra femtedelar av eleverna (79,5 %). Det näst frekventa alternativet, 324, har ungefär en sjundedel av eleverna valt (14,7 %). Detta alternativ representerar det reverserade talet till 423. Denna reversering är känd som ett vanligt misstag bland yngre elever (Johansson, 2005; Bentley, 2008b).

I den andra uppgiften (M07_03) skall eleverna välja vilket av fyra tal som är närmast tio.

M07_03

Vilket av dessa tal ligger närmast 10 i storlek?

Ⓐ 0,10
Ⓑ 9,99
Ⓒ 10,10
Ⓓ 10,90

M031332

Det korrekta alternativet, 9,99, valdes av tre fjärdedelar av eleverna (75,0 %). Tillsammans fastnade ungefär 10 % av eleverna för de båda distraktorerna 0,10 och 10,10. Trots den relativt höga lösningsfrekvensen (75,0 %) är den ändå inte tillfredställande, då en fjärdedel av eleverna inte lyckades lösa uppgiften.

I den tredje uppgiften (M02_01) skall eleverna storleksordna fyra tvåsiffriga tal.

M02_01

I vilket alternativ är talen ordnade från det STÖRSTA till det MINSTA?

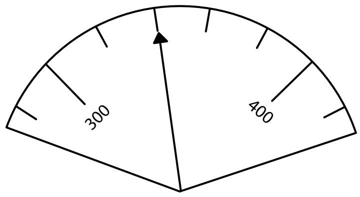
Ⓐ 36, 43, 66, 87
Ⓑ 66, 43, 36, 87
Ⓒ 87, 66, 36, 43
Ⓓ 87, 66, 43, 36

M041014

Något mer än tre fjärdedelar av eleverna (77,4 %) valde det korrekta alternativet d). Den mest frekventa distraktorn (12,3 %) var a), som i stället representerar en storleksordning från det minsta till det största. Det kan ju förefalla mer naturligt för eleverna att storleksordna från det minsta till det största, då tallinjen har den uppställningen och talraden vanligtvis behandlas på det sättet. Det är anmärkningsvärt, att det finns elever (10,3 %), som inte har fått lära sig att storleksordna talen upp till 100. Denna aspekt av talbegreppet, benämnd talens månghet (numerosity) är enligt Marton & Booth (2000) en försummad aspekt. Denna månghet missas lätt, då undervisningen har en procedurell inriktning, det vill säga när de fyra elementära operationerna behandlas mekaniskt.

Den fjärde uppgiften (M07_07) handlar om en skala och en visare. Skalstrecken mellan 300 och 400 är indelade i fem skaldelar av lika storlek. På detta sätt representerar varje del 20 enheter. Visaren pekar på det andra skalstrecket räknat från 300. Fyra multiple-choice alternativ presenteras.

M07_07



Vilket tal pekar visaren på i skalan?

Ⓐ 302
Ⓑ 310
Ⓒ 320
Ⓓ 340

M031276

Det mest frekventa alternativet, som valdes av en majoritet av eleverna (57,1 %), är också det korrekta, 340. Utifrån en logisk utgångspunkt bör 320 vara den mest frekventa distraktorn. Nästan en tredjedel av eleverna (30,0 %) valde detta alternativ. Distraktorns relativt höga frekvens beror troligen på, att elever har begränsad erfarenhet av detta sätt att dela in intervall med skalstreck.

8.1.2 Addition

Addition testas med endast en uppgift (M01_06). Den huvudsakliga svårigheten tycks inte vara operationen som sådan utan snarare enkodningen av problemsituationen, vilken representerar en jämförelse. Även förståelsen av tidsbegreppet och beteckningar förknippad med det kan ha vållat problem.

M01_06

David, Robert och Linnea går hem från skolan tillsammans. Det tar dem 25 minuter att komma hem till Linnea. Sedan tar det David och Robert 10 minuter att komma hem till Robert. Därifrån tar det David 5 minuter att gå hem.

Vilken tid måste de gå från skolan för att David ska komma hem till kl. 15.50?

Svar: _______________

M031068

För att lösa problemet måste 25, 10 och 5 adderas. Resultatet skall sedan subtraheras från 15.50. Hälften av eleverna löste problemet (49,7 %), den andra hälften gjorde det inte (50,3 %). Den huvudsakliga svårigheten tycks vara enkodningen av problemsituationen. Enligt tidigare forskning (Fuson, 1992) är just jämförelsesituationer svåra att enkoda, om de inte tidigare behandlats ordentligt i undervisningen.

8.1.3 Subtraktion

Eftersom det i testningen av subtraktion i flera uppgifter ingick problemtext, så var den huvudsakliga svårigheten oftast inte beräkningen utan enkodningen av problemen.

Den första testuppgiften (M01_02) handlade om en oläslig siffra i standardalgoritmen för subtraktion.

M01_02

M031106

$$\begin{array}{r} 942 \\ -5\blacksquare 7 \\ \hline 415 \end{array}$$

Magnus gjorde subtraktionen i läxa, men spillde lite av sin saft på den. En siffra kunde inte läsas. Hans svar, 415, var rätt. Vilken är siffran som saknas?

Svar: _______________

Det korrekta svaret är siffran ”2”, eftersom differensen mellan 942 och 527 är 415. I tabell 2 presenteras kategorierna avseende elevernas olika sätt att resonera.

Tabell 2 Kategorier som representerar elevernas olika sätt att resonera vid beräkningen av 942 – 5 7, årskurs 4, n = 461

Kategorier	Frekvens*	Relativ frekvens (%)	Typiska svar
Korrekt i princip	94	20,4	527
Talsortsvis beräkning utan växling	250	54,2	537
Additiva beräkningar	29	6,3	557
Andra typer av inkorrekta beräkningar	60	13,0	-
Ingen beräkning utförd	28	6,1	-
Totalt	**461**	**100,0**	

* Ej viktade frekvenser

En mindre grupp elever (20,4 %) lyckades lösa uppgiften korrekt. Majoriteten av eleverna (54,2 %) använde talsortsvis beräkning utan växling och fick därmed det inkorrekta svaret 3. I den procedurella modellen, talsortsvis beräkning, opererar eleverna på hundratal, tiotal och ental var för sig. Den korrekta versionen av talsortsvis beräkning var uppenbarligen inte känd av eleverna, så de använde den version, som inte var avsedd för växling. Detta betyder att växling från fyra, för att utföra beräkningen 2 – 7, inte beaktas och att ett tiotal inte växlades från fyran.

Andra typer av misstag förekom av vilken en reverserad subtraktion av tiotalen, som resulterade i svaret fem, var frekvent. Att döma av resultatet från det nationella ämnesprovet, så hade endast ungefär en tredjedel av eleverna lärt sig standardalgoritmen för subtraktion i undervisningen. Detta kan till stor del förklara den extremt låga lösningsfrekvensen.

Den andra testuppgiften (M01_03) handlade om en jämförelse av olika antal flickor under två skolår.

M01_03

M031282

Förra året var det 92 pojkar och 83 flickor i Mariaskolan. I år är det 210 elever, och 97 är pojkar. Hur många fler flickor är det i år än det var förra året? Visa din uträkning.

Svar: _______________

Enkodningsprocessen av jämförelsesituationen kunde leda till två på varandra följande subtraktioner, 210 – 97 = 113 och 113 – 83 = 30. Så, det var alltså 30 flickor fler detta år än förra året. Eleverna uppvisade även andra sätt att lösa uppgiften. Kategoriseringen av enkodningen och beräkningarna presenteras i tabell 3.

Tabell 3 Kategorier av elevernas enkodning och beräkning av ”Problemet om jämförelse av antalet flickor”, M01_03, Årskurs 4, n = 457

Kategorier	Frekvens*	Relativ frekvens (%)	Typiska svar
Korrekt enkodning och korrekt beräkning	111	24,3	30
Korrekt enkodning men inkorrekt beräkning	42	9,2	20
Inkorrekt enkodning men korrekt beräkning	121	26,5	113
Inkorrekt enkodning och inkorrekt beräkning	62	13,6	103
Icke kategoriserad	39	8,5	-
Ingen ansats att lösa uppgiften	82	17,9	-
Totalt	**457**	**100,0**	

*Ej viktade frekvenser

Något mindre än en fjärdedel av eleverna (24,3 %) lyckades med att enkoda uppgiften och utföra beräkningen korrekt. Enligt tidigare forskning (Fuson, 1992) är just jämförelsesituationer svåra att enkoda, om de inte tidigare frekvent behandlats i undervisningen.

Den tredje testuppgiften (M02_05) behandlade subtraktion av decimaltal:

M02_05

M041250

Subtrahera
5,3 – 3,8

Svar: _______________

Enligt den bedömning som gjorts inom ramen för TCMA[1] (Test of Curriculum Matching Analysis) faller denna testuppgift inte inom uppnåendemålen för årskurs 5 i kursplanen för matematik. Misstagen som eleverna gör är ändå intressanta, eftersom de följer samma mönster som de, som matchar kursplanens mål. Elevernas principiellt olika sätt att resonera presenteras i tabell 4.

[1] Se appendix C i TIMSS 2007, internationella matematikrapport

Ungefär en tredjedel av eleverna uppvisade en huvudsakligen begreppsligt korrekt förståelse av platsvärde och subtraktion. En andra tredjedel utförde ingen beräkning, medan ungefär en fjärdedel exponerade den talsortsvisa beräkningen avsedd för subtraktion utan växling, som i detta fall var en inkorrekt tillämpning.

Den principiellt korrekta lösningen omfattade tre olika sätt att lösa uppgiften. En relativt stor grupp av dessa elever behärskade helt platsvärdesbegreppet och subtraktionen, en mindre grupp missade decimaltecknet och fick 15 istället för 1,5. En ännu mindre grupp gjorde mindre fel i beräkningarna.

Tabell 4 Kategorier av elevers principiella sätt att lösa subtraktionen, 5,3 – 3,8, årskurs 4, n = 461

Kategorier	Frekvens*	Relativ frekvens (%)	Typiska svar
Principiellt korrekt	161	34,9	1,5
Talsortsvis beräkning utan växling	118	25,6	2,5
Andra typer av inkorrekt beräkning	41	8,9	-
Ingen beräkning utförd	141	30,6	-
Totalt	**461**	**100,0**	

*Ej viktade frekvenser

En av de mest frekventa lösningarna var resultatet av en tillämpning av den felaktiga versionen av strategin för talsortsvis beräkning. Det som är typiskt för denna inkorrekta version är, att subtraktionen genomförs utan växling fastän den egentligen kräver detta. I en sådan felaktig tillämpning dras alltid det mindre talet från det större. Många elever uppvisade hur de använde fel version av strategin för talsortsvis beräkning, en mindre grupp missade dessutom decimaltecknet medan en annan grupp gjorde några mindre räknefel.

En lösningsstrategi bestod av en addition av talen istället för av en subtraktion. En annan bestod av att utförandet av subtraktionen startade från vänster i kombination med felaktig växling. Dessutom förekom några mindre fel i beräkningarna.

Den fjärde testuppgiften (M01_07) innehöll, förutom en subtraktion, ett enhetsbyte från liter till milliliter.

M01_07

En flaska innehåller 1 liter vatten. Tony häller ur 250 milliliter i ett glas. Hur mycket vatten finns det kvar i flaskan?

Svar: _______________ milliliter

M031299

Knappt hälften av eleverna (46,3 %) löste problemet, medan ungefär en tredjedel (31,9 %) inte gjorde det och en drygt femtedel (21,8 %) inte försökte. Det huvudsakliga problemet i denna uppgift är troligen inte subtraktionen i sig utan omvandlingen av enheter från liter till milliliter. Enkodningen av denna ”förändring-ta-bort-situation” som leder till en subtraktion, kan inte ha orsakat eleverna alltför stora problem.

Den femte testuppgiften (M01_08) var det så kallade “katt problemet”.

M01_08

Ali ville ta reda på hur mycket hans katt vägde. Han vägde sig själv och såg att vågen visade 57 kg. Sedan steg han upp på vågen medan han höll i katten och såg att vågen visade 62 kg.

Vad var kattens vikt i kilogram?

Svar: _______________ kilogram

M031301

Problemet kunde lösas med operationen 62 – 57. Också vid analysen av denna uppgift görs en åtskillnad mellan enkodningsprocessen och beräkningen av den matematiska modellen. Som visas i tabell 5 så hade många elever löst problemet korrekt.

Tabell 5 Kategorier av elevernas enkodning och beräkning av ”Kattproblemet: 62 – 57”, M01_08, årskurs 4, n = 457

Kategorier	Frekvens*	Relativ frekvens (%)	Typiska svar
Korrekt enkodning och korrekt beräkning	329	72,0	5 kg
Korrekt enkodning men inkorrekt beräkning	27	5,9	15 kg
Inkorrekt enkodning men korrekt beräkning	0	0	-
Inkorrekt enkodning och inkorrekt beräkning	48	10,5	-
Ingen ansats till lösning	53	11,6	-
Totalt	**457**	**100,0**	

*Ej viktade frekvenser

Några elever (5,9 %) kom fram till den matematiska modellen 62 – 57, men löste den inte korrekt utan fick 15 kg. Detta visade sig motsvara en inkorrekt användning av den version av talsortsvis beräkning, som är avsedd för subtraktion utan växling. Denna beräkning krävde växling.

En något större grupp elever (10,5 %) lyckades inte enkoda problemet korrekt. En grupp av ungefär samma storlek (11,6 %) försökte inte lösa uppgiften. Detta kan bero på, att det är en jämförelsesituation, som skall enkodas. Man jämför vikten av Ali med vikten av Ali och hans katt. Även enhetsbeteckningarna kilogram och förkortningen kg kan ha förvillat eleverna.

Den sjätte testuppgiften (M02_06) handlade om att köpa olika saker.

M02_06

Bo har 10 zed. Till lunch köper han en flaska fruktjuice för 2,50 zed och en smörgås för 3,85 zed. Hur mycket pengar har Bo kvar när han betalat sin lunch?

Ⓐ 3,65 zed

Ⓑ 4,75 zed

Ⓒ 6,35 zed

Ⓓ 16,35 zed

M041094

Av de fyra "multiple-choice" alternativen representerade tre av dem olika sätt att enkoda problemet. Det första var korrekt, 3,65 zed. Det erhölls genom att subtrahera kostnaden för både juicen och smörgåsen, 10 – 2,50 – 3,85. Något mer än en femtedel av eleverna (22,1 %) valde detta alternativ. Det andra alternativet, 4,75 zed, var ett tänkbart svar men omöjligt att erhålla genom enkla beräkningar. Lite mer än en fjärdedel (27,4 %) valde detta alternativ. Det tredje alternativet, 6,35 zed, kunde fås genom att addera 2,50 och 3,85. En majoritet av eleverna (42,2 %) hade valt detta alternativ. Det sista alternativet, 16,35 zed, kunde erhållas genom att addera alla tillgängliga tal, 10 + 2,50 + 3,85. En mindre grupp av elever (1,7 %) valde detta. Det faktum att många elever inte valde detta alternativ torde bero på insikten, att om Bo hade 10 zed, så kan han inte få mer pengar, när han köper något.

Det huvudsakliga hindret för att lösa problemet tycks vara enkodningen av problemtexten, trots att den representerar en förändring-ta-bort-situation.

Den sjunde testuppgiften (M07_02) var en beräkning av en subtraktion av två decimaltal.

M07_02

12,36 – 9,7 =

Svar: _______________

M031030

Denna uppgift bedöms inte ingå i uppnåendenivån för årskurs 5 i kursplanen i matematik. Såsom syns i tabell 6, så har bara fyra elever lyckats lösa uppgiften korrekt. Nästan hälften av elevsamplet (48,1 %) använde sig av den felaktiga versionen av strategin för talsortsvis beräkning, dvs. den som är avsedd för subtraktion utan växling. En mindre grupp (6,5 %) adderade talen istället för att subtrahera dem. En knapp fjärdedel (24,5 %) exponerade en lösningsstrategi, som inte var möjlig att identifiera. Nästan en femtedel av eleverna (19,0 %) visade ingen ansats till lösning.

Det är troligt, att om eleverna hade förstått begreppet platsvärde och varit förtrogna med den version av den talsortsvisa beräkningsstrategin avsedd för subtraktion, som kräver växling, så hade betydligt fler kommit fram till ett korrekt resultat.

Tabell 6 Kategorier av elevers principiella sätt att utföra subtraktionen, 12,36 – 9,7, årskurs 4, n = 216

Kategorier	Frekvens*	Relativ frekvens (%)	Typiska svar
Principiellt korrekt	4	1,9	2,66
Talsortsvis beräkning utan växling	104	48,1	3,29
Additiva beräkningar	14	6,5	21,43
Andra typer av inkorrekta beräkningar	53	24,5	-
Ingen beräkning utförd	41	19,0	-
Totalt	**216**	**100,0**	

*Ej viktade frekvenser

Den sista testuppgiften (M07_08) inom området subtraktion handlade om när John skulle baka kakor.

M07_08

John ska baka kakor. Han behöver värma ugnen i 10 minuter och sedan grädda kakorna i 12 minuter. John vill vara klar med sitt kakbak kl. 11.00. När bör han senast sätta på ugnen?

Ⓐ 10.38

Ⓑ 10.48

Ⓒ 10.50

Ⓓ 11.22

M031064

För att lösa problemet behöver 10 minuter och 12 minuter adderas och sedan subtraheras från 11.00. Adderandet innebar troligen ingen svårighet. Subtraktionen däremot förutsätter att en timma kan växlas till 60 minuter från vilket 22 minuter sedan skall subtraheras. Problemet kan uppfattas som en "utjämningssituation", där starttidpunkten skall med hjälp av tiden för uppvärmning och kakbak skall "utjämnas" att bli 11.00.

Av de fyra givna alternativen var det korrekta, 10.38, också det mest frekvent valda (56,0 %). Den av flest elever (25,8 %) valda distraktorn var 10.48. Den representerar subtraktionen av 12 minuter från 11.00. De andra två distraktorerna var lågfrekventa.

Den huvudsakliga svårigheten tycks vara enkodningen och subtraktionen från tidpunkten 11.00 med åtföljande växling.

8.1.4 Multiplikation

Multiplikation testas med sex uppgifter. Enkodningsprocessen har en central roll i fem av dessa uppgifter.

Den första testuppgiften (M02_03) handlar om multiplikation av två hela tal.

M02_03

Multiplicera 53 • 26

Svar: _______________

M041278

Uppgiften bedöms inte ingå i grundskolans uppnåendemål för årskurs 5 i matematik. Elevers sätt att lösa uppgiften reflekterar ändå deras kunskaper, vilket gör att deras lösningar är intressanta att analysera. I tabell 7 presenteras elevernas lösningsstrategier. Den talsortsvisa beräkningen har en framträdande plats bland lösningsstrategierna. I kategorin, korrekt i princip, exponerade eleverna att de både behärskade platsvärdesbegreppet och operationen multiplikation.

Tabell 7 Kategorier representerande elevers lösningsstrategier vid beräkning av 53 * 26, årskurs 4, n = 461

Kategorier	Frekvens*	Relativ frekvens (%)	Typiskt svar
Korrekt i princip	20	4,3	1 378
Talsortsvisberäkning	246	53,4	118
Andra lösningsstrategier	79	17,1	-
Ingen ansats till lösning	116	2,2	-
Totalt	**461**	**100,0**	

*Ej viktade frekvenser

I några få fall var emellertid multiplikationen korrekt utförd medan additionen av de partiella produkterna inte var det. Tal i fel positioner adderades, något som illustreras i tabell 8.

Tabell 8 Korrekt multiplikation av de partiella produkterna, addition av de partiella produkterna och förskjutningen av deras positioner

Förskjutningen av tiotalens position multiplicerade med 53	Entalen multiplicerade med 53	Den resulterande summan	Frekvens	Relativ frekvens (%)
106	318	424	3	
1 060	318	*1 378*	20	4,3
10 600	318	10 918	1	
106 000	318	106 318	1	

Den talsortsvisa beräkningen tillämpades av en majoritet av eleverna (53.4 %) som syns i tabell 7. Talen i entals- och tiotalspositionerna multiplicerades separat, tiotal multiplicerades med tiotal och ental med ental. När de partiella produkterna skulle adderas kunde de också förskjutas till inkorrekta positioner,.

Bakom ett sådant sätt att utföra multiplikationen ligger troligen en outvecklad förståelse av platsvärdesbegreppet. Kategorin, andra lösningsstrategier, i tabell 7, omfattade mest additiva och subtraktiva tillämpningar istället för multiplikativa.

Åtta barn skall dela på ett antal godisbitar i nästa testuppgift (M03_01).

M03_01

En grupp om 8 barn äter sammanlagt 74 godisbitar. Hur många fler godisbitar behövs för att barnen ska få lika många var?

Svar: _______________

M031235

Kategorierna av elevernas enkodning av problemet och beräkning presenteras i tabell 9. Ungefär hälften av eleverna (44,6 %) både enkodade problemet och utförde beräkningen korrekt. En sjättedel (16,4 %) enkodade problemet inkorrekt men utförde en korrekt beräkning medan en dryg fjärdedel (25,7 %) inte visade någon ansats att lösa problemet.

Tabell 9 Kategorier av elevernas enkodning och beräkning av "Godisproblemet", M03_01, årskurs 4, n = 451

Kategorier	Frekvens*	Relativ frekvens (%)	Typiska svar
Korrekt enkodning och korrekt beräkning	201	44,6	6 fler
Korrekt enkodning men inkorrekt beräkning	6	1,3	
Inkorrekt enkodning men korrekt beräkning	74	16,4	9 fler
Inkorrekt enkodning och inkorrekt beräkning	1	0,2	-
Icke kategoriserad	50	11,1	-
Ingen ansats till lösning	116	25,7	-
Totalt	**451**	**100,0**	

* Ej viktade frekvenser

Det största hindret för att lösa problemet tycktes vara enkodningen och inte beräkningen. Problemsituationen benämns "lika grupper". Men enligt Fischbein et al. (1985) använder elever ofta enkla intuitiva modeller för enkodningen, exempelvis används upprepad addition som modell för multiplikation. Denna modell kan, om den appliceras på denna uppgift, snarare öka svårighetsgraden än minska den.

I den tredje testuppgiften (M03_03) mätte Karl längden på svarta tavlan.

M03_03

Karl mätte skrivtavlans längd med en 30-centimeterslinjal. Skrivtavlan var 6 cm kortare än 9 gånger linjalens längd. Hur lång är skrivtavlan?

(A) 264 cm

(B) 270 cm

(C) 276 cm

(D) 279 cm

M031050

Fyra multiple-choice alternativ gavs av vilka det korrekta, 264 cm, var det mest frekvent valda (38,6 %). Några av distraktorerna var emellertid också högfrekventa. Den första distraktorn representerar 9 gånger längden av linjalen, 270 cm (27,8 %), den andra, 276 cm, representerar 9 gånger längden av linjalen plus 6 cm, istället för minus 6 cm (16,0 %). Den sista distraktorn, 279 cm, som också var lågfrekvent vald (4,3 %), representerar inte någon tydlig beräkningsmöjlighet. En liten grupp elever (13,3 %) hade inte försökt lösa uppgiften.

Även i detta fall tycks det av frekvensfördelningen att döma, som om enkodningen har vållat störst problem och inte beräkningarna i sig. Problemet representerar en subtraktiv jämförelsesituation, som troligen behandlats otillräckligt i undervisningen (Fuson, 1992).

I denna, den fjärde uppgiften (M05_01), ges fyra alternativ, som representerar de fyra operationerna addition, subtraktion, multiplikation och division.

M05_01

Det finns 9 rader med stolar. Varje rad har 15 stolar. Vilken av dessa beräkningar ger det totala antalet stolar?

Ⓐ 15 / 9

Ⓑ 15 - 9

Ⓒ 15 • 9

Ⓓ 15 + 9

M031303

En stor majoritet av eleverna (82,6 %) valde det korrekta alternativet 15 * 9. Den matematiska modellen av problemet representerar en typisk lika-gruppersituation, vilket också kan förklara den höga lösningsfrekvensen. Begreppsligt sett borde multiplikationen ha skrivits 9 * 15. Även en enkel intuitiv modell av multiplikation, som upprepad addition, skulle duga för att lösa uppgiften. En multiplikation, som 15 * 9, tillhör uppnåendemålen i matematikkursplanen för denna åldersgrupp.

I den femte uppgiften (M05_05) förekommer en jämförelsesituation.

M05_05

En man tog sina 3 barn till en nöjespark. Biljetter för vuxna kostar dubbelt så mycket som för barn. Pappan betalade sammanlagt 50 zed för de 4 biljetterna.

Hur många zed kostade varje barns biljett? Visa din uträkning.

Svar: _______________

M031247

Biljetterna för vuxna kostar dubbelt så mycket som för barn. Om kostnaden för barnen är utgångspunkten, så kostar en vuxenbiljett lika mycket som två barnbiljetter. Den sammanlagda kostnaden för 5 barnbiljetter är 50 zed. Så en barnbiljett kostar 10 zed.

Något mindre än en tredjedel av eleverna (32,3 %) löste uppgiften fullständigt, vilket var bättre än EU/OECD ländernas genomsnitt (15,5 %). Många elever (22,2 %) hade dock svårigheter antingen med att beskriva hur de löste uppgiften eller med själva beräkningen efter en korrekt enkodning. Den trots allt låga lösningsfrekvensen förklaras av att jämförelsesituationer är förhållandevis svåra att enkoda (Fuson, 1992).

Enkodningen av det sista testproblemet (M05_07) resulterade i en modell, som bestod av två olika multiplikationer och en efterföljande addition.

M05_07

Maria har 6 röda askar. Varje röd ask innehåller 4 blyertspennor. Hon har också 3 blåa askar. Varje blå ask innehåller 2 blyertspennor. Hur många blyertspennor har Maria sammanlagt?

Ⓐ 6
Ⓑ 15
Ⓒ 24
Ⓓ 30

M031173

Det första alternativet, 6, representerar additionen av 2 och 4. Det var lågfrekvent valt (9,7 %). Det andra alternativet, 15, som representerade additionen av alla talen i uppgiften, 2 + 3 + 6 + 4, valdes också lågfrekvent (6,3 %). Det tredje alternativet, 24, som erhölls genom att multiplicera 6 och 4, hade en frekvens, som inte avvek från de andra alternativens frekvenser. Det fjärde alternativet, 30, som var det korrekta, uppnåddes genom att först utföra multiplikationerna 6 * 4 och 2 * 3 och sedan genom att addera de partiella produkterna 24 och 6. Något mindre än tre fjärdedelar av eleverna (72,5 %) valde detta alternativ.

Trots att problemsituationen representerade ”lika grupper” och en additiv begreppslig kombination, var lösningsfrekvensen förhållandevis låg.

8.1.5 Division

Före analysen av testuppgifterna avseende division kan den begreppsliga skillnaden mellan innehålls- och fördelningsdivision återigen behöva belysas. I det diskreta fallet representerar innehållsdivision ett antal objekt, som i sin tur innehåller ett annat antal objekt, vilka båda är innehållna i det totala antalet objekt. Fördelningsdivision däremot innebär en fördelning av ett antal objekt på ett begränsat antal objekt, exempelvis personer (Se avsnitt 4.1.4). I den följande analysen kommer begreppen innehålls- och fördelningsdivision att användas.

Den första uppgiften (M01_01) handlar om en konstellation av bilar på en parkeringsplats.

M01_01

På en parkeringsplats stod 762 bilar parkerade i 6 rader med lika många i varje rad. Hur många bilar stod det i varje rad?

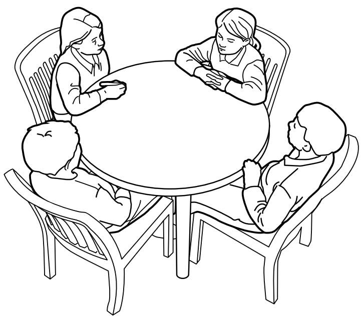
Svar: _______________

M031286

Lösningsfrekvensen på uppgiften var låg (10,1 %). Uppgiften kan lösas med en kort divisionsuppställning och svaret blir då 127 bilar i varje rad. Förklaringen till den låga lösningsfrekvensen står inte primärt att finna i problemets begreppsliga uppbyggnad, eftersom det representerar en fördelningsdivision. Begreppet fördelningsdivision förstås ganska tidigt under skoltiden (Fischbein, et al. 1985). Det stora talet, som representerar antalet bilar, kan för denna ålderskategori leda till en alltför komplex division. Kunskapen, som i övrigt är nödvändig för att lösa uppgiften, ryms inom uppnåendemålen för årskurs 5 i matematikkursplanen.

Det andra problemet (M02_02) fokuserade frågan om hur många bord som behövdes för att 28 personer skulle få plats.

M02_02



Det finns plats för 4 personer vid ett bord.

Hur kan du räkna ut hur många bord som behövs för att 28 personer ska få plats?

Ⓐ Multiplicera 28 med 4.

Ⓑ Dividera 28 med 4.

Ⓒ Subtrahera 4 från 28.

Ⓓ Addera 4 till 28.

M041039

Svarsalternativen omfattade de fyra elementära operationerna multiplikation, division, subtraktion och addition. Distraktorn, som representerade multiplikationen attraherade flest elever (45,8 %) medan det korrekta alternativet, att dividera 28 med 4, valdes av en mindre grupp elever (31,9 %). De två sista alternativen, subtraktion och addition, hade båda ganska låga frekvenser (4,0 %, 12,1 %).

Innehållsdivision var i denna uppgift den begreppsliga utgångspunkten och svarar på frågan hur många grupper av fyra, som är innehållna i 28. Eftersom innehållsdivision vanligtvis behandlas otillräckligt i undervisningen, så är detta troligen den avgörande orsaken till den relativt låga lösningsfrekvensen (Greer, 1992).

Den tredje testuppgiften (M03_06) innehåller endast en beräkningsuppställning.

M03_06

64 / ☐ = ☐

I denna uppställning står ☐ för ett och samma tal. Vilket tal står ☐ för?

Ⓐ 4

Ⓑ 8

Ⓒ 16

Ⓓ 32

M031255

Uppfattningen av likhetstecknet kan ha spelat en avgörande roll vid lösningen av uppgiften. Med en dynamisk uppfattning är uppgiften mer eller mindre omöjlig att lösa. Den statiska uppfattningen krävs (Ginsburg, 1977; Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Kieran, 1981; Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Carpenter, Franke & Levi, 2003).

Alternativen består av multipler av talet fyra. Det korrekta alternativet 8 valdes ungefär lika frekvent (26,6 %) som den sista distraktorn 32 (24,8 %). I EU/OECD – gruppen lyckades mer än dubbelt så många elever (57,0 %) lösa uppgiften. Den första distraktorn 4 var lågfrekvent vald och den tredje distraktorn 16 mer frekvent vald (15,3 %). Till exempel har subtraktionen 64 – ☐ = ☐ lösningen 32. Storleken på de i uppgiften ingående talen är något större än de i nästa uppgift, vilken har en något högre lösningsfrekvens. Knappt en fjärdedel av eleverna (24,7 %) försökte inte lösa uppgiften.

Lars lade pennor i askar (M04_05).

M04_05

Lars hade 32 pennor och 4 askar för pennorna.
Han lade lika många pennor i varje ask.
Vilken av uppställningarna beskriver hur många pennor han lägger i varje ask?

Ⓐ 32 + 4 = ☐

Ⓑ 32 – 4 = ☐

Ⓒ 32 • 4 = ☐

Ⓓ 32 / 4 = ☐

M041281

De fyra givna alternativen representerar på samma sätt som i tidigare uppgift de fyra elementära operationerna, addition, subtraktion, multiplikation och division. Två tredjedelar av eleverna (62,2 %) plockade ut det korrekta alternativet, 32/4 = □. Sammantaget var de olika distraktorerna lågfrekventa (29,7 %).

Lösningsfrekvensen jämfört med en liknande uppgift (M02_02) är högre. Detta har sin förklaring i, att det är fråga om en fördelningsdivision, ett begrepp som eleverna normalt internaliserar tidigt under skoltiden (Fischbein, et al.,1985). Dessutom tillhör de ingående talen ett intervall, som möjligen är mer avpassat för denna åldersgrupp.

Även testuppgiften (M05_02) vilken handlar om delning av ett rep hade en relativt hög lösningsfrekvens (62,0 %).

M05_02

Ett rep som är 204 cm långt klipps i 4 lika långa delar. Hur lång är varje del?

Svar: _______________ cm

M031309

En tredjedel (29,7 %) av eleverna löste dock inte problemet. Talen i uppgiften var särskilt avpassade för att underlätta beräkningen med en kort divisionsuppställning. Begreppsligt är detta en fördelningsdivision, vilket tillsammans med de anpassade talen ändå kan ha bidragit till den något förbättrade lösningsfrekvensen.

Det sista testproblemet (M07_05) uppvisade inte en lika hög lösningsfrekvens (31,8 %), som de båda föregående problemen. Stina skulle placera lådor på en hylla.

M07_05

En hylla är 240 cm lång. Stina håller på att ställa lådor på hyllan. Varje låda tar upp 20 cm. Vilken av dessa beräkningar visar hur många lådor Stina får plats med på hyllan? Antalet lådor visas som △.

(A) 240 − 20 = △

(B) 240 / 20 = △

(C) 240 + 20 = △

(D) 240 • 20 = △

M031254

Ånyo representerar de fyra svarsalternativen de elementära operationerna subtraktion, division, addition och multiplikation. Den mest attraktiva distraktorn, 240 – 20 = △, valdes av en knapp tredjedel av eleverna (29,4 %) och de andra två distraktorerna tillsammans av drygt en fjärdedel (26,4 %). En mindre grupp elever (12,4 %) hade ej svarat.

Då ingen beräkning krävdes i denna uppgift, var det inte beräkningen, som hindrade eleverna att lösa uppgiften. Ett förhållande, som kan förklara den låga lösningsfrekvensen, är dock att problemsituationen representerar en innehållsdivision: hur många gånger innehålls 20 cm i 240 cm.

8.1.6 Tal i bråkform

Enkla beräkningar med tal i bråkform omfattas av uppnåendemålen i matematikkursplanen för denna åldersgrupp. Med termen ”enkla bråk” avses elementära operationer av bråk med samma nämnare.

Den första uppgiften (M04_03) handlar om ekvivalenta bråk. Fyra bråk gavs som “multiple-choice” alternativ.

M04_03

Vilket av bråken är lika med $\frac{2}{3}$?

Ⓐ $\frac{3}{4}$

Ⓑ $\frac{4}{9}$

Ⓒ $\frac{4}{6}$

Ⓓ $\frac{3}{2}$

M041069

Det mest populära alternativet (64,4 %) var 3/2, vilket representerade det inversa talet till det efterfrågade bråket. Det korrekta alternativt, 4/6, attraherade bara ett fåtal elever (10,3 %), något som de två andra alternativen också gjorde. Ekvivalenta bråk är en del av uppnåendemålen för årskurs 5 men tycks trots detta inte alltid ha berörts i undervisningen av resultatet på uppgiften att döma. Även för elever i EU/OECD länderna var den genomsnittliga lösningsfrekvensen inte särskilt hög (20,6 %).

I den andra av dessa uppgifter (M04_04) skulle enkodningen resultera i en addition av två liknämniga bråk.

M04_04

Jonas använde $\frac{3}{10}$ av sina pengar på en penna och $\frac{5}{10}$ av dem på en bok.

Hur stor andel av pengarna använde han?

Svar: _______________

M041076

Lösningsfrekvensen (18,8 %) var låg. Trots det faktum att enkla bråk är en del av uppnåendemålen i kursplanen, så har troligen en majoritet av lärarna inte tagit upp dem i undervisningen. I enkodningen spelar begreppet andel en central roll.

Andelsbegreppet är relativt okänt. Om undervisningen har haft en procedurell inriktning, så har detta begrepp nog inte heller behandlats. I de jämförbara EU/OECD länderna var den genomsnittliga lösningsfrekvensen något högre (38,5 %).

Den tredje testuppgiften (M05_03) berörde också ekvivalenta bråk.

M05_03

12 / 3 = ☐ / 2

Vilket tal ska stå i rutan ☐ ?

Ⓐ 2
Ⓑ 4
Ⓒ 6
Ⓓ 8

M031245

Det korrekta alternativet 8, fastnade något mindre än en femtedel av eleverna för (18,8 %) och den mest attraktiva distraktorn 4 knappt hälften för (45,3 %). Orsaken till det högfrekventa valet av distraktorn kan spåras till hur likhetstecknet förstås. Den dynamiska uppfattningen av likhetstecknet betyder, att resultatet av beräkningen på vänster sida skall skrivas på den högra sidan. Resultatet av beräkningen 12/3 = 4, det vill säga 12/3 ses som en division och inte som ett bråk. Den statiska uppfattningen av likhetstecknet å andra sidan betyder att båda sidor skall representera samma totala värde. Eftersom beräkningen av vänster led resulterat i fyra, så skall också beräkningen av höger led resultera i fyra. Av detta framgår att det är åtta som skall divideras med två för att värdena på båda sidor skall vara lika stora. Båda sidor skulle emellertid också kunna ses som ekvivalenta bråk 12/3 = 8/2. Det är viktigt att notera, att begreppslig sett är det två helt olika företeelser, även om division och bråk har samma beteckning i Sverige. I Övriga EU/OECD länder var den genomsnittliga lösningsfrekvensen ungefär lika hög (21,4 %).

Den sista uppgiften (M07_01) är en subtraktion av två liknämniga bråk.

M07_01

$\frac{4}{5} - \frac{1}{5} =$

Ⓐ $\frac{3}{5}$
Ⓑ $\frac{3}{10}$
Ⓒ $\frac{3}{25}$
Ⓓ 3

Bland de givna alternativen finns först det korrekta 3/5, vilket valts av mer än en tredjedel av elevgruppen (37,1 %) och sedan det mindre frekventa alternativet 3, vilket attraherade närmre en fjärdedel av eleverna (23,7 %). De andra två alternativen var lågfrekventa (18,4 %) och stod tillsammans för ungefär en femtedel. Ungefär lika många (20,8 %) hade inte svarat.

Ett vanligt misstag vid addition och subtraktion av bråk är, att även nämnarna adderas eller subtraheras. I detta fall subtraheras 5 – 5, vilket blir noll eller som eleverna kan uppfatta det, ingenting. Därför är den mest frekventa distraktorn, 3, troligen ett resultat av

$$\frac{4-1}{5-5}=\frac{3}{0}=\frac{3}{\text{ingenting}}=3.$$

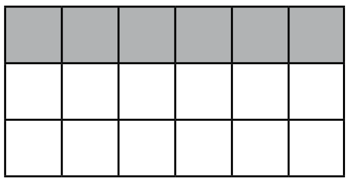
Detta representerar en missförståelse av beräkningen. Ett annat skäl till misstaget kan vara, att subtraktion av bråk inte har berörts på ett tillräckligt omfattande sätt i undervisningen. I andra EU/OECD-länder var den genomsnittliga lösningsfrekvensen högre (51,2 %).

8.1.7 Proportionalitet

De två principiellt olika betydelser, som proportionalitetsbegreppet kan ha, nämligen som andel och som motsvarighet, blandas lätt ihop av eleverna. I den första uppgiften (M02_04) fokuseras andelsbegreppet. Men ett av de valbara svarsalternativen representerar en lösning, där motsvarighetsbegreppet är utgångspunkten.

M02_04

Hur stor del av rektangeln är skuggad?



Ⓐ $\frac{1}{4}$

Ⓑ $\frac{1}{3}$

Ⓒ $\frac{6}{12}$

Ⓓ $\frac{2}{3}$

M041006

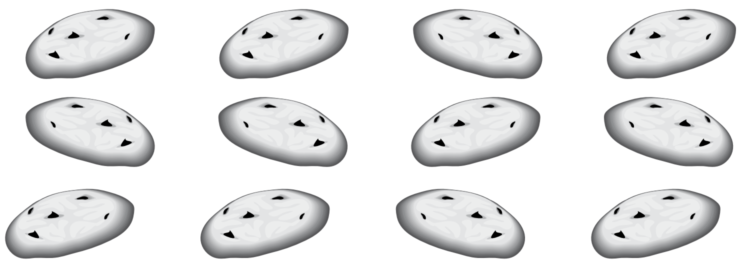
Bland de givna alternativen finns det korrekta 1/3, vilket valdes av något mindre än två tredjedelar av eleverna (61,2 %). Den mest frekventa distraktorn 6/12 valdes av knappt en tredjedel (30,0 %). Detta alternativ kan tyckas förrädiskt, då det uttrycker ett förhållande eller en motsvarighet mellan de 6 och de 12 rutorna, vilka bådadera är markerade i figuren. Härigenom får denna distraktor en begreppslig innebörd. De två andra distraktorerna har ingen uppenbar begreppslig innebörd och angavs lågfrekvent (3,0 %, 5,8 %) som svarsalternativ.

Andelsbegreppet däremot handlar om en del i relation till helheten. I uppgiften består delen av de 6 skuggade kvadraterna och helheten av samtliga kvadrater, totalt 18. Om man bortser från den vertikala indelningen och betraktar den horisontala, så utgörs delen av en rektangel och helheten av 3 rektanglar. Detta ger resultatet, 1/3.

Svårigheten med uppgiften tycks ha varit, att begreppen andel och motsvarighet har blandats ihop.

Den andra testuppgiften (M04_02) liknar den, som analyserats ovan. I stället för kvadrater är det tolv kakor, som skall är utgångspunkten.

M04_02



M041056

Det finns 12 kakor. Ringa in $\frac{1}{3}$ av kakorna.

Kakorna är förrädiskt grupperade i fyra kolumner och i tre rader. Eleverna uppmanas att ringa in 1/3 av kakorna. Något mindre än hälften av eleverna (46,5 %) lyckades lösa uppgiften och ringade in fyra kakor. Det mest frekventa misstaget (29,3 %) var, att tre kakor ringades in. Detta representerar förhållandet eller motsvarigheten mellan antalet kakor i en kolumn och det sammanlagda antalet kakor i de tre andra kolumnerna.

I de båda testuppgifterna tycks det mest frekventa misstaget vara en hopblandning av begreppen andel och motsvarighet (Bentley, 2008a).

Uppgiften (M01_05) involverar en proportionell temperaturökning.

M01_05

M031335

Temperaturen en morgon kl. 07.00 var 12 grader. Den ökade med 2 grader varje timme tills den blev 20 grader kl. 11.00. Vad var temperaturen kl. 09.00?

- (A) 14 grader
- (B) 15 grader
- (C) 16 grader
- (D) 17 grader

Det mest frekvent (69,7 %) valda alternativet 16 grader kunde fås genom att konstatera, att det är två timmar från kl. 07.00 till kl. 09.00. Om temperaturen stiger två grader varje timma, så har den stigit fyra grader till kl. 09.00. Då 12 grader var utgångspunkten, skall 12 grader adderas med 4 grader. Temperaturen är alltså 16 grader kl. 09.00.

Det första alternativet 14 grader valdes av en liten grupp elever (14,8 %) och tycks representera en additiv ökning. Detta innebär, att två grader (per timma) adderas till ursprungstemperaturen 12 grader, vilket ger 14 grader.

M03_02 Kommande uppgift (M03_02) handlar om två pojkar, som var ute och sprang.

Två pojkar var ute och sprang. För varje sträcka på 2 km som Fredrik sprang, sprang Allan en sträcka på 3 km. Fredrik sprang 6 km. Hur långt sprang Allan?

Svar: _______________ km

M031285

I tabell 10 visas kategorierna av elevernas lösningsstrategier. Mer än hälften av eleverna (55,3 %) utförde en korrekt enkodning av problemet.

Tabell 10 Kategorier av elevernas lösningsstrategier, M03_02, klass 4, n = 452

Kategorier	Frekvens	Relativ frekvens (%)	Typiskt svar
Korrekt enkodning och korrekt beräkning	205	55,3	9
Korrekt enkodning men inkorrekt beräkning	16	3,5	6
Inkorrekt enkodning men korrekt beräkning inkluderande additiv ansats	105	23,2	7
Inkorrekt enkodning och inkorrekt beräkning	59	13,1	-
Ingen lösningsansats	67	14,8	-
Totalt	**452**	**100,0**	

* Ej viktade frekvenser

En korrekt enkodning innebär först och främst att den begreppsliga situationen identifieras. I uppgiftens andra mening uttrycks en motsvarighet: ”För varje sträcka på 2 km, som Fredrik sprang, sprang Allan en sträcka på 3 km”. Detta representerar en multiplikativ jämförelse och kan uttryckas så, att Allan sprang 1,5 gånger så långt som Fredrik eftersom 2 * 1,5 = 3. Om Fredrik totalt sprang 6 km, så sprang alltså Allan 1,5 * 6 km = 9 km.

Det mest frekventa misstaget (12.4 %) var, att motsvarigheten uppfattades som en additiv jämförelse istället för en multiplikativ. Eftersom Fredrik först sprang 2 km och sedan 4 km så är den additiva ökningen 4 km. Detta adderas till sträckan som Allan sprang, 3 km, vilket ger det typiska svaret 7 km.

Några få elever (8.2 %) kopierade texten och svarade, att Allan sprang 3 km. Trots att problemsituationen innehåller en multiplikativ jämförelse och en motsvarighet är det förvånande, att så många elever löst uppgiften.

8.1.8 Sammanfattning och slutsatser

Sålunda, lösningsfrekvensen vid testningen av elevernas uppfattningar av talbegreppet visade att en fjärdedel av eleverna borde utveckla sin taluppfattning ytterligare. Reversering av siffrorna i ett tal exponerades av eleverna, ett förhållande tidigare känt från forskningen.

Den huvudsakliga svårigheten rörande addition tycks inte vara operationen som sådan utan enkodningen av problemsituationen som representerade en jämförelse.

I subtraktionsproblemen var svårigheterna enkodningen då problemsituationen också representerade en jämförelse. Hanterandet av växlingen i beräkningarna, som krävdes i nästan hälften av uppgifterna, var en annan svårighet. Strategin för talsortsvis beräkning avpassade för subtraktioner utan växling användes frekvent felaktigt vid beräkningar av subtraktioner som krävde växling.

Vid testningen av multiplikation visade det sig att en av de största svårigheterna var enkodningen av problemen trots att några av situationerna representerade en lika-grupper situation.

Även operationen som sådan visades sig vara en svårighet. I algoritmen dominerade den sammanlänkade strukturen, som resulterade i att tiotal och ental multiplicerades var för sig. Misstagen vid beräkningarna var vanliga, vilket implicerar att talfakta (retrieved number facts) avseende multiplikation inte frekvent hade uppnåtts bland eleverna.

De två begreppsligt skilda typerna av division, fördelnings- och innehållsdivision tycks ha orsakat en stor svårighet för eleverna. I testuppgifter, vilka måste enkodas med innehållsdivision, var lösningsfrekvensen låg, medan om enkodningen resulterade i fördelningsdivision, var frekvensen högre. Även de talområden som testades påverkade lösningsfrekvenserna, vilka emellertid inte nådde över 70 %.

Utifrån resultatet att döma så har tal i bråkform, som ingår som en del i uppnåendemålen för årskurs 5 i kursplanen, trots detta ännu inte tagits upp i undervisningen i tillräckligt många klasser. En mindre grupp elever löste uppgifterna.

Vid testningen av begreppet proportionalitet blandade eleverna ihop de båda subbegreppen andel och motsvarighet. Andelen utgör del av det hela medan vid motsvarighet relateras två delar till varandra. Ibland förväxlades även en multiplikativ ökning med en additiv.

Förutom de speciella svårigheter, som var förknippade med var och en av beräkningarna, så tycktes enkodningen av problemen spela en avgörande roll. Dessutom tycks det finnas en grupp elever, som aldrig lyckas lösa någon uppgift.

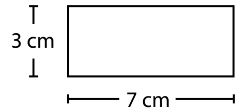
8.2 Geometri

Begreppen omkrets och area förväxlas ofta av elever. Detta förhållande kommer att belysas i det första avsnittet, som behandlar en testuppgift, som rör begreppet omkrets. I det andra avsnittet analyseras elevsvar och lösningar på några problem, som rör areabegreppet. Geometriska former har stor betydelse för barns klassificering av begreppsegenskaper och därför behandlas flera uppgifter, som rör trianglar och rektanglar i de två följande avsnitten. Utvecklingen av elevers spatiala förmåga är avgörande för förståelsen av tvådimensionella representationer av tredimensionella objekt, vilket beskrivs i det femte avsnittet. Grundläggande avbildningar, som vridning och förflyttning samt symmetribegreppet, gås igenom i motsvarande avsnitt. I det näst sista avsnittet, före sammanfattning och slutsatser, studeras lösningarna av en mätningsuppgift, som handlar om uppskattning.

8.2.1 Begreppet omkrets

I denna testuppgift (M02_07) skall omkretsen av rektangeln beräknas. Kontexten är procedurellt inriktad, då måttsättningen medger en mer eller mindre direkt tillämpning av principen för att beräkna omkretsen. Svarsalternativen innehåller dels det korrekta svaret 20 cm och dels mätetalet för arean 21 men med inkorrekt enhet.

M02_07



Vilken omkrets har rektangeln?

Ⓐ 7 cm

Ⓑ 10 cm

Ⓒ 20 cm

Ⓓ 21 cm

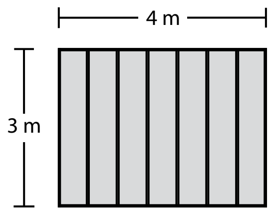
M041330

Tre fjärdedelar av eleverna (73,5 %) valde det korrekta alternativt 20 cm, medan distraktorn, som representerade areans mätetal, var lågfrekvent vald (3,3 %). Den vanligaste distraktorn, som representerar en addition av längden och bredden, var 10 cm (14,2 %). Detta alternativ har Clements och Stephan (2003) tidigare beskrivit som ett prematurt sätt att beskriva en figurs storlek med hjälp av ett linjärt mått.

8.2.2 Areabegreppet

I detta testproblem (M04_08) skall Patrik måla ett plank.

M04_08



Patrik målar en sida av ett plank. Planket är 4 meter långt och 3 meter högt. Hur stor area måste Patrik måla?

Ⓐ 4 kvadratmeter

Ⓑ 7 kvadratmeter

Ⓒ 12 kvadratmeter

Ⓓ 14 kvadratmeter

M041152

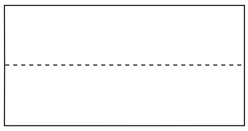
I alternativen finns dels mätetalet för omkretsen, 14, dels det korrekta svaret för arean, 12 kvadratmeter, medan det mest frekventa (43,3 %) alternativet, 7, representerar mätetalet för halva omkretsen, det vill säga summan av de båda angivna sidorna. Som tidigare nämnts kan yngre elever använda linjära mått på storleken av en rektangel, som till exempel summan av längden och bredden (Clements & Stephan, 2003). Detta alternativs höga frekvens kan vara en spegling av undervisningens brist på tillräcklig problematisering av linjära mått på tvådimensionella egenskaper.

Det korrekta alternativet valdes av lite drygt en femtedel av eleverna (20,6 %) och ungefär lika stor andel valde mätetalet för omkretsen (18,6 %). Den första distraktorn 4 kvadratmeter var lågfrekvent (8,5 %).

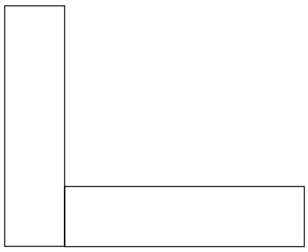
Testuppgiften nedan (M05_06) belyser areabegreppets additiva egenskaper och konservering. Jill delade upp en rektangel mitt itu längs de båda längre sidorna.

M05_06

Jill hade ett rektangulärt papper.



Hon klippte pappret längs den streckade linjen och gjorde en **L**-form, så här.



Vilket av dessa påståenden är sant?

Ⓐ **L**-formens area är större än rektangelns yta.

Ⓑ **L**-formens area är lika stor som rektangelns yta.

Ⓒ **L**-formens area är mindre än rektangelns yta.

Ⓓ Det går inte att räkna ut vilken area som är störst utan att mäta.

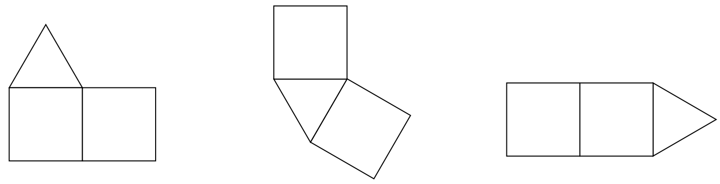
M031219

Alternativen består, som framgår av uppgiften, av påståenden om den nya sammansatta figurens area. Något mindre än tvåfemtedelar av eleverna (39,7 %) valde det korrekta alternativet, att L-formens area är lika stor som rektangelns area. Den mest frekventa distraktorn (24,0 %) var påståendet, att L-formens area är större än rektangelns area. Även den sista distraktorn valdes frekvent av eleverna (20,9 %).

Av resultatet att döma har en majoritet av eleverna inte sådana erfarenheter av areabegreppet från undervisningen, att de kan avgöra om arean förändras, då figuren delas upp och sätts ihop på ett annat sätt. Detta förhållande är känt som areabegreppets konservation (Kordaki & Potari, 1997; Piaget, Inhelder & Sheminska, 1981).

I följande uppgift (M07_06) testas också areabegreppets konservation. Utgångspunkten i detta fall är däremot att tre *åtskilda* figurer sätts samman på tre olika sätt.

M07_06



Rosa, Nina och Lisa turas om med att ordna 3 brickor. Var och en ordnar dem i olika former, så som visas. Vilket av följande påståenden om formernas areor är sant?

Ⓐ Rosas form har större area än de andras.

Ⓑ Ninas form har större area än de andras.

Ⓒ Lisas form har större area än de andras.

Ⓓ Alla formerna har samma area.

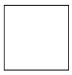
M031038

De fyra alternativen består av påståenden, om de tre olika formernas areor, vilka fås genom olika sammansättningar av de tre brickorna. Uppgiften löstes av något mindre än tre fjärdedelar av eleverna (71,5 %), som ansåg att alla formerna har samma area. Den vanligast valda distraktorn (13,3 %) var, att Ninas form har större area än de andras. Då utgångspunkten var tre åtskilda figurer, som skulle sättas ihop på olika sätt, kunde alltså en majoritet av eleverna avgöra huruvida de olika sammansatta figurernas areor är lika stora.

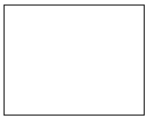
Areabegreppets egenskaper kommer också till uttryck i nästa testproblem (M07_09).

M07_09

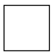
Krister har många brickor som ser ut så här:



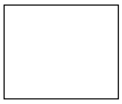
Julius har många brickor som ser ut så här:



Peter har många brickor som ser ut så här:



Björn har många brickor som ser ut så här:



Vem skulle behöva det minsta antalet brickor för att täcka golvet i ett klassrum med sina brickor?

Ⓐ Krister

Ⓑ Julius

Ⓒ Peter

Ⓓ Björn

M031006

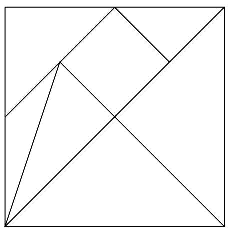
I den här uppgiften testas den grundläggande principen om hur area mäts genom övertäckning. Det korrekta alternativet, Julius brickor, valdes av något mindre än fyra femtedelar av eleverna (78,5 %). Den vanligaste distraktorn (9,7 %) var Peters bricka, som hade minst area och därmed behövdes flest av för att täcka golvet. Enkodningen av problemet kan här ha spelat en avgörande roll.

8.2.3 Begreppet triangel

Begreppet triangel tas upp i de fem nästkommande uppgifterna. I den första (M01_09) efterfrågas de trianglar, som har samma form och storlek.

M01_09

Kvadraten är klippt i 7 bitar. Sätt ett X i de 2 trianglar som har samma storlek och form.



M031271

En av de två trianglar, som har samma form och storlek, utgör en fjärdedel av hela kvadratens area. De är dessutom rätvinkliga. En mycket stor majoritet av eleverna (86,3 %) hade löst uppgiften. Så klassificeringar av figurers egenskaper efter form och storlek tycks i princip inte vålla några problem.

Den kommande uppgiften (M02_08) består av de fyra deluppgifterna A, B, C och D. Uppgifterna har en kreativ karaktär och några begreppsliga benämningar behöver inte användas för att lösa uppgiften.

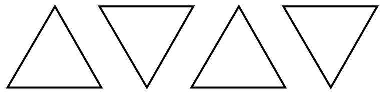
M02_08

Geometriska brickor
Anvisningar:

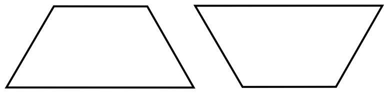
För denna uppgift har du fått en pappskiva med 6 brickor som dem som visas här nedanför. Ta pappskivan och tryck ut de 6 brickorna.

Räck upp handen om du inte har pappskivan.

4 triangelbrickor

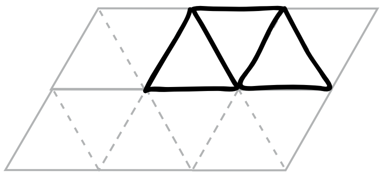


2 parallelltrapetsbrickor



Brickorna kan användas för att göra nya figurer. Ett problem är redan löst åt dig.

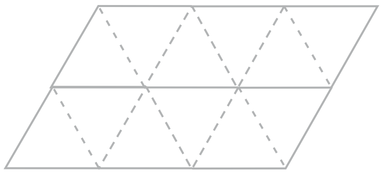
ANVÄND: 3 triangelbrickor
GÖR: En parallelltrapets
VISA: Rita in den i nätet.



Pröva nu följande problem.

A.

ANVÄND: 1 triangelbricka och
1 parallelltrapetsbricka
GÖR: En 4-sidig figur
VISA: Rita in den i nätet.



M041300_1

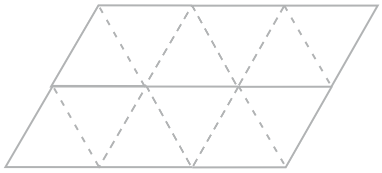
Uppgift A: Av benämningen ”en 4-sidig figur” framgår åtminstone att figuren har 4 sidor. Lösningsfrekvensen är relativt hög, något mindre än tre femtedelar av eleverna (59,6 %) kunde konstruera en 4-sidig figur med hjälp av brickorna.

Uppgift B: Även i denna deluppgift krävs endast, att den figur man skall konstruera skall ha 6 sidor. Något mindre än tre femtedelar av eleverna (59,3 %) löste uppgiften korrekt.

M02_08

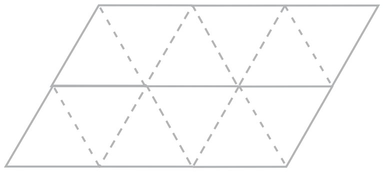
B.

ANVÄND: 2 parallelltrapetsbrickor
GÖR: En 6-sidig figur
VISA: Rita in den i nätet.



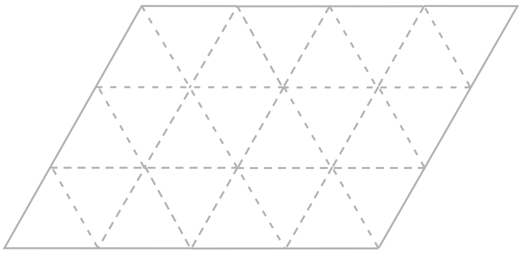
C.

ANVÄND: 2 parallelltrapetsbrickor
GÖR: En 6-sidig figur som inte har samma form, som den du gjorde i B.
VISA: Rita in den i nätet.



D.

ANVÄND: 2 triangelbrickor och 1 parallelltrapetsbricka
GÖR: En 7-sidig figur
VISA: Rita in den i nätet.



M041300_2

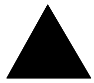
Uppgift C: Här uppmanas eleverna att konstruera en 6-sidig figur, som inte har samma form som den i deluppgift B. Detta var något svårare och något mer än två femtedelar av eleverna (43,9 %) lyckades med detta.

Uppgift D: Att konstruera en 7-sidig figur visade sig också svårt. Något mindre än hälften (48,2 %) av eleverna klarade detta.

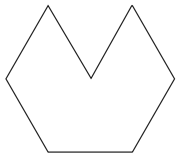
Dessa uppgifter testar framför allt den kreativa förmåga, som krävs för att sätta ihop olika geometriska figurer till nya konstellationer. En förutsättning är emellertid att eleverna vet vad en 4-sidig, en 6-sidig och en 7-sidig figur är. Uppgifterna är även lämpade för att träna ytors sammansatta karaktär och därmed areabegreppets additiva karaktär, något som kan underlätta lösningsprocessen i exempelvis nästa uppgift.

Också denna uppgift (M03_07) belyser, förutom trianglar, areabegreppets additiva karaktär och mätandets princip.

M03_07



Hur många trekantiga brickor som den här ovanför behövs för att täcka figurens yta?



Svar:_______________

M031041

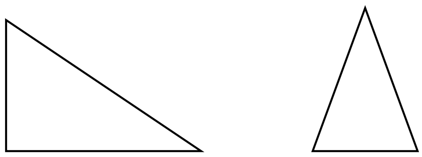
Något mer än två femtedelar av eleverna (43,7 %) löste problemet och kom fram till att det behövdes 5 trekantiga brickor. Det avgörande för att komma fram till lösningen är troligen att kunna dela in den nedersta figuren på avsett sätt. Förutom detta krävs, att eleverna behärskar mätandets princip, vilken bygger på innehållsdivision. En förutsättning för ett lyckat resultat på uppgiften är troligen analytiska erfarenheter från liknande situationer som beskrevs i den japanska lektionen från TIMSS videostudie (Stigler & Hiebert, 1999).

I denna uppgift (M04_09) återkommer klassificeringar av figurers egenskaper.

M04_09

Två figurer visas här nedanför. Beskriv något som är gemensamt och något som skiljer dem åt.

Figur P Figur Q



A. Gemensamt

B. Skiljer

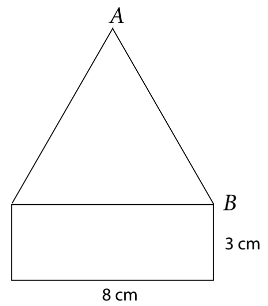
M041258

A. Gemensamt: En ganska stor grupp elever (65,8 %) kunde formulera en egenskap, som är gemensam för de båda trianglarna som till exempel, att båda figurerna har tre hörn eller tre sidor.

B. Skiljer: En mindre andel elever (43,2 %) kunde beskriva någon egenskap, som skiljer figurerna åt. Till exempel skrev några elever, att den vänstra triangeln har en rät vinkel, vilket den andra inte har. Klassificeringar av egenskaper och jämförelser kan förbättras, om eleverna har fått detta problematiserat tillsammans med läraren. Självständigt elevarbete är därför inte den bästa formen för att utveckla denna förmåga (se avsnitt 12.4).

Trianglars egenskaper är också aktuella i uppgiften (M05_08) nedan.

M05_08



Figuren är gjord av en rektangel och en triangel. Triangeln har tre lika långa sidor. Hur lång är sidan *AB* ?

Ⓐ 8 centimeter

Ⓑ 9 centimeter

Ⓒ 10 centimeter

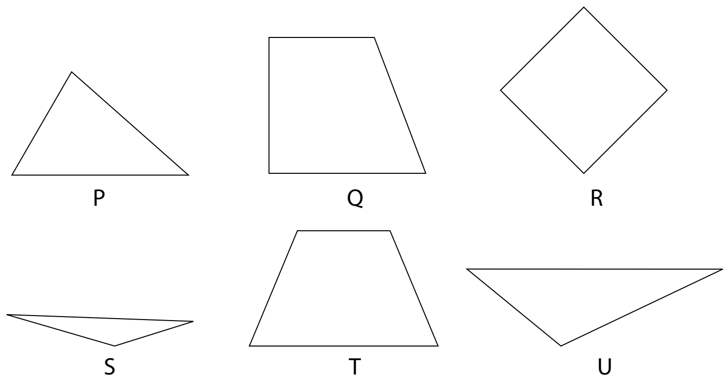
Ⓓ 11 centimeter

M031085

Det korrekta alternativet, 8 cm, kunde ungefär två tredjedelar av eleverna (63,5 %) lista ut. Genom att konstatera att rektangelns två parallella sidor är lika långa, kan slutsatsen dras, att om den ena sidan är 8 cm, så är den andra också 8 cm. Därmed är triangelns bas också 8 cm, eftersom triangeln står på rektangelns långsida. Då triangelns tre sidor är lika långa, är sidan AB också 8 cm. Att kortsidan på rektangeln är 3 cm är en för lösningen onödig uppgift. En av distraktorerna, 11 cm, kan fås genom en addition av 3 cm och 8 cm (10,3 %). Den mest frekventa distraktorn (12,8 %) var emellertid 9 cm, vilken är omöjlig att få fram genom en enkel aritmetisk operation.

I nästa uppgift (M07_10) skall eleverna bestämma vilka figurer, som är trianglar.

M07_10



Skriv bokstäverna för de former som är trianglar.

Svar: ______________________________

M031330

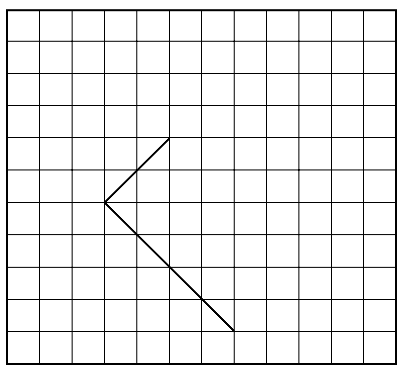
De flesta elever (86,1 %) klarade denna uppgift och fick fram det korrekta svaret P, S och U. Eftersom trianglar alltid har tre hörn, så är de lätta att skilja från andra figurer, speciellt om alla de andra har fyra hörn. Så den höga lösningsfrekvensen är knappast förvånande.

8.2.4 Begreppet rektangel

Begreppet rektangel har ju delvis testats tidigare. I nedanstående uppgift (M04_07) testas detta speciellt.

M04_07

Här är två sidor i en rektangel. Rita dit de andra två sidorna.



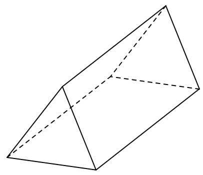
M041146

Två vinkelräta sidor i en rektangel är givna. Eleverna skall konstruera de två andra sidorna. Till hjälp finns ett rutnät. Ungefär två tredjedelar av eleverna (66,2 %) löste problemet. Det vanligaste felet var en slarvig konstruktion.

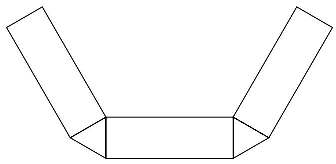
8.2.5 Tvådimensionella representationer av tredimensionella objekt

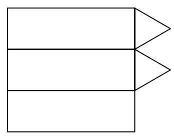
Att kunna tolka en tvådimensionell representation av ett tredimensionellt objekt kräver en utvecklad spatial förmåga. Detta testas i uppgiften (M07_11) nedan.

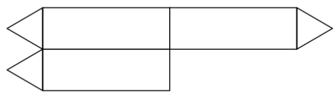
M07_11

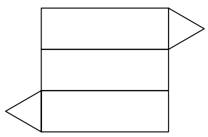


Vilken av dessa skulle kunna vikas ihop till en form som 3-D figuren här ovanför?

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

M031351

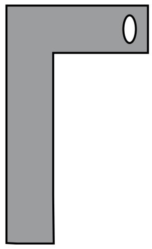
Det korrekta alternativet d) valdes av knappt hälften av eleverna (49,0 %). Alternativ a) var den vanligaste distraktorn (22,3 %), medan de övriga två inte var lika vanliga.

Spatial förmåga måste tränas speciellt för att utvecklas. Internationellt finns försök med datoranimering, vilken lett till lyckade resultat (Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1988). Trots träning av spatial förmåga visade det sig, att även begåvade elever kunde ha svårt att föreställa sig tvådimensionella representationer av tredimensionella objekt (Ryu, Chong & Song, 2007).

8.2.6 Vridningar, speglingar och symmetri

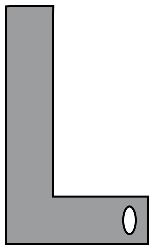
De avbildningar som avses här är vridning samt spegling i linje. Vridning behandlas i den första uppgiften (M02_09).

M02_09

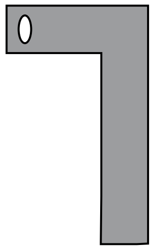


Om figuren här ovanför vrids 90° medurs, vilket av alternativen blir då resultatet?

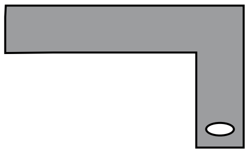
Ⓐ



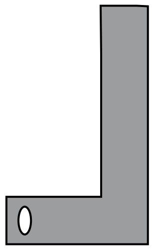
Ⓑ



Ⓒ



Ⓓ



M041173

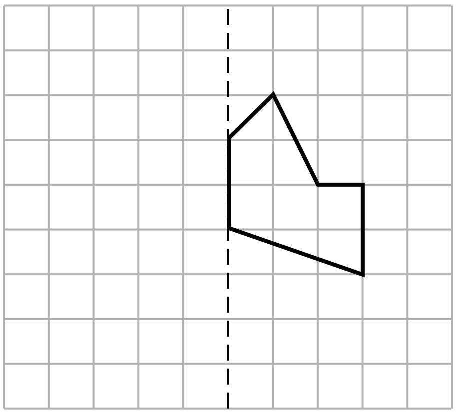
Vridningar är mer centrala i kursplanen än speglingar, eftersom vridningar ingår i den vanligaste modellen för vinkelbegreppet. Trots detta löste endast något mer än en fjärdedel av eleverna (27,4 %) uppgiften korrekt, alternativ c). Ungefär en femtedel (21,9 %) fastnade för den mest frekventa distraktorn d), vilken utgör en vridning av figuren 180° medurs. Den andra distraktorn, som var frekvent (20,1 %), var alternativ b), vilken kan fås via en spegling av figuren i en lodrät linje. Ungefär en fjärdedel av eleverna (24, 8 %) gjorde ingen ansats till att lösa uppgiften.

I vinkelbegreppets vanligaste modell ingår vridning. Eftersom vinkelbegreppet enligt internationell forskning kan vara svårt att förstå, skjuts det ofta fram till senare årskurser (Foxman & Ruddock, 1983; Mitchelmore & White, 1998). Detta är ett förhållande som kan förklara den låga lösningsfrekvensen.

I den kommande uppgiften (M03_09) testas elevernas kunskaper om spegling i linje.

M03_09

Spegla figuren i den streckade linjen i rutnätet. Rita in speglingen.



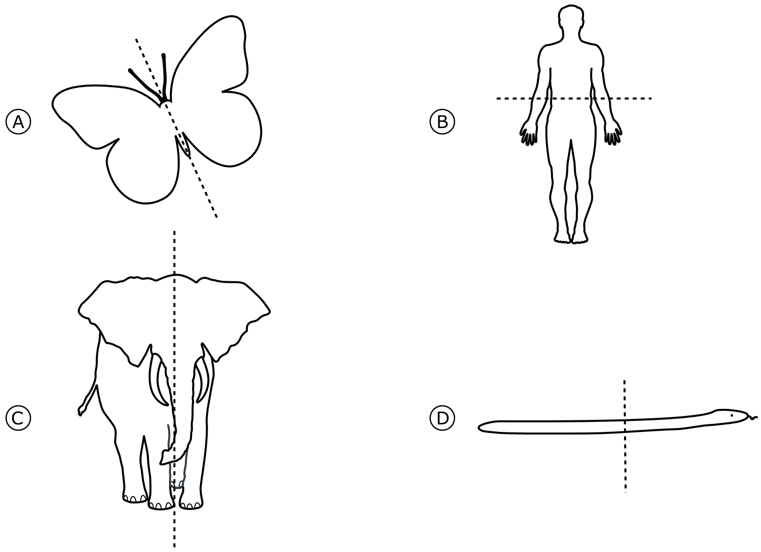
M031274

Inte fullt tre femtedelar av eleverna (57,5 %) löste uppgiften korrekt. Detta kan bero på, att många lärare låter eleverna vika papper med bläck på ena halvan av en sida och får på så sätt en spegelbild på andra sidan. Sådana erfarenheter kan ha underlättat elevernas möjligheter att komma fram till rätt lösning.

Övningar, som förbättrat lösningsmöjligheterna i förra uppgiften, kan ha haft samma funktion i denna uppgift (M04_06).

M04_06

I vilken av de här teckningarna är den streckade linjen en symmetrilinje?



M041164

Något under hälften av eleverna (49,5 %) valde a), fjärilen, som rätt alternativ. De övriga alternativen fick grovt räknat var och en samma lösningsfrekvens (ca 10 %). Alternativ c) kan vara lite förrädiskt, då den tvådimensionella projektionen av djuret avses i uppgiften och inte djurets tredimensionella representation, i vilken den streckade linjen skulle kunna uppfattas som om den visar djurets bilateralsymmetri.

8.2.7 Mätningar

Avsnittet mätningar representeras av en uppskattning av ett träds höjd (M04_10).

M04_10

Mannen på bilden är 2 meter lång. Uppskatta hur högt trädet är.

(A) 4 meter
(B) 6 meter
(C) 8 meter
(D) 10 meter

M041131

Endast något mindre än två femtedelar av eleverna (38,6 %) valde det korrekta alternativet 8 meter. Den vanligaste distraktorn (34,7 %) var 6 meter. Mannen var två meter och uppskattningen av trädets höjd kunde göras genom att bestämma, hur många gånger längre trädet var än mannen. Problemsituationen representerar alltså en multiplikativ jämförelsesituation, i vilken mätandets idé och innehållsdivision är centrala. Detta gör uppgiften mer komplicerad. Trädet är fyra gånger längre än mannen. Och fyra gånger två blir åtta. Den relativt svåra enkodningen av den multiplikativa problemsituationen kan alltså förklara den låga lösningsfrekvensen (Fischbein et al. 1985; Greer, 1992).

8.2.8 Sammanfattning och slutsatser

En stor grupp elever visade sig behärska den procedurellt inriktade beräkningen av omkretsen av en rektangel, som togs upp i den första uppgiften.

Areabegreppet var möjligt att på olika sätt förväxla med omkretsbegreppet. I en uppgift utnyttjade en stor grupp elever halva omkretsen som ett storleksmått på ytan. I en annan uppgift valde en andel elever den korrekta beräkningen för arean och en lika stor andel mätetalet för omkretsen som mått på arean.

Den additiva karaktären av areabegreppet samt dess konservering testades i flera uppgifter. Om en figur delades upp och sattes ihop igen men på ett annat sätt, så insåg endast en mindre grupp elever, att arean förblev oförändrad. Skulle utgångspunkten däremot vara tre åtskilda figurer, som skulle sättas ihop till en figur på några olika sätt, så insåg en större grupp elever, att de sammansatta figurernas areor var lika stora.

I en uppgift i vilken mätandets princip var central, var också areabegreppets additiva egenskap involverad. Den övervägande delen av eleverna bemästrade svårigheten i denna uppgift. En triangel används också för att täcka över en figur, som skulle indelas i ett antal trianglar. Även detta var en tillämpning av mätandets princip. Mindre än hälften av eleverna löste uppgiften, något som troligen berodde på svårigheten med indelningen av figuren.

Egenskaper hos trianglar manifesteras på olika sätt i några av uppgifterna. Kongruens, det vill säga samma storlek och form, verkar de flesta elever ha förstått, medan endast en mindre grupp elever förstod icke-kongruens. Att känna igen trianglar klarade de flesta elever, medan trianglar med speciella egenskaper var mer obekanta. Flera uppgifter av kreativ karaktär, som att konstruera geometriska figurer, löste de flesta eleverna. Men då mer komplexa figurer skulle konstrueras, minskade lösningsfrekvensen.

Uppgiften att rita en rektangel, då två sidor var givna, löste ungefär två tredjedelar av eleverna. Svårigheter med konstruktionen visade sig vara den största felkällan.

Elevernas spatiala förmåga testades med hjälp av tvådimensionella representationer av tredimensionella objekt. Uppgiften bestod i att vika olika pappersark till ett tredimensionellt objekt. Det är ett känt faktum att spatial förmåga utvecklas relativt sent i skolåldern, något som också bekräftades av lösningsfrekvensen.

Vridningar och speglingar är avbildningar som ingår i geometriundervisningen. Trots att vridningar är en central del av den vanligaste modellen av vinkelbegreppet, klarade endast något mer än en fjärdedel av eleverna denna uppgift. Spegling i linje lyckades ungefär tre femtedelar med. Däremot verkade mindre än hälften av eleverna bekanta med begreppet symmetrilinje.

Uppskattning av ett träds höjd, som representerar en multiplikativ jämförelsesituation, i vilken mätandets idé och innehållsdivision är centrala, var också en utmaning för eleverna. Något mindre än två femtedelar löste uppgiften.

Resultat
– elevers matematiska resultat i årskurs åtta

9. Resultat – elevers matematiska kunskaper i årskurs åtta

Resultatet, som redovisas för årskurs 8, omfattar de områden inom vilket elevernas prestationer låg under EU/OECD-genomsnittet. Först behandlas algebra och sedan geometri. Den procedurella undervisningen i västländerna problematiseras också.

9.1 Algebra

Testningen av området algebra omfattar ekvationer, uttryck, funktioner och ekvationer av två obekanta, formler, koordinatsystem samt olikheter. Avsnittet avslutas med en sammanfattning och slutsatser. Som kommer att framgå av de efterföljande avsnitten, har några uppgifter inte bedömts ingå i uppnåendemålen för årskurs 9.

9.1.1 Ekvationer

De två första uppgifterna rör ekvationer. I en av uppgifterna (M04_06) gavs den totala fraktkostnaden för ett objekt av en formel som ledde till en ekvation.

M04_06

I Zedland anges den totala fraktkostnaden för ett föremål med formeln $y = 4x + 30$, där x är vikten i gram och y är kostnaden i zed. Om man har 150 zed, hur många gram kan man låta frakta?

(A) 630

(B) 150

(C) 120

(D) 30

M042267

Det sista alternativet 30, som var det korrekta, valde något mindre än en fjärdedel av eleverna (23,2 %). Enkodningen resulterade i en elementär ekvation, $150 = 4x + 30$. Att en så liten andel av eleverna löste ekvationen kan bero på, att de är vana vid mindre tal, vilka gör det möjligt att hitta lösningen genom att gissa. Detta kan tyda på, att eleverna inte nått den strukturella algebrans nivå, inom vilken lösningsstrategier för större tal ingår. En annan bidragande orsak kan vara, att likhetstecknet endast förstås dynamiskt. Denna uppfattning, som är känd för att negativt påverka ekvationers lösningsfrekvens, implicerar att något skall beräknas i det vänstra ledet och att resultatet skall skrivas till höger. Följande exempel kan illustrera detta: $4 + 3 = 7$, fyra och tre *blir* sju. Ekvationen är nästan omöjlig att lösa med en sådan förståelse av likhetstecknet, eftersom 150 inte kan beräknas så att det blir $4x + 30$. För att lösa uppgiften krävs i stället den statiska uppfattningen, vilken innebär, att det på båda sidor av likhetstecknet skall vara samma värde för ett visst värde på x. Detta gör det möjligt att förstå ekvationen begreppsligt, vilket i sin tur kan leda till att den kan lösas. För ett visst värde på *x*, så skall det alltså finnas lika många zed på båda sidor av likhetstecknet (Ginsburg, 1977; Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Kieran, 1981; Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Carpenter, Franke & Levi, 2003).

Alternativ a) 630, representerar en förväxling av *x* och *y*. Istället för att substituera *y* med 150 så har *x* ersatts med 150, vilket leder till ekvationen $y = 4 * 150 + 30$. Då blir y = 630. Detta alternativ var ungefär lika frekvent (20,6 %), som det korrekta. Samtliga alternativ var ungefär lika frekventa, vilket kan innebära att gissningar har dominerat grunden för val av alternativ. Detta gör underlaget för slutsatserna svagt.

I uppgiften (M02_08) representerar problemsituationen primärt en additiv jämförelsesituation.

M02_08

M042263

Jonas vet att en bläckpenna kostar 1 zed mer än en blyertspenna.
Hans vän köpte 2 bläckpennor och 3 blyertspennor för 17 zed.
Hur många zed behöver Jonas för att köpa 1 bläckpenna och 2 blyertspennor?

Visa din uträkning.

Eleverna förväntas lösa uppgiften med en ekvation eller motsvarande. Ungefär en tredjedel (33,8 %) av eleverna lyckades lösa uppgiften jämfört med EU/OECD länderna, vars genomsnittliga lösningsfrekvens var lägre (27,8 %). Om en blyertspenna kostar *x* zed så kostar en bläckpenna $x + 1$ zed. Den fortsatta enkodningen av uppgiften leder därför till den matematiska modellen $2(x + 1) + 3x = 17$. Detta gör att $x = 3$. Då en blyertspenna kostar 3 zed, så kostar en bläckpenna 4 zed. Alltså behöver Jonas 10 zed för att köpa 1 bläckpenna och 2 blyertspennor.

Den huvudsakliga svårigheten tycks vara att via enkodningen av problemet komma fram till den avgörande ekvationen. En grupp elever har emellertid löst uppgiften korrekt utan att använda sig av en ekvation.

Den tredje uppgiften (M07_05) kräver emellertid också kunskaper i den strukturella algebran.

M07_05

M032540

$3(2x - 1) + 2x = 21$

Vilket värde har *x*?

Ⓐ -3

Ⓑ $-\frac{11}{4}$

Ⓒ $\frac{11}{4}$

Ⓓ 3

I detta fall ges fyra alternativ att välja mellan. Det korrekta 3 valdes av drygt hälften av eleverna (50,6 %). Den mest frekventa distraktorn 11/4 kunde erhållas, om den distributiva lagen tillämpades inkorrekt (22,1 %), $3 * 2x - 1 + 2x = 21$. Eleverna tycks inte helt ha internaliserat den distributiva lagen, vars tillämpning ligger inom den strukturella algebran.

9.1.2 Uttryck

De fyra följande uppgifterna handlar om uttryck. I den första uppgiften (M02_06) ombads eleverna att välja mellan fyra alternativ.

M02_06

Vilket alternativ motsvarar 4x - x + 7y - 2y?

Ⓐ 9

Ⓑ $9xy$

Ⓒ $4 + 5y$

Ⓓ $3x + 5y$

M042199

Det korrekta resultatet, $3x + 5y$, valdes av något mindre än två tredjedelar av eleverna (61,0 %). Troligen berodde detta på att det var möjligt att direkt applicera en begreppsmodell, objektmodellen, på uppgiften. Ett antal elever förenklade $4x - x = 4$ och valde därför alternativ $4 + 5y$, vilket kan bero på, att variabeln uppfattas ha en icke-symbolisk representation (18,5 %). Även valet av distraktorn 9 (4,5 %) kan ha sin grund i uppfattningen, icke-symbolisk representation, vilken leder till, att bara koefficienter adderas, $4 + 7 - 2 = 9$.

Nästa uppgift (M04_07) är den andra förenklingen av ett uttryck.

M04_07

Vilket av alternativen är lika med $2(x + y) - (2x - y)$?

Ⓐ $3y$

Ⓑ y

Ⓒ $4x + 3y$

Ⓓ $4x + 2y$

M042239

Svarsalternativet $3y$, som är det korrekta, valdes lågfrekvent (18,9 %). Distraktorn y representerade ett resultat som erhållits genom att inte byta tecken i den andra negativa parentesen (27,8 %). Distraktorn, $4x + 2y$, var trots sin inkorrekthet mest frekvent (32,5 %) och erhölls genom att multiplicera den första parentesen inkorrekt, $2(x + y) = 2x + y$. Det är viktigt att lägga märke till, att y inte multiplicerats med 2, vilket skulle ha gjorts. Vidare så förändrades de två negativa tecknen i uttrycket till att bli positiva både framför och inom den andra parentesen. Distraktorn $4x + 3y$ har fåtts genom att den första parentesen korrekt multiplicerats med 2 i kombination med en felaktig ändring av de två negativa tecknen till positiva (13,5 %).

Den ganska låga lösningsfrekvensen (18,9 %) beror på det faktum, att flertalet elever inte behärskade hur parenteser hanteras, en kunskap, som tillhör den strukturella algebran.

En förenkling av ett annat slags uttryck testas i nedanstående uppgift (M05_02).

M05_02

$2a^2 \cdot 3a =$

Ⓐ $5a^2$

Ⓑ $5a^3$

Ⓒ $6a^2$

Ⓓ $6a^3$

M032198

Det mest frekvent valda alternativet (46,4 %) var det inkorrekta, $6a^2$. I det givna uttrycket $2a^2 * 3a$ har exponenten för $3a$ avsiktligt utelämnats. Detta kan ha försvårat elevernas operationella tänkande och lett till att $2a^2 * 3a = 6*a^{2+0} = 6a^2$. Hade det däremot stått $2a^2 * 3a^1$ hade exponentlagarna direkt kunnat tillämpas. Det hade då blivit $6 * a^{2+1} = 6a^3$, det korrekta alternativet, vilket hade en relativt låg lösningsfrekvens (18,0 %). Ett annat vanligt misstag var, att eleverna adderade de två koefficienterna, 2 och 3, som i svarsalternativen $5a^2$ och $5a^3$ (tillsammans 30,7 %). Troligen har många elever förlitat sig på objektsmodellen, vilken emellertid endast är avpassad för additiva förenklingar och inte för multiplikativa. Alternativen $5a^2$ och $5a^3$ kan därför misstänkas ha sina rötter i den additiva objektsmodellen.

I den här uppgiften (M04_03) skall värdet av ett uttryck beräknas.

M04_03

$a = 3$ och $b = -1$.

Vad är värdet av $2a + 3(2 - b)$?

Ⓐ 15

Ⓑ 14

Ⓒ 13

Ⓓ 9

M042082

Det korrekta alternativet 15 valdes av en mindre grupp elever (10,9 %). Majoriteten (59,3 %) valde distraktorn 9, vilken kunde erhållas genom att felaktigt ersätta $-b = -1$. Dessa elever insåg inte att $-b = +1$, om $b = -1$. En av de andra distraktorerna, 13, berodde på oförmågan att applicera den distributiva lagen korrekt på parentesen (14,7 %).

Att beräkna värden av uttryck kan begreppsligt ifrågasättas. Istället är det funktioners värden som borde beräknas. I detta fall skulle emellertid funktionen ha haft två oberoende variabler, något som inte ingår i uppnåendemålen i grundskolans matematik. Trots en för eleverna delvis okänd kontext så kan det ändå konstateras att kunskapen, som krävs för att lösa uppgiften, ligger på en relativt elementär nivå och därför medförde att ett antal elever ändå löste uppgiften.

9.1.3 Funktioner och ekvationer med två obekanta

I uppgifterna återfinns inte begreppet funktion explicit. De funktionella samband, som testas, är istället utformade som ekvationer av två obekanta eller som grafer i koordinatsystem eller diagram. Den första uppgiften handlar om ett samband mellan *x* och *y*.

M05_10

Tabellen nedan visar ett samband mellan *x* och *y*.

x	1	2	3	4	5
y	1	3	5	7	9

Vilken av följande ekvationer uttrycker detta samband?

Ⓐ $y = x + 4$

Ⓑ $y = x + 1$

Ⓒ $y = 2x - 1$

Ⓓ $y = 3x - 2$

M032163

Det mest frekvent (32,1 %) valda alternativet, $y = 2x - 1$, var det korrekta. En dryg fjärdedel av eleverna attraherades dock av distraktorn, $y = x + 1$ (26,9 %). Ett typiskt misstag var, att eleverna inte tycks ha kontrollerat att alla talpar satisfierade sambandet utan endast ett. Till exempel beskriver distraktorn, $y = x + 1$, sambandet mellan 2 och 3 men inte mellan de övriga. Den minst frekventa (8,9 %) distraktorn, $y = 3x - 2$, beskriver endast sambandet mellan paret 1 och 1. Detta tyder på, att de flesta elever inte tycks vara medvetna om, att samtliga talpar i tabellen behöver kontrolleras. Denna brist på medvetenhet kan ha sin grund i en förståelse av variabelbegreppet som är typisk för kategorin specifikt okänt tal. Om variabeln ses som ett specifikt okänt tal, så är det omöjligt för eleverna att förstå, att variabeln skulle kunna anta fler än ett värde. Detta kan vara orsaken till att endast ett talpar per ekvation kontrolleras. Noteras bör att en femtedel av eleverna (20,0 %) inte försökte lösa uppgiften.

Nästa uppgift (M07_04) handlar också om ett samband.

M07_04

M032273

2, 5, 11, 23, ...

Om man startar med 2, vilken av följande regler skulle ge vart och ett av talen i talföljden ovan?

Ⓐ Addera 1 till föregående tal och multiplicera sedan med 2.

Ⓑ Multiplicera föregående tal med 2 och addera sedan 1.

Ⓒ Multiplicera föregående tal med 3 och subtrahera sedan 1.

Ⓓ Subtrahera 1 från föregående tal och multiplicera sedan med 3.

Svarsalternativ b), som är det korrekta, valdes av något mindre än två tredjedelar av eleverna (62,3 %). Den mest frekventa distraktorn (15,9 %) var c), som representerar en multiplikation av föregående tal med 3 och sedan en subtraktion med 1. Tal nummer två i följden, dvs. 5, kan fås på detta sätt men inte de återstående två.

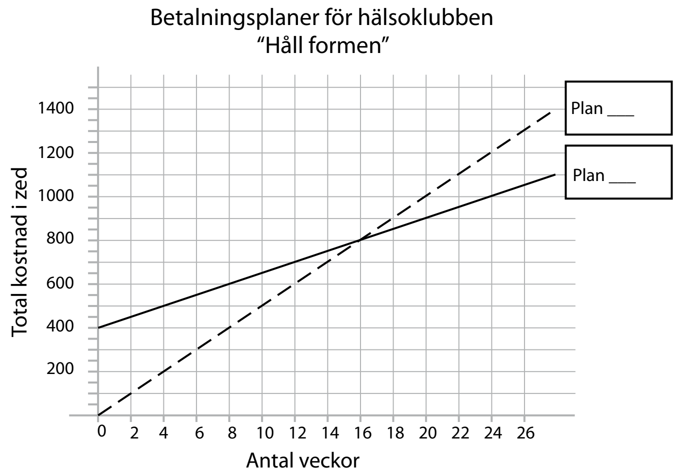
En förklaring till att elever inte kontrollerar om mer än ett par av tal uppfyller sambandet kan ha sina rötter i en övergeneralisering från de fyra elementära operationerna. Om ett samband mellan till exempel talen 2 och 5 skall resultera i 7, så kan endast en av de elementära operationerna beskriva detta, nämligen addition. Flera sammansatta operationer däremot kan beskriva sambandet mellan 2 och 5 med resultatet 7. Exempelvis beskriver de båda linjära uttrycken $6x - y$ och $9x - 2y - 1$ två olika samband mellan talen 2 och 5, som ger resultaten 14 respektive 18.

Två grafer i ett koordinatsystem är utgångspunkten för nästa uppgift (M07_13).

M07_13

Hälsoklubben ”Håll formen” erbjuder två olika betalningsplaner.
Plan A har en startavgift på 400 zed och en veckoavgift på 25 zed.
Plan B har ingen startavgift men en veckoavgift på 50 zed.

Figuren nedan visar en jämförelse av kostnaderna för Plan A och Plan B.



A. Markera vilken linje som representerar Plan A, och vilken linje som representerar Plan B.

B. Vilken vecka har du betalat lika mycket med Plan A som med Plan B?

C. Hur stor är skillnaden i total kostnad mellan de båda planerna vid den 24:e veckan?

M032637

Utifrån informationen som gavs för varje plan, löste en majoritet av eleverna (84,3 %) testuppgift A.

Även deluppgift B, som bestod i att identifiera när graferna representerade lika stor kostnad, löstes av en majoritet av eleverna (89,5 %).

Deluppgift C handlade om förmågan att tolka en specifik punkt på graferna. Eleverna lyckades i stor utsträckning (75,8 %) också lösa denna deluppgift.

En förklaring till att så förhållandevis många elever löste uppgiften kan vara den relativt låga abstraktionsnivån. Inte heller några beteckningar med variabler förekom, vilket kan ha förbättrat elevernas möjligheter att lösa uppgiften. Uppgiftstypen är även vanlig i läroböcker (Hemmi, Kirsti, skriftlig kommunikation, 2008).

I nästa uppgift (M04_08) skall eleverna avgöra vilken punkt, som ligger på en viss linje.

M04_08

Vilken punkt återfinns på linjen $y = x + 2$?

Ⓐ (0; –2)

Ⓑ (2; –4)

Ⓒ (4; 6)

Ⓓ (6; 4)

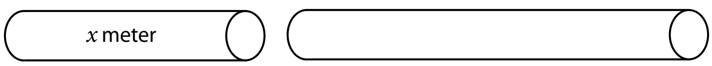
M042238

Knappt en fjärdedel av eleverna (23,3 %) kunde ange den korrekta punkten (4; 6). Åtskilliga elever (19,0 %) valde dock den inkorrekta distraktorn, (0; –2). I detta fall tycktes *x* och *y* förväxlats, då talparet (–2; 0) satisfierar linjens ekvation. Den andra distraktorn, (2; –4), valdes av flest elever (34,7 %). Elevernas sätt att resonera är svårare att reda ut i detta fall. Troligen har de övergeneraliserat en av reglerna, vilken är avsedd att lösa ekvationer i den strukturella algebran. Om man låter –4 byta sida, så byter det också tecken och blir positivt. En icke försumbar andel elever (16,7 %) hade inte försökt lösa uppgiften. Generellt sett så visste troligen relativt få elever att punktens koordinater måste satisfiera ekvationen, för att punkten skall ligga på linjen. Detta är ett förhållande som skulle göra att gissningar förekom mer frekvent. Denna testuppgift bedöms inte matcha uppnåendemålen i kursplanen för grundskolans matematik, vilket också kan förklara den relativt låga lösningsfrekvensen.

9.1.4 Formler

I de tre kommande testuppgifterna så fokuseras formelbegreppet. Eleverna uppmanas i den första uppgiften att skapa en formel för att uttrycka längden av ett rör relativt längden av ett annat rör (M04_04).

M04_04



Det första röret är *x* meter långt. Det andra röret är *y* gånger så långt som det första.
Hur långt är det andra röret?

Ⓐ xy meter

Ⓑ $x + y$ meter

Ⓒ $\frac{x}{y}$ meter

Ⓓ $\frac{y}{x}$ meter

M042088

Då problemsituationen är en multiplikativ jämförelsesituation, kan enkodningen av problemtexten, i stället för de två olika variablerna, vara den huvudsakliga svårigheten.

Det första alternativet, xy meter, vilket var det korrekta, valdes relativt frekvent (52,6 %). Ungefär en fjärdedel (24,2 %) av eleverna attraherades av distraktorn, $x + y$ meter, medan de övriga distraktorerna endast samlade ett relativt fåtal elever.

Uppgiften handlar om den grundläggande idén bakom mätning nämligen att undersöka hur många gånger en enhet kan täcka en viss längd. Men problemtexten tycks ha tolkats annorlunda av vissa elever, som utgick ifrån att det andra röret var y meter och det första x meter långt. I detta fall skulle alternativet, y/x, representera, hur många gånger längre det andra röret är i förhållande till det första. Distraktorn, $y + x$ meter däremot kan av eleverna ha uppfattats vara korrekt, då de förutsatt att det andra röret är y meter och utgått från att det första är x meter. Då representerar nämligen $x + y$ rörens totala längd. Svarsalternativet x/y har dock ingen tydlig begreppslig betydelse.

I den andra uppgiften (M07_06) jämfördes det antal jackor Anna och Hasse har.

M07_06

Hasse har 3 jackor mer än Anna. Om n är antalet jackor som Hasse har, hur många jackor har då Anna uttryckt i n?

(A) $n - 3$

(B) $n + 3$

(C) $3 - n$

(D) $3n$

M032698

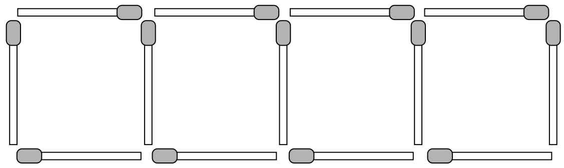
Det korrekta alternativet, $n - 3$, valdes av något mer än tre femtedelar av eleverna (60,9 %). Alternativet, $n + 3$, var den mest frekventa distraktorn (19,5 %). De andra två distraktorerna var lågfrekventa (tillsammans 17,0 %).

I denna uppgift kan variabeln ses som ett specifikt okänt tal, en situation som de flesta elever är bekanta med. Eftersom abstraktionsnivån på detta sätt minskar, innebär detta att problemet är lättare att lösa. Icke desto mindre finns det en avgörande svårighet, nämligen huruvida 3 skall adderas eller subtraheras från n. Alternativet $n + 3$ skulle ju innebära det omvända förhållandet nämligen att Anna har tre jackor fler än Hasse.

Då problemsituationen representerar en jämförelsesituation, så kan enkodningen ha varit det som har vållat eleverna mest bekymmer.

I den tredje uppgiften (M05_03) testas mönstertänkande, som ofta är en del i pre-algebraträningen.

M05_03



I figuren har 13 tändstickor använts till att lägga 4 kvadrater i en rad. Hur många kvadrater i en rad kan man lägga på detta sätt om man använder 73 tändstickor? Visa hur du kom fram till svaret.

Svar: _______________

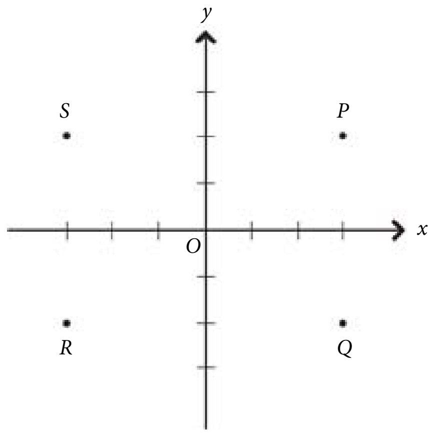
M032640

Endast en mindre grupp elever (16,0 %) löste uppgiften korrekt. Utgångspunkten för mönstret kan vara den vänstra kvadraten, som består av fyra tändstickor. För varje ny kvadrat så adderas tre tändstickor, så att situationen representerar flera på varandra följande additiva förändringar. Om man då låter antalet nya kvadrater, som adderas, representeras av n, så blir formeln för mönstret $4 + n * 3$. Detta leder till ekvationen $4 + 3n = 73$, där n blir 23. Emellertid representerar n bara antalet nya kvadrater, bland vilka den första kvadraten inte är medräknad, så svaret blir alltså 24 kvadrater. Då de additiva förändringssituationerna inte anses särskilt svåra att enkoda (Fuson, 1992), så kan svårigheten snarare stå att finna i ovana vid mönstertänkande.

9.1.5 Koordinatsystem

I koordinatsystemet har fyra punkter markerats och eleverna uppmanas avgöra, vilken av punkterna som har koordinaterna (3; –2) (M02_11).

M02_11



Vilken av punkterna har koordinaterna (3; –2)?

Ⓐ *P*
Ⓑ *Q*
Ⓒ *R*
Ⓓ *S*

M042148

Det är nödvändigt att påpeka, att axlarna inte var etiketterade med tal. Något mindre än hälften av eleverna (45,9 %) gjorde det korrekta valet, vilket var punkten Q. Den mest frekventa distraktorn R var punkten med koordinaterna (–3; –2), som valdes av nästan en fjärdedel av eleverna (22,0 %). Den minst frekventa (7,9 %) distraktorn S, var punkten (–3; 2) och punkten P, valdes av ungefär en sjättedel av eleverna (15,1 %).

Eftersom punkterna placerats symmetriskt i koordinatsystemet, så var den verkliga svårigheten att urskilja betydelsen av det negativa tecknet, något som kunde vara besvärligt beroende på avsaknaden av beteckningar på koordinataxlarna. Ett annat vanligt misstag brukar vara, att ordningen på de ingående talen i koordinaterna inte diskrimineras. Detta var något, som inte testades i denna uppgift, då punkterna placerats symmetriskt och därför klargör bilden ordningen på koordinaterna.

9.1.6 Olikheter

Den sista uppgiften (M01_04), som beskrivs i denna översikt av algebra, är en olikhet. Den har inte bedömts ingå i kursplanens uppnåendemål.

M01_04

M022050

$\frac{x}{3} > 8$ är detsamma som

Ⓐ $x < 5$

Ⓑ $x < 24$

Ⓒ $x > \frac{8}{3}$

Ⓓ $x > 5$

Ⓔ $x > 24$

Olikheten löses genom att multiplicera båda leden med det positiva heltalet tre. I enlighet med den strukturella algebran, så påverkas inte olikhetstecknet då.

Av de fem befintliga alternativen valdes tre av vardera knappt en tredjedel av eleverna. Alternativet, $x < 24$ (29,2 %) är det korrektas motsats, $x > 24$ (25,9 %). Distraktorn $x > 8/3$ hade attraherat flest elever (29,9 %). Två av distraktorerna involverar talet fem. Anledningen till valet av dessa alternativ skulle kunna vara en lösningsansats baserad på subtraktion, 8 – 3 = 5 (7,4 %).

9.1.7 Förståelse av variabelbegreppet

Även i två av testuppgifterna, vilka inte är fria för publicering, exponerades elevernas förståelse av variabelbegreppet tydligt. Såsom beskrivits i kapitlet ”teoretiska förutsättningar” så avgör en testuppgifts utformning, vilka sätt att förstå ett begrepp, som är möjliga för elever att exponera. Vissa testuppgifter kan till och med underlätta exponering av vissa sätt att förstå ett begrepp medan andra kan hindra en sådan exponering. Kontextens beskaffenhet är också avgörande för variabelns faktiska betydelse.

I tabell 11 presenteras kategorierna av elevernas exponerade sätt att förstå variabelbegreppet. (M06_06 eller M042226).

Tabell 11 Kategorier av elevers exponerade förståelse av variabelbegreppet, i den första uppgiften, som inte är fri att publicera, n = 553

Kategorier	Frekvens*	Relativ frekvens (%)
Specifikt obekant tal (Specific Unknown Number)	106	19,2
Sifferrepresentation (Digit Representation)	102	18,4
Icke-symbolisk representation (Non-Symbolic Representation)	19	3,4
Additiv representation	90	16,3
Icke kategoriserad	62	11,2
Ingen ansats till lösning	174	31,5
Totalt	**553**	**100,0**

* Ej viktade frekvenser

Det korrekta sättet att förstå variabeln i denna specifika kontext tillhör kategorin speciellt okänt tal, vilket bara ungefär en femtedel av eleverna exponerade (19,2 %). Nästan lika frekvent (18,4 %) var den uppfattning, som är typisk för kategorin sifferrepresentation, i vilken variabeln representerar en siffra och inte ett tal. Ett karaktäristiskt beteende hos de elever, vars förståelse av variabelbegreppet tillhör kategorin icke-symbolisk representation, var att ignorera bokstavsbeteckningen (3,4 %). När förståelse av variablerna hamnar i kategorin additiv representation, så adderas de istället för att multipliceras (16,3 %).

Såsom tidigare beskrivits så bestämmer karaktären på testuppgiften vilka kategorier som kan exponeras. I tabell 12 visas en något annorlunda fördelning av förståelse av variabelbegreppet. Lösandet av testuppgiften (M06_08 eller M042086) underlättades, om variablerna uppfattades som generaliserade tal. En relativt hög andel elever exponerade en sådan förståelse (40,1 %). Emellertid kunde uppgiften också ha lösts, om variabeln hade uppfattats som ett specifikt okänt tal, något som ingen av eleverna uppvisade. Kategorin specifikt okänt tal i tabell 12 var kopplad till ett direkt misstag, som eleverna gjorde (7,4 %).

Tabell 12 Kategorier av elevers exponerade förståelse av variabelbegreppet, i den andra uppgiften som inte är fri att publicera, n = 553

Kategorier	Frekvens*	Relativ frekvens (%)
Generalisat tal (Generalised Number)	222	40,1
Specifikt obekant tal (Specific Unknown Number)	41	7,4
Sifferrepresentation (Digit Representation)	2	0,3
Icke-symbolisk representation (Non-Symbolic Representation)	113	20,4
Icke kategoriserad	52	9,5
Ingen ansats till lösning	123	22,3
Totalt	**553**	**100,0**

* Ej viktade frekvenser

Ungefär en femtedel av eleverna exponerade en förståelse som tillhörde kategorin icke-symbolisk representation (20,4 %). Den relativt lågfrekventa (0,3 %) exponeringen av en förståelse typisk för kategorin sifferrepresentation berodde på testuppgiftens speciella utformning.

Det har alltså visat sig, att en stor andel elever inte har förstått den kontextuella betydelsen av variabelbegreppet. Istället har flera missuppfattningar exponerats.

9.1.8 Sammanfattning och slutsatser

Det är nödvändigt att konstatera, att uppgifterna testar en stor bredd av matematiska kunskaper. Därför ger analysen kanske en ganska disparat bild. Icke desto mindre är några gemensamma drag möjliga att urskilja.

De flesta elever i årskurs 8 verkar fortfarande ha den dynamiska och inte den statiska uppfattningen av likhetstecknet. Detta gör ekvationers lösningsprocedurer onödigt problematiska för eleverna. Också tillämpningen av distributiva lagen på negativa parenteser orsakar en del problem, inte bara vid ekvationslösningar utan också vid förenklingar av uttryck.

När objektsmodellen direkt tillämpades i en uppgift, som gällde förenklingar av additiva uttryck, så resulterade det i en relativt hög lösningsfrekvens. I uppgifter där objektsmodellen inte var tillämplig men där eleverna ändå kan ha använt den, var lösningsfrekvensen mycket lägre. Det kan vara viktigt att notera, att objektsmodellen endast är möjlig att tillämpa på additiva förenklingar och inte på multiplikativa.

En annan situation, som var knepig för eleverna, var substitution av negativa tal, något som frekvent tycktes ge inkorrekta svar. En majoritet av eleverna hade uppfattningen att om $b = -1$, så är också $-b = -1$.

En situation, som inte underlättade testuppgifternas lösande utan skapade onödiga svårigheter var, att terminologin rörande funktioner och ekvationer av två obekanta inte hölls isär. Den största svårigheten var emellertid elevernas förståelse av variabelbegreppet. Många testuppgifter blev extra svåra att lösa beroende på att eleverna inte uppfattade de inblandade variablernas betydelse på adekvat sätt. Några vanliga sätt att missförstå variabelbegreppet, som eleverna exponerade, var icke-symbolisk representation, sifferrepresentation och additiv representation. Dessutom hade eleverna svårigheter att med hjälp av kontexten identifiera de två sätten att förstå variabeln, som tillhör kategorierna specifikt okänt tal och generaliserat tal. Vanligtvis uppfattade eleverna variabeln som ett specifik okänt tal och inte som ett generaliserat tal.

Som har beskrivits i forskningsöversikten så kan en enskild elev ha ett antal olika ibland kontextuellt betingade sätt att förstå ett begrepp. Detta gäller givetvis också variabelbegreppet. Det som beskrivits ovan är de sätt att förstå, som eleverna har exponerat i sina lösningar av uppgifterna. Det behöver inte nödvändigtvis betyda att en enskild elev inte skulle kunna ha en korrekt förståelse parallellt med sin inkorrekta. Medvetenheten om när en viss förståelse ska tillämpas, tycks emellertid inte vara fullt utvecklad.

Avslutningsvis bör betonas att ett antal testuppgifter inom området algebra inte bedömts ingå i kursplanens uppnåendemål i årskurs 9.

9.2 Geometri

Förståelsen av flera begrepp har testats inom området geometri. Begreppen omkrets och area är två, som ofta blandas ihop. De kommer att behandlas både enskilt och tillsammans. Ett av de mest testade begreppen är vinkelbegreppet, vilket kommer att beskrivas i det tredje avsnittet. Begreppen triangel och rektangel är två-dimensionella objekt, som testas i ett par uppgifter. Två-dimensionella representationer av tre-dimensionella objekt behandlas i fyra uppgifter. Slutligen analyseras en konform avbildning av en geometrisk form.

9.2.1 Begreppet omkrets

Den första uppgiften (M01_05) omfattar förståelse av de två begreppen omkrets och area.

M01_05

Vilken omkrets har en kvadrat med arean 100 kvadratmeter?

Svar: _______________

M022055

M01_05

Karaktäristiskt för en kvadrat är att sidorna är lika långa, vilket är en nödvändig kunskap för att lösa uppgiften. Något mer än en tredjedel av eleverna (39,8 %) löste uppgiften korrekt, 40 meter. Olika slags klassificerade misstag uppgick till något mindre än hälften (46,9 %). Ett vanligt misstag var, att begreppen omkrets och area blandades ihop, ett misstag, som också beskrivits i internationell forskning (Clements & Stephan, 2003).

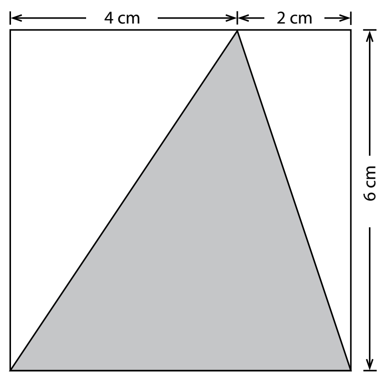
9.2.2 Areabegreppet

I det här avsnittet analyseras fyra uppgifter, vilka behandlar areabegreppet.

Den första uppgiften (M01_12) omfattar beräkning av arean av en triangel inskriven i en kvadrat.

M01_12

Figuren visar en skuggad triangel i en kvadrat.



Vilken area har den skuggade triangeln?

Svar: _______________

M022243

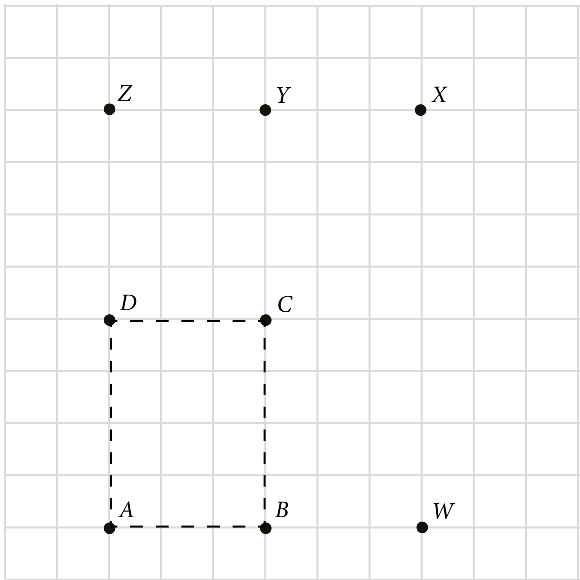
Betydligt mindre än hälften av eleverna löste uppgiften korrekt (42,7 %). Ett ännu mindre antal elever (37,5 %) lyckades inte lösa den, medan en mindre grupp (19,6 %) inte uppvisade något försök till lösning.

Eleverna exponerade, att de inte fullt ut förstod areabegreppet tillämpat på en triangel. Som bland andra Stigler och Hiebert (1999) visade, kan man misstänka, att en beräkning av en triangels area har undervisats om på ett procedurellt sätt och därmed lärts in sålunda. Formeln för arean av en triangel är ju inte möjlig att direkt applicera i uppgiften, utan en viss begreppslig anpassning krävs. Detta kan förklara de svårigheter, som en relativt stor elevgrupp tycks ha haft.

I den andra uppgiften (M04_11), förväntades eleverna rita en triangel med hjälp av några givna punkter. Triangelns area skall vara två gånger arean av en given rektangel.

M04_11

Använd de markerade punkterna för att rita en triangel vars area är TVÅ GÅNGER så stor som rektangeln *ABCD:s* area.

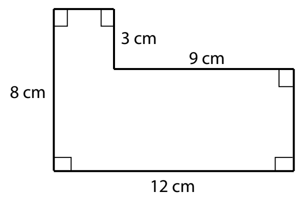


M042130

Något över hälften av eleverna (50,2 %) löste uppgiften korrekt, medan resten inte lyckades lösa den eller inte försökte. En avgörande skillnad mellan föregående uppgift och denna är det givna rutnätet. Detta gör, att uppgiften också kan lösas begreppsligt genom att räkna rutnätskvadraterna. En betydande del av elevgruppen tycks emellertid inte ha upptäckt detta utan har försökt lösa uppgiften utan ett sådant stöd av rutnätet. Detta gör uppgiften väsentligt svårare.

En geometrisk form kan karaktäriseras såsom en oregelbunden hexagon, som är möjlig att dela in i två rektanglar (M07_08). Eleverna förväntades beräkna arean av denna hexagon. Detta kan göras genom att utnyttja areabegreppets additiva karaktär.

M07_08



Hur stor area, i kvadratcentimeter, har figuren ovan?

(A) 66
(B) 69
(C) 81
(D) 96

M032575

Något över hälften av eleverna (51,2 %) valde det korrekta alternativet, 69. Den mest frekventa (21,2 %) distraktorn 96, kunde fås genom att multiplicera endast två av de fyra sidorna av olika längd, 8 * 12. De två andra distraktorerna, 66 och 81, som var mer eller mindre omöjliga att få fram genom enkla beräkningar, attraherade tillsammans nästan en fjärdedel av eleverna (23,8 %).

En slutsats som utifrån den internationella forskningens resultat kan dras är att eleverna inte verkade vara tillräckligt bekanta med areabegreppets additiva karaktär (Chick & Baker, 2005).

Denna uppgift (M07_07) handlar om antalet grodor i en damm.

M07_07

En cirkulär damm har radien 10 meter. Det finns i genomsnitt 2 grodor per kvadratmeter i dammen. Ungefär hur många grodor finns det i dammen?

π är ungefär 3,14

(A) 120
(B) 300
(C) 600
(D) 2 400

M032097

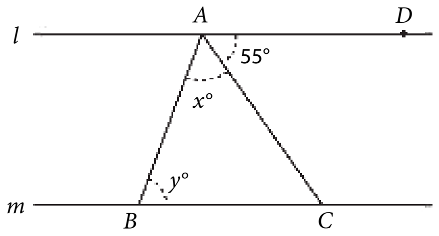
De två första alternativen omfattar de ungefärliga mätetalen för cirkelns omkrets 120 och dess area 300. Dessa alternativ hade vart och ett valts av något mindre än en tredjedel av eleverna (32,1 %, 28,7 %). Det korrekta alternativet, som representerade antalet grodor i dammen 600, valdes också det av något mindre än en tredjedel av eleverna (31,4 %). Det sista svarsalternativet 2 400 var lågfrekvent.

Det tycks som om också en grupp av de svenska eleverna, dels har en begränsad förståelse av en cirkels area och, dels har svårt att skilja en cirkels omkrets från dess area (Clements & Stephan, 2003). Dessutom kan konstateras att proportionalitetsbegreppet har en central roll i uppgiften, genom att antalet grodor angetts per kvadratmeter.

9.2.3 Vinkelbegreppet

Vinkelbegreppet testas frekvent i åtta testuppgifter. I den första (M02_10) är två parallella linjer sammanbundna med en triangel.

M02_10



I denna figur är linjen *l* parallell med linjen *m*. Vinkeln *DAC* är 55°.
Vad är värdet av $x + y$?

Ⓐ 55
Ⓑ 110
Ⓒ 125
Ⓓ 135

M042137

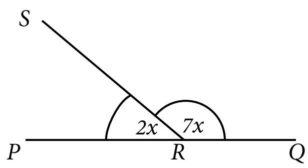
Det mest frekventa alternativet (42,3 %) var också det korrekta 125°. Ett annat frekvent alternativ (34,4 %) var två gånger vinkeln, 55°, det vill säga 110°. Av illustrationen kan man få intrycket, att detta alternativ kan vara korrekt.

Den kunskap som behövs för att lösa uppgiften är begreppet alternatvinkel och en triangels vinkelsumma, 180°.

En rät linje är utgångspunkten för nästa uppgift (M03_06). På linjen finns en punkt R från vilken en stråle är dragen.

M03_06

I figuren är *PQ* en rät linje.



Hur stor är vinkeln *PRS*?

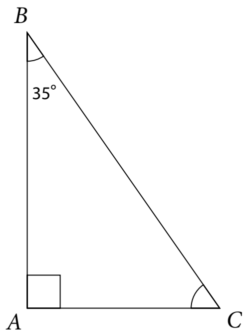
Ⓐ 10°
Ⓑ 20°
Ⓒ 40°
Ⓓ 70°
Ⓔ 140°

Det är nödvändigt för eleverna att känna till, att summan av en innervinkel och dess yttervinkel är 180°. Detta leder till den elementära ekvationen $2x + 7x = 180°$, som har lösningen $x = 20°$, vilket inte är svaret, då $2x$ efterfrågas. Det finns fem alternativ presenterade, av vilka ett är 20°, valt av en sjättedel av elevsamplet (13,7 %). En ganska stor majoritet av eleverna (59,7 %) hade valt ut alternativet, 40°, som är det korrekta. Ett annat frekvent alternativ, 70°, fastnade mer än en sjättedel av eleverna för (16,7 %). De övriga distraktorerna valdes lågfrekvent.

Problemet med uppgiften tycks inte vara vare sig enkodningen av problemtexten eller själva beräkningen utan snarare formuleringen av svaret, som inte är värdet av x utan av $2x$. Dock kan beteckningarna $2x$ och $7x$ som uttrycker ett proportionellt förhållande mellan vinklarnas storlek innebära en ökad svårighetsgrad.

I en rätvinklig triangel var förutom den räta vinkeln ytterligare en vinkel given, 35° (M03_14). Eleverna skulle bestämma den tredje vinkeln.

M03_14



Hur stor är vinkeln *C* i triangeln ovan?

Ⓐ 45°

Ⓑ 55°

Ⓒ 65°

Ⓓ 145°

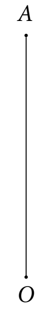
M032579

Den nödvändiga kunskapen för att lösa uppgiften är triangelns vinkelsumma, 180°. Det korrekta alternativet, 55°, var frekvent (58,3 %). Den mest attraktiva distraktorn, 45°, valdes av något under en femtedel av eleverna (18,7 %). Distraktorn, 65°, var inte särskilt frekvent vald (15,3 %) den heller. Av figuren, som illustrerar uppgiften, var det möjligt att få intrycket, att 65° kunde vara korrekt. Elever, som inte valde det korrekta alternativet, kände troligen inte till, att vinkelsumman i en triangel är 180°.

En sträcka var given i denna uppgift (M03_15) och eleverna uppmanades rita en trubbig och en spetsig vinkel.

M03_15

Använd sträckan *AO* nedan. Rita en rät linje *BC* genom *O* så att vinkeln *AOB* är spetsig och vinkeln *AOC* är trubbig. Markera vilken punkt som är *B* och vilken som är *C*.

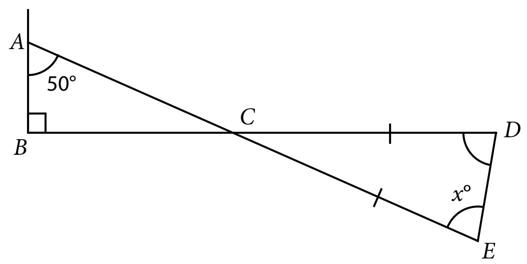


M032691

Knappt en tredjedel av elevgruppen (30,6 %) lyckades lösa uppgiften korrekt. För eleverna i EU/OECD-länderna däremot svarade genomsnittet mot att knappt hälften av gruppen (46,4 %) löste uppgiften. Den mest troliga orsaken till låga lösningsfrekvensen i Sverige är, att eleverna inte känner till terminologin om trubbig respektive spetsig vinkel.

I figuren, som skall illustrera uppgiften (M04_10) nedan, är de två vinklarna ACB och DCE vertikalvinklar. Vertikalvinklar är alltid av samma storlek.

M04_10



I den här figuren är *CD* = *CE*.
Vilket värde har *x*?

Ⓐ 40
Ⓑ 50
Ⓒ 60
Ⓓ 70

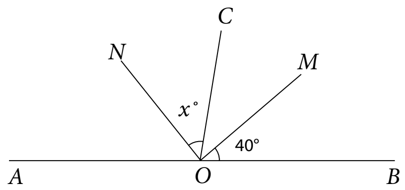
M042036

Vinkeln *ACB* kan beräknas genom vinkelsumman i den vänstra triangeln. Vinkeln blir 180° – 90° – 50° = 40°. Eftersom vertikalvinklar är lika stora, blir toppvinkeln i den högra liksidiga triangeln också 40°. Då basvinklarna är av samma storlek i en liksidig triangel och en av dessa utgör den efterfrågade vinkeln, så kan genom att använda vinkelsumman i en triangel en ekvation tecknas $2x + 40 = 180$. Lösningen blir $x = 70°$. Detta är det korrekta alternativet som valdes av något mindre än en tredjedel av eleverna (31,0 %). En nästan lika stor elevgrupp (30,6 %) attraherades av distraktorn 60°. Distraktorn 50° innebär, att den efterfrågade vinkeln har samma storlek som motsvarande vinkel i den vänstra triangeln (19,3 %).

Svårigheten med denna uppgift tycks vara begreppet vertikalvinklar samt att de två basvinklarna i en likbent triangel är lika stora.

I denna uppgift (M07_09) skall också en vinkel beräknas.

M07_09



I figuren ovan ligger punkterna *A*, *O*, och *B* på en linje. *OM* delar vinkeln *BOC* i två lika stora delar och *ON* delar vinkeln *AOC* i två lika stora delar. Vilket värde har *x*?

Svar: _______________

M032414

Eftersom strålen *OM* delar vinkeln *BOC* i två lika stora delar är vinkeln *MOC* också 40°. Strålen *ON* delar *AOC* i två lika stora delar och då är vinkeln *AON* också lika med $x°$. Eftersom vinkeln *AOB* är 180°, så fås ekvationen $x + x + 40 + 40 = 180$. Värdet på *x* blir då 50. Detta är också möjligt att komma fram till genom att pröva olika värden med hjälp av figuren.

Något mindre än en tredjedel av eleverna (28,0 %) löste uppgiften korrekt. För att lösa uppgiften förutsätts det att eleverna behärskar modellen för vinkelbegreppet, som används i svenska skolor. Enligt internationell forskning har endast en liten del av eleverna internaliserat denna begreppsmodell (Foxman & Ruddock, 1983; Mitchelmore & White, 1998).

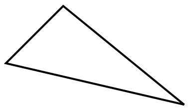
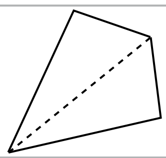
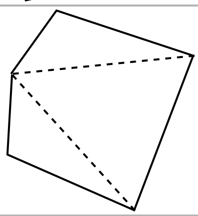
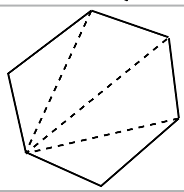
De följande två uppgifterna handlar om polygoner. Den första (M02_07) rör sambandet mellan innervinklar och antalet sidor.

M02_07

Innervinklar

Jack undersökte egenskaper hos polygoner. Jack gjorde tabellen nedan för att se om han kunde hitta ett samband mellan sidor och vinklar.

A. Gör färdigt tabellen genom att fylla i de tal som saknas.

Polygon	Antal sidor	Antal trianglar	Summan av innervinklarna
	3	1	1 • 180°
	___	___	___ • 180°
	___	___	___ • 180°
	___	___	___ • 180°

B. Skriv det tal som ska stå i rutan.

Summan av innervinklarna i en polygon med 10 sidor = $\boxed{}$ • 180°

M042301_1

Uppgift A: På denna konkreta nivå löste nästan två tredjedelar av eleverna (57,9 %) problemet korrekt. Uppgiften följdes upp med en andra, i vilken eleverna skulle bestämma motsvarande samband, då polygonen hade tio sidor.

Uppgift B: Lösningsfrekvensen minskade till mindre än en tredjedel (32,4 %). Det korrekta uttrycket är 8 * 180°. Sedan höjdes abstraktionsnivån ytterligare till att bestämma ett uttryck för summan av vinklarna i en *n*-sidig polygon.

M02_07

C. Jack kunde se ett samband mellan sidor och vinklar och skrev ett uttryck med n som gäller för alla polygoner. Gör färdigt det han skrev.

Summan av innervinklarna i en polygon med n sidor = _____ • 180°

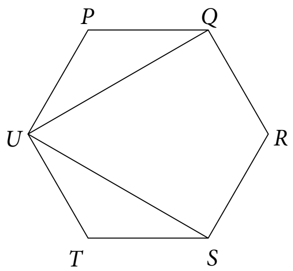
M042301_2

Uppgift C: Vid den ytterligare förhöjda abstraktionsnivån minskade lösningsfrekvensen till en liten bit under en tiondel av eleverna (8,1 %). Det korrekta uttrycket är $(n - 2) * 180°$.

Så slutsatsen som kan dras är, att abstraktionsnivån har ett avgörande inflytande på lösningsfrekvensen. Ett mycket begränsat antal elever behärskade detta slag av abstrakt tänkande med hjälp av variabler. Uppgiften klassificeras egentligen till algebraområdet.

I det andra problemet (M05_09) är utgångspunkten vinklarna i en hexagon.

M05_09



PQRSTU är en regelbunden sexhörning. Hur stor är vinkeln *QUS*?

Ⓐ 30°
Ⓑ 60°
Ⓒ 90°
Ⓓ 120°

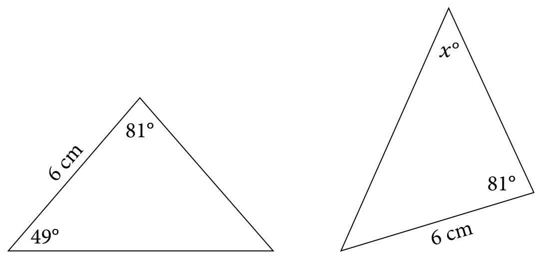
M032205

För att beräkna vinkeln *QUS* är det nödvändigt att fokusera de likbenta trianglarna *QPU* och *UTS*, som av symmetriska skäl är kongruenta, då två sidor och mellanliggande vinkel är lika. Eftersom en hexagon kan delas in i fyra trianglar, så är summan av alla innervinklar fyra gånger 180°, som är 720°. Då vinklarna är sex till antalet, så är en vinkel 120°. Toppvinkeln i de kongruenta trianglarna är då 120°. Då summan av alla vinklarna i triangeln skall vara 180°, så blir de båda basvinklarna 30° vardera. Vinkeln *PUT*, som är 120°, består då av de två 30°-vinklarna samt den okända vinkeln *QUS*, vilken då blir 60°. Detta, det korrekta alternativet, vilket något mer än hälften av eleverna valde (55,2 %), var möjligt att komma fram till genom att bara titta på figuren. Den mest attraktiva distraktorn, 120°, valdes av en mindre grupp elever (13,9 %). Multiple-choice-karaktären på uppgiften har troligen förbättrat elevernas möjligheter att lösa den, eftersom det var möjligt att visuellt uppskatta storleken på vinkeln. En annan lösningsstrategi kan ha varit att eleverna dragit diagonalen *QS*. Genom att samtliga mindre likbenta trianglar är kongruenta då mellanliggande vinkel och två sidor är lika stora, så blir sidorna i triangeln *QUS* lika stora, vilket gör *QUS* liksidig. I en liksidig triangel är samtliga vinklar lika stora dvs. 60° Genom elevernas val av lösningsstrategi kan uppgiften ha fått olika svårighetsgrader.

9.2.4 Begreppet triangel

De två på varandra följande problemen handlar om trianglar. I det första (M01_08) är två kongruenta trianglar givna.

M01_08



Trianglarna ovan är kongruenta. Måtten på vissa sidor och vinklar är givna.
Vilket värde har x?

Ⓐ 49
Ⓑ 50
Ⓒ 60
Ⓓ 70
Ⓔ 81

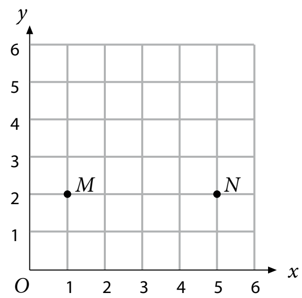
M022062

Storlekarna på några sidor och vinklar är kända och tycks vara valda, för att göra det omöjligt att fundera ut det korrekta alternativet genom att bara titta på trianglarna. En extra svårighet är, att den högra triangeln är en spegelbild av den vänstra, eftersom sidan med storleken 6 cm ligger på olika sidor av vinkel på 81° i trianglarna.

I det första svarsalternativet 49°, har det inte beaktats, att den ena triangeln är en spegelbild av den andra (37,9 %). Det andra svarsalternativet 50° var det korrekta och valdes av mindre än två femtedelar av eleverna (39,9 %). Distraktorerna 60, 70 och 81 var lågfrekventa. Den avgörande svårigheten tycks ha varit trianglarnas orientering. Eleverna behövde kunna urskilja, att den okända vinkeln vette mot 6 cm-sidan.

I det andra problemet (M07_10) måste eleverna känna till begreppet likbent triangel.

M07_10



Två punkter *M* och *N* visas i figuren ovan. Johan söker en punkt *P* så att *MNP* blir en likbent triangel. Vilken av punkterna nedan skulle kunna vara punkt *P*?

Ⓐ (3,5)

Ⓑ (3,2)

Ⓒ (1,5)

Ⓓ (5,1)

M032294

Mindre än hälften av eleverna (48,0 %) bestämde sig för det korrekta alternativet (3, 5). Det andra svarsalternativets koordinater (3, 2) är ju en punkt, som ligger på en linje genom punkterna M och N. Detta förhållande gör, att en triangel inte kan konstrueras. Ändå valdes detta svarsalternativ av en grupp elever (16,9 %). Det tredje svarsalternativet (1, 5) var lågfrekvent valt, medan det fjärde (5, 1) valdes av något mindre än en fjärdedel av eleverna (24,1 %). Koordinaterna för denna punkt (5, 1) representerar ju ett läge, som ger en triangel dock inte likbent. Däremot skulle punkten (1, 6) också duga för konstruktion av en likbent triangel.

Svårigheten i uppgiften tycks vara att bestämma punkternas läge med koordinater samt att diskriminera ordningen mellan *x*- och *y*-koordinaterna.

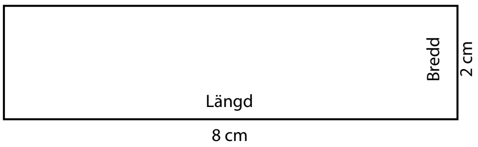
9.2.5 Begreppet rektangel

Begreppet rektangel testas i kombination med begreppen förstoring och förminskning i följande uppgift (M01_11). I deluppgift A uppmanas eleverna att ändra längdskalan på två olika sätt, ett som innebär en förminskning och ett som innebär en förstoring. Dessa förändringar orsakade uppenbara svårigheter för eleverna. Endast en dryg femtedel (22,0 %) löste uppgiften fullständigt. Ungefär lika stor andel (22,1 %) löste den delvis.

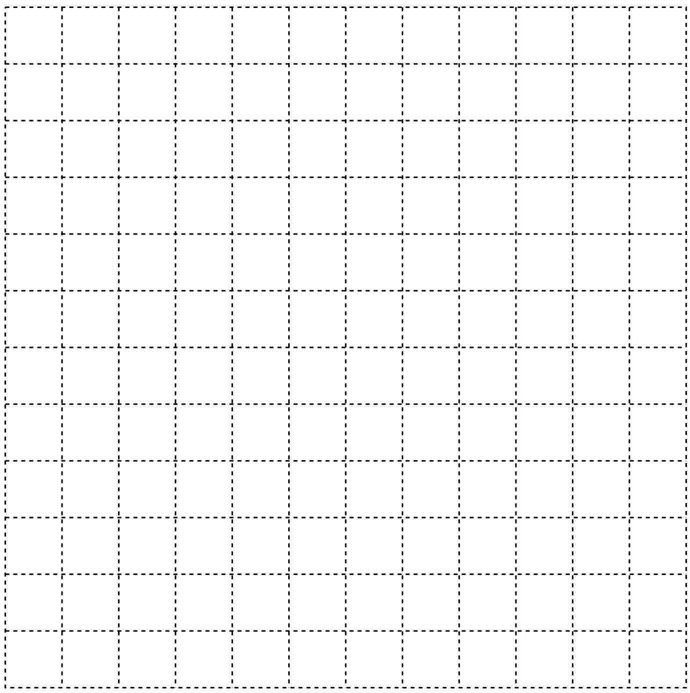
I deluppgift B skall eleverna beräkna förhållandet eller den multiplikativa relationen mellan den ursprungliga och den nya rektangelns area. Detta vållade många elever stora svårigheter och endast någon procent (1,4 %) klarade deluppgiften fullständigt.

Själva beräkningarna av areorna kan inte ha vållat några särskilda problem, då formeln för rektangelns area var direkt tillämplig. Den uppenbara svårigheten tycks istället ha varit att förstå vad ett förhållande är och därefter ange vilken area, som skall vara utgångspunkten för multiplikativa jämförelsen. En del elever relaterade inte 16 till 30 utan i stället 30 till 16, vilket enligt rättningsmallen inte ansågs vara en fullgod lösning. Enligt tidigare forskning kan förväntas, att speciella svårigheter uppstår, då elever ska göra multiplikativa jämförelser som den i deluppgift B (Greer, 1992).

M01_11



A. I rutnätet nedan ska du rita en rektangel vars längd är tre fjärdedelar av längden på rektangeln ovan och vars bredd är två och en halv gånger bredden på rektangeln ovan. Markera längden och bredden på den nya rektangeln i centimeter på figuren. Varje ruta i rutnätet är 1 cm × 1 cm.



B. Bestäm förhållandet mellan den ursprungliga rektangelns area och den nya rektangelns area.

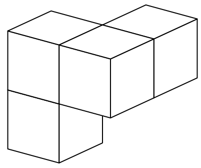
M022234

9.2.6 Tvådimensionella representationer av tredimensionella objekt

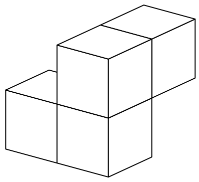
Sambandet mellan en två-dimensionell representation av tre-dimensionella objekt behandlas i detta avsnitt. En två-dimensionell representation av ett tredimensionellt objekt vrids i första uppgiften (M01_03).

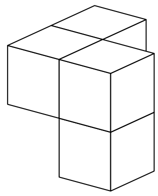
M01_03

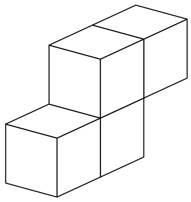
Det här föremålet ska vridas till en annan position.

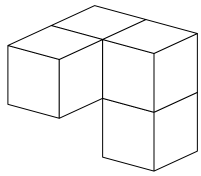


Vilket av alternativen skulle kunna vara föremålet efter att det vridits?

Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


M022049

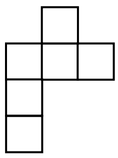
Alternativ d) är det mest frekvent valda (65,6 %) och också det korrekta. Den vanligaste valda (15,6 %) distraktorn b) var spegelbilden av objektet.

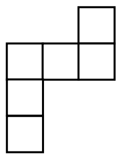
Elevernas förmåga att lösa problemet är uppenbarligen sammanlänkad med deras spatiala utveckling. Erfarenheter av detta slag av representationer spelar troligen en avgörande roll (Ryu, Chong & Song, 2007).

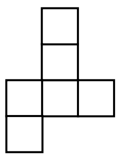
I den andra uppgiften (M02_09) frågades eleverna vilken av de två-dimensionella figurerna kan vikas ihop till en kub.

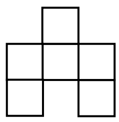
M02_09

Vilken figur kan vikas ihop till en kub?

Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


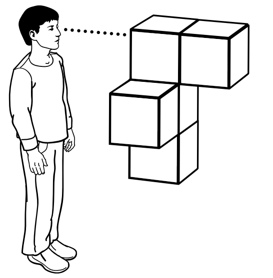
M042265

Två alternativ c) och d) var nästan lika frekventa (39,8 %, 40,2 %) av vilka det minst frekventa också var det korrekta. De två andra alternativen a) och b) var lågfrekventa.

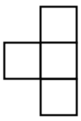
Spatiala erfarenheter är troligen av avgörande betydelse för möjligheten att lösa uppgiften (Ryu, Chong & Song, 2007).

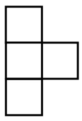
Den tredje uppgiften (M04_09) skiljde sig från den föregående. En person stod och betraktade en formation av fem kuber. Eleverna uppmanades att fundera ut, vilken av de fyra två-dimensionella projektionerna som personen såg.

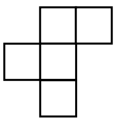
M04_09

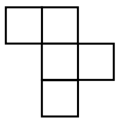


Den tredimensionella figuren består av 5 små kuber.
Vilken form ser personen på bilden?

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

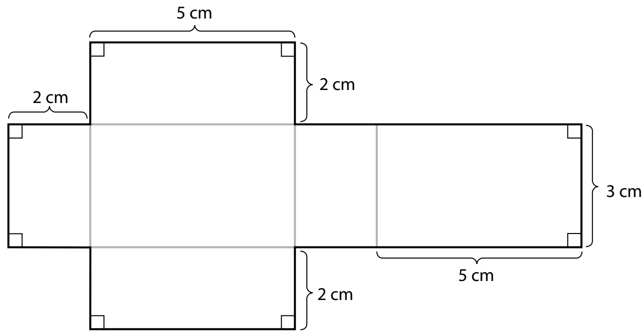
Ⓓ 

M042279

En klar majoritet av eleverna (75,9 %) löste uppgiften, vilken också testade förmågan att ta en annan persons perspektiv.

I den fjärde uppgiften (M05_04) skulle ett papper vikas för att skapa en låda.

M05_04



Om mallen ovan viks ihop, så bildas en rektangulär låda.
Vilken volym har lådan?

Svar: ________________ cm^3

M032344

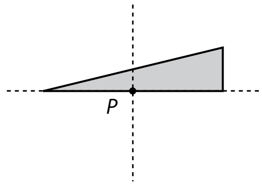
Något mer än en femtedel av eleverna (21,3 %) lyckades lösa uppgiften, jämfört med eleverna i EU/OECD-länderna, som i genomsnitt lyckades bättre (39,6 %). Resultatet på uppgiften visar på vikten av, att det i matematikundervisningen skapas tillfällen för eleverna att få spatiala erfarenheter (Ryu, Chong & Song, 2007).

9.2.7 Konforma avbildningar

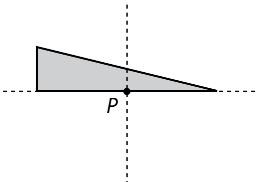
Konforma avbildningar i form av vridning runt en punkt ingår inte i kursplanens uppnåendemål för årskurs 9 i grundskolan. Dock är vridning en central del i modellen för vinkelbegreppet, som används i skolmatematiken. I testuppgift (M03_04) vrids en triangel ett halvt varv.

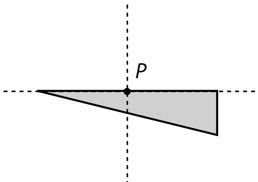
M03_04

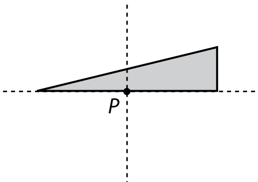
Den skuggade triangeln vrids ett halvt varv i planet runt punkten *P*.

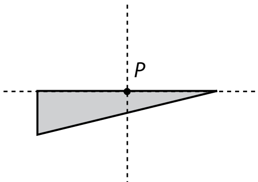


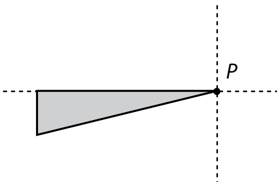
Vilket av följande alternativ visar triangeln efter vridningen?

Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


Ⓔ


M022105

Av de fyra givna alternativen var det korrekta d) det mest frekventa (54,2 %). Distraktorn a) representerade spegelbilden av triangeln i en vertikal linje och distraktorn b) i en horisontal (12,6 %, 17,8 %). Den lågfrekventa (5,0 %) distraktorn c) representerade ingen vridning alls medan distraktorn e) var resultatet av en vridning i kombination med en förflyttning (6,3 %).

Trots att vridning är en central del av vinkelbegreppets modell, så var lösningsfrekvensen förhållandevis låg.

9.2.8 Sammanfattning och slutsatser

Som har beskrivits i internationell forskning, så brukar elever förväxla de två begreppen, omkrets och area. Detta verkar också vara fallet med svenska elever.

Det kan också misstänkas, att undervisningen i matematik är mer procedurellt än konceptuellt inriktad. När formeln för beräkning av triangelns area direkt kunde tillämpas, så var lösningsfrekvensen relativt hög. Då det emellertid krävdes en begreppslig anpassning, så minskade lösningsfrekvensen markant. Kännedom om cirkelns areabegrepp består inte bara av, hur beräkningsformeln tillämpas utan också av förståelse av, hur areaenheter kan fås att täcka cirkelns yta. Exempelvis bör eleverna känna till hur många gånger större arean av en cirkel med radien *r* är jämfört med arean av en kvadrat med sidan *r*.

Beträffande den additiva karaktären på det generella areabegreppet så tycks en majoritet av eleverna vara bekant med det. Dock känner alltför många elever inte till denna egenskap hos areabegreppet.

De tre begreppsmodeller som finns för vinklar är kända för att vara besvärliga att förstå. Samtliga modeller har visserligen nackdelar, men kan ändå vara värdefulla för elevernas förståelse av vinkelbegreppet, då eleverna uppenbarligen behöver en begreppsbild att relatera sin uppfattning till.

Eleverna tycks känna till att summan av innervinklarna i en triangel är 180°. I de flesta av uppgifterna kunde detta samband tillämpas. Men det är dessutom nödvändigt att veta att ett halvt varv motsvarar 180°.

Vinklar klassificeras både med avseende på läge och på storlek. Alternatvinklar och vertikalvinklar, samt inner- och yttervinklar klassificeras utifrån sina lägen. En annan egenskap som är förknippad med läge är, att vinkeln kan vetta mot en viss sida. I en likbent triangel finns det en toppvinkel och två basvinklar. Basvinklarna är lika stora. Klassificering som gäller storleken är räta, trubbiga och spetsiga vinklar. Terminologin om dessa begrepp måste undervisas återkommande, ty omedvetenhet om dessa är den troliga orsaken till den relativt låga lösningsfrekvensen.

Också abstraktionsnivån hade ett avgörande inflytande på lösningsfrekvensen. Då abstraktionsnivån ökade, så minskade lösningsfrekvensen.

Spatiala erfarenheter i matematikundervisningen verkar vara kritiska för förståelsen och tolkningen av två-dimensionella representationer av tre-dimensionella objekt.

Begreppet vridning, som ingår i begreppsmodellen för vinklar, tycks eleverna inte behärska, då endast en mindre grupp löste testuppgiften.

Anmärkningsvärt nog så löste vissa elever ett antal uppgifter trots att dessa bedömdes brista i matchningen mot kursplanen.

Resultat – elevers exponerade beräkningsprocedurer i nationella ämnesprovet

10. Resultat – elevers exponerade beräkningsprocedurer i nationella ämnesprovet

För att ytterligare stärka validiteten i slutsatserna från TIMSS-resultaten genomfördes också en analys av 507 elevlösningar av vissa uppgifter i det nationella ämnesprovet för årskurs fem från våren 2007. Subtraktionsuppgifter hade visat sig utgöra ett problem i TIMSS-projektet, speciellt för årskurs 4. Därför analyserades lösningar av subtraktioner med och utan växling samt av subtraktioner i benämnda problemsituationer. Designen på uppgifterna i det nationella ämnesprovet var intressant. Om ett benämnt problem innehöll talen 15 och 6, så kom på sidan efter, motsvarande subtraktion men utan problemtext, 15 – 6. Eleverna tillfrågades sedan om hur de löst uppgiften genom att besvara några förtrycka alternativ. Att samma tal fanns i två skilda uppgiftskontexter gjorde det möjligt att jämföra beräkningsstrategierna och lösningarna.

Testuppgifterna representerar tre olika aspekter av beräkningar, en rörande taluppfattning och subtraktion, en rörande subtraktion utan växling samt en tredje rörande subtraktion med växling.

10.1 Taluppfattning och subtraktion

Den första uppgiften, 1000 – 2, hade hög lösningsfrekvens (92,0 %). De flesta misstagen kunde hänföras till en sammanlänkad struktur (Fuson, 1992). Eleverna hade helt enkelt inte klart för sig vilka tal som kommer omedelbart före 1000. Det vanligaste svaret var då 9998. (Se tabell 13).

Tabell 13 Kategorier som representerar elevers olika strategier vid beräkningen av 1000 – 2, årskurs 5, n = 501

Kategorier	Frekvens	Relativ frekvens (%)	Typiskt svar
Talfakta	461	92,0	998
Standardalgoritm	5	1,0	998
Stegvis beräkning	7	1,4	998
Sammanlänkad struktur	28	5,6	9998, 8
Totalt	**501**	**100,0**	

Nästa testuppgift, 15 – 6, borde eleverna kunnat lösa med hjälp av talfakta. Det visades sig, att en majoritet av eleverna kunde (82,7 %) detta, vilket visas i tabell 14. Relativt få elever misslyckades med beräkningen. Den vanligaste beräkningsstrategin, förutom talfakta, var stegvis beräkning, som ett antal elever (10,9 %) använde. Bland dessa elever förekom fingerräkning, enligt deras egen uppgift.

Den relativt höga lösningsfrekvensen (96,4 %) kan vid första anblicken verka tillfredsställande. Vid närmare eftertanke däremot så motsvarar 18 elever i ett sampel på 500 vid extrapolering till hela elevpopulationen om ca 100 000 elever, 3 600 elever. Detta betyder, att ungefär 180 klasser á 20 elever inte klarar en elementär subtraktion (15 – 6). Mot denna bakgrund måste därför kraven på lösningsfrekvenser vara mycket stora.

Tabell 14 Kategorier som representerar elevers olika strategier vid beräkningen av 15 – 6, årskurs 5, n = 504

Kategorier	Frekvens Korrekt	Frekvens Inkorrekt	Relativ frekvens (%) Korrekt	Relativ frekvens (%) Inkorrekt	Typiskt svar Korrekt	Typiskt svar Inkorrekt
Talfakta	417	6	82,7	1,2	9	-
Standardalgoritm	7	-	1,4	-	9	
Kompensationsberäkning	6	2	1,2	0,4	9	-
Talsortsvis beräkning utan växling	-	9	-	1,8	-	11
Talsortsvis beräkning med växling	1	-	0,2	-	9	-
Stegvis beräkning	55	1	10,9	0,2	9	-
Totalt	**486**	**18**	**96,4**	**3,6**		

I tabell 15 visas elevernas beräkningsstrategier, då de löste uppgiften, 17 – 8. I kategorierna finns, förutom de vanliga strategierna, också kategorin ”olika resultat”, som representerar lösningsfrekvensen på den icke benämnda uppgiften i relation till lösningsfrekvensen på den motsvarande benämnda uppgiften. Om en elevs lösning klassificeras som korrekt i tabellen, så har den inte varit korrekt i den benämnda kontexten. Har den däremot klassificerats som inkorrekt, så har den varit korrekt i den benämnda kontexten. Adderas dessa båda lösningsfrekvenser, så får vi fram det antal elever, som har exponerat inte bara korrekta utan också inkorrekta beräkningsstrategier för en och samma uppgift. I tabell 15 finns en elev, som exponerat ett inkorrekt resultat på den icke-benämnda uppgiften men exponerat ett korrekt resultat på den benämnda uppgiften.

Tabell 15 Kategorier som representerar elevers olika strategier vid beräkningen av 17 – 8, årskurs 5, n = 502

Kategorier	Frekvens Korrekt	Frekvens Inkorrekt	Relativ frekvens (%) Korrekt	Relativ frekvens (%) Inkorrekt	Typiskt svar Korrekt	Typiskt svar Inkorrekt
Talfakta	443	13	88,2	2,6	9	-
Standardalgoritm	6	-	1,2	-	9	-
Talsortsvis beräkning utan växling	-	3	-	0,6	-	11
Talsortsvis beräkning med växling	2	-	0,4	-	9	-
Stegvis beräkning	26	3	5,2	0,6	9	-
Transformationsberäkning	4	1	0,8	0,2	9	-
Olika resultat	-	1		0,2	-	-
Totalt	**481**	**21**	**95,8**	**4,2**		

Huvuddelen av eleverna i samplet (88,2 %) löste uppgiften med hjälp av talfakta. Bakom stegvis beräkning döljer sig en grupp av elever, som fingerräknade.

Beaktat resonemanget ovan, så representerar även denna förhållandevis låga frekvens av elever (4,2 %), som inte löst uppgiften, ett alltför stort antal elever, ca 4 200.

En motsvarande TIMSS-uppgift, som mätte taluppfattning, (M04_01) hade en lösningsfrekvens på jämförbar nivå. Detta förhållande stärker urvalens representativitet och studiernas validitet.

10.2 Subtraktion utan växling

I detta avsnitt behandlas två subtraktionsuppgifter, vilka inte kräver växling. Den första avser en tvåsiffrig subtraktion och den andra en tresiffrig. Den förstnämnda har något högre lösningsfrekvens, vilket är naturligt, eftersom de ingående talens storlek kan påverka svårighetsgraden.

I tabell 16 visas elevernas exponerade beräkningsstrategier, som de ter sig i lösningarna. Huvuddelen av eleverna (89,2 %) har lyckats lösa uppgiften. Det är tydligt, att standardalgoritmer ingår i undervisningen på vissa skolor. Utan beräkningar med algoritmer hade bilden troligen sett mer negativ ut, eftersom en fjärdedel av eleverna (24,1 %) löste uppgiften just med hjälp av en algoritm. Både stegvis beräkning (10,9 %) och talsortsvis beräkning (4,7 %) har blivit mer frekventa sätt att utföra beräkningen på jämfört med i tidigare testuppgifter. Kategorin ”olika resultat” visar, att det finns två elever, som båda har en korrekt version av en strategi och en inkorrekt version av en annan för beräkning av en och samma uppgift.

Tabell 16 Kategorier som representerar elevers olika strategier vid beräkningen av 57 – 34, årskurs 5, n = 503

	Frekvens		Relativ frekvens (%)		Typiskt svar	
Kategorier	**Korrekt**	**Inkorrekt**	**Korrekt**	**Inkorrekt**	**Korrekt**	**Inkorrekt**
Talfakta	248	36	49,3	7,2	23	-
Standardalgoritm	121	1	24,1	0,2	23	-
Talsortsvis beräkning utan växling	24	5	4,7	1,0	23	-
Talsortsvis beräkning med växling	-	6	-	1,2	-	17
Stegvis beräkning	55	4	10,9	0,8	23	-
Mixad beräkning	1	-	0,2	-	-	-
Olika resultat	1	1	0,2	0,2	-	-
Totalt	**450**	**53**	**89,2**	**10,8**		

Följande uppgift, som innehåller två tresiffriga tal, kräver inte heller den någon växling. I tabell 17 framgår lösningsfrekvenserna. Felfrekvenserna har ökat, vilket speciellt gäller talfakta (6,3 %), stegvis beräkning (2,8 %) samt talsortsvis beräkning med växling (1,8 %). Den sistnämnda strategin har alltså applicerats på en uppgift, som inte kräver växling, vilket leder till det typiska svaret 126.

Tabell 17 Kategorier som representerar elevers olika strategier vid beräkningen av 257 – 123, årskurs 5, n = 494

	Frekvens		Relativ frekvens (%)		Typiskt svar	
Kategorier	**Korrekt**	**Inkorrekt**	**Korrekt**	**Inkorrekt**	**Korrekt**	**Inkorrekt**
Talfakta	187	31	37,9	6,3	134	-
Standardalgoritm	175	7	35,4	1,4	134	-
Talsortsvis beräkning utan växling	26	3	5,3	0,6	134	-
Talsortsvis beräkning med växling	-	9	-	1,8	-	126
Stegvis beräkning	33	14	6,6	2,8	134	-
Transformationsberäkning	1	7	0,2	1,4	134	140
Olika resultat	-	1	-	0,2	-	-
Totalt	**422**	**72**	**85,5**	**14,5**		

Motsvarande uppgifter i TIMSS-projektet krävde alla växling, så en jämförelse är därför inte relevant (se avsnitt 8.1.3).

Den andel elever som använt standardalgoritmen för subtraktion i denna uppgift, tycks var något mer än en tredjedel (35,4 %). Utan denna grupp, som använde standardalgoritmen, så hade förmodligen lösningsfrekvensen sjunkit markant.

10.3 Subtraktion med växling

I det kommande tre testuppgifterna kräver subtraktionen växlingsförfarande. Lösningsfrekvenserna har blivit betydligt lägre utom i den sista uppgiften, vilket torde bero på de ingående talens 203 och 198 relativa närhet, vilket gör uppgiften väsentligt lättare. I tabell 18 visas lösningsfrekvenserna för olika beräkningsstrategier på subtraktionen 91 – 59. Speciellt visar det sig i uppgifter av denna karaktär, att talsortsvis beräkning utan växling tillämpas felaktigt och ger det typiska svaret 48, vilket var relativt högfrekvent (11,4 %). Men även den version av transformationsberäkning, som är avsedd för addition, användes felaktigt på subtraktioner (4,5 %) och gav ofta ett resultat några enheter från det korrekta (32) i detta fall 30.

Tabell 18 Kategorier som representerar elevers olika strategier vid beräkningen av 91 – 59, årskurs 5, n = 507

	Frekvens		Relativ frekvens (%)		Typiskt svar	
Kategorier	**Korrekt**	**Inkorrekt**	**Korrekt**	**Inkorrekt**	**Korrekt**	**Inkorrekt**
Talfakta	77	6	15,2	1,2	32	-
Standardalgoritm	160	12	31,6	2,4	32	-
Talsortsvis beräkning utan växling	-	58	-	11,4	-	48
Talsortsvis beräkning med växling	31	2	6,1	0,4	32	-
Stegvis beräkning	42	4	8,3	0,8	32	-
Mixad beräkning	2	4	0,4	0,8	32	-
Transformationsberäkning	2	23	0,4	4,5	32	30
Olika resultat	58	26	11,4	5,1	-	-
Totalt	**372**	**135**	**73,4**	**26,6**		

Det mest intressanta med tabellen är kategorin ”olika resultat”, i vilken 58 elever svarade rätt på uppgiften utan kontext, men som svarade fel på den i en benämnd kontext. Intressant är också de 26 elever, som kommit fram till ett felaktigt svar på uppgiften utan kontext men svarat korrekt på den i en benämnd kontext. Av detta framgår, att dessa 84 elever behärskar minst en beräkningsstrategi, som är korrekt, och minst en, som är inkorrekt. Enkodningsförfarande var relativt enkelt då problemsituationen var en förändring-ta-bort-situation. Detta gör att en mindre påverkan i det benämnda fallet inte kan uteslutas. Denna påverkan kan också förklara det asymmetriska resultatet. Detta motsvarar i populationen nästan 17 000 elever. Vad vi emellertid inte vet är, hur stor andel av de övriga eleverna, som har parallella beräkningsstrategier, korrekta och/eller inkorrekta.

Uppgiften 91 – 59 kan jämföras med en av testuppgifterna i TIMSS, kattproblemet (M01_08 eller itemnr M031301), som kunde enkodas med subtraktionen, 62 – 57. Båda subtraktionerna kräver växling och utgörs av tvåsiffriga tal. Emellertid är subtraktionen 62 – 57 betydligt lättare att utföra än 91 – 59 på grund av talens relativa närhet. Dock kan enkodningen av kattproblemet vållat

Tabell 19 Kategorier som representerar elevers olika strategier vid beräkningen av 151 – 126, årskurs 5, n = 503

Kategorier	Frekvens Korrekt	Frekvens Inkorrekt	Relativ frekvens (%) Korrekt	Relativ frekvens (%) Inkorrekt	Typiskt svar Korrekt	Typiskt svar Inkorrekt
Talfakta	94	12	18,7	2,4	25	-
Standardalgoritm	167	20	33,2	4,0	25	-
Talsortsvis beräkning utan växling	-	46	-	9,1	-	35
Talsortsvis beräkning med växling	28	-	5,6	-	25	-
Stegvis beräkning	54	6	10,7	1,2	25	-
Mixad beräkning	4	-	0,8	-	25	-
Transformationsberäkning	3	8	0,6	1,6	25	-
Olika resultat	39	22	7,8	4,4	-	-
Totalt	**389**	**114**	**77,3**	**22,7**		

en del svårigheter då det är en jämförelsesituation. Inte dessto mindre kan man nog dra slutsatsen att studiernas representativitet stärks av att lösningsfrekvenserna är så pass snarlika 72,0 % och 73,4 %.

I tabell 19 redovisas lösningsstrategierna vid subtraktionen av de två tresiffriga talen 151 och 126.

Lösningsfrekvensen (77,3 %) är ungefär av samma storleksordning som i föregående uppgift (73,4 %). Även den talsortsvisa beräkningsstrategin, som är felaktigt tillämpad, är relativt högfrekvent (9,1 %). Också i denna uppgift exponerar enskilda elever, att de har både korrekta och inkorrekta beräkningsstrategier (12,2 %). Så en elev kan i en viss kontext exponera en korrekt beräkningsstrategi och i en annan en inkorrekt.

Att döma av både denna uppgift och föregående uppgifter så tycks ungefär en tredjedel av eleverna vara bekanta med standardalgoritmen för subtraktion. Detta kan kasta ljus över den väldigt låga lösningsfrekvensen (20,4 %) på TIMSS-testuppgiften, M01_02 eller itemnr M031106, vilken testar just standardalgoritmen för subtraktion. Många elever har kanske helt enkelt inte lärt sig standardalgoritmen.

I tabell 20 ser bilden av lösningsfrekvenserna av subtraktionen 203 – 198 något annorlunda ut, då termerna i subtraktionen ligger relativt nära varandra, något som kan göra beräkningen lättare.

Tabell 20 Kategorier som representerar elevers olika strategier vid beräkningen av 203 – 198, årskurs 5, n = 501

Kategorier	Frekvens Korrekt	Frekvens Inkorrekt	Relativ frekvens (%) Korrekt	Relativ frekvens (%) Inkorrekt	Typiskt svar Korrekt	Typiskt svar Inkorrekt
Talfakta	261	9	52,1	1,8	5	-
Standardalgoritm	93	10	18,6	2,0	5	-
Talsortsvis beräkning utan växling	-	25	-	5,0	-	195
Talsortsvis beräkning med växling	13	2	2,6	0,4	5	-
Stegvis beräkning	44	2	8,8	0,4	5	-
Mixad beräkning	2	-	0,4	-	5	-
Transformationsberäkning	-	4	-	0,8	-	6
Olika resultat	26	10	5,2	2,0	5	-
Totalt	**439**	**62**	**87,6**	**12,4**		

Den talsortsvisa beräkningen utan växling har felaktigt tillämpats på denna subtraktion 203 – 198, där faktiskt växling krävs. Resultatet blir då väldigt avvikande, 195. En naturlig fråga att ställa är, varför inte eleverna reagerar och uppfattar detta relativt stora tal som ett orimligt svar. Detta kan belysas av den utvidgade variationsteorin, vilken innebär, att flera begreppsattribut måste uppfattas simultant för att full förståelse av till exempel talbegreppet skall föreligga. Samtidigt med beräkningsstrategin skall talens månghet, alltså placering i storleksordning på tallinjen, finnas tillgänglig för eleven. Om de olika begreppsattributen erfares separat, så sker troligen ingen reaktion på ett sådant avvikande resultat som 195.

Även vid lösandet av denna uppgift och motsvarande uppgift i benämnd kontext exponerar eleverna (7,2 %), att de samtidigt har minst en korrekt och minst en inkorrekt beräkningsstrategi.

Sammanfattningsvis kan sägas att lösningsfrekvenserna i det nationella ämnesprovet stöder representativiteten i TIMSS-studien. Att en enskild elev kan ha både inkorrekta och korrekta beräkningsstrategier samtidigt framgår tydligt av elevernas lösningar. Jämförbara resultat framkom också vid elevintervjuerna i Lilla Edet-projektet. Slutsatsen av detta är, att om en elev har lärt sig att tillämpa en beräkningsstrategi korrekt, så kan man inte vara säker på, att eleven fortsättningsvis uppvisar denna korrekta strategi. I stället kan eleven använda en inkorrekt beräkningsstrategi.

Diskussion

11. Diskussion

En sammanfattande slutsats om studiens huvudresultat kommer först att beskrivas. Därefter relateras resultatet till tidigare forskning och följs av ett avsnitt där argumentation för att studiens syfte har uppnåtts läggs fram. Olika aspekter på studiens begränsningar analyseras och redovisas i det näst sista avsnittet. Utifrån föreliggande resultat ges slutligen förslag på fortsatt framtida forskning.

11.1 Misstagens beskaffenhet – en ny insikt

Resultatet i sin helhet visar, att elever i förhållandevis liten utsträckning gör slumpmässiga räknefel. Misstagen är betydligt mer genomtänkta och bygger på att förståelsen av begrepp eller begreppsmodeller inte utvecklats tillräckligt. I många fall har de begreppsmodeller, som används i undervisningen, smala tillämpningsområden och bristfällig eller ingen funktion alls utanför dessa. Begreppsmodellerna kan också ge svag operativ vägledning speciellt utanför deras respektive tillämpningsområde. Ett exempel på detta är den så kallade objektsmodellen, som används inom algebran för att underlätta förenklingar av additiva uttryck som $2a + 3b + 3a$. Bokstäverna a och b får då representera apelsiner och bananer. Poängen är att apelsiner och bananer adderas var för sig. När modellen tillämpas utanför additiva uttryck, blir resultatet lätt inkorrekt och eleven får då ingen vägledning i, hur problemet ska lösas. Detta visade sig i en av uppgifterna, som bestod av ett multiplikativt uttryck, som skulle förenklas, $2a^2 * 3a$. Multiplikation av apelsiner saknar ju begreppslig betydelse.

Misstagen, som eleverna gör, har också visat sig bero på, att beräkningsprocedurer tillämpas i fel kontext. Det är mer sällan, att proceduren som sådan har missuppfattats. Ett exempel på detta förhållande kan vara talsortsvisberäkning, en procedur, som består av två versioner, den ena avsedd för subtraktioner utan växling och den andra för subtraktioner med växling. Eleverna använder fel version högfrekvent, mest den som är avsedd för subtraktioner utan växling på sådana som kräver växling.

En elev kan ha flera parallella uppfattningar om ett och samma begrepp, vilka ofta är kontextuellt beroende. Uppfattningarna kan vara motstridiga och oförenliga och trots detta existera sida vid sida. Exempelvis kan en och samma elev exponera uppfattningarna om variabelbegreppet som specifikt okänt tal och konkret symbolisk representation.

Det visade sig även, att en enskild elev kunde tillämpa flera olika beräkningsprocedurer på en och samma beräkning. I flera fall tillämpades beräkningsprocedurer både korrekt och inkorrekt på samma beräkning fast i två olika uppgifter, en benämnd och en icke-benämnd. Så en och samma elev uppvisade en korrekt beräkning av två tal i en uppgift i ett sammanhang och en inkorrekt beräkning av samma tal i ett annat.

En procedurell syn på matematikinlärning innebär framför allt, att elever skall läras att behärska beräkningsprocedurer. Om elever inte kunde utföra procedurer korrekt, betraktades detta som om eleven inte behärskade dem. Detta dikotomiska synsätt, korrekt eller inkorrekt utförande, innebar att diagnoser utformades med testuppgifter, vilka kunde lösas eller inte kunde lösas. Ett resultat på en diagnos visade alltså, om en elev behärskade ett moment eller inte. I några fall byggde diagnoserna på en hierarkisk förkunskapsstruktur, vilken innebar att förkunskapsbrist fokuserades som orsak till elevmisstagen. Huvudresultatet i denna studie visar emellertid, att ett fokus på enbart förkunskaper ger en otillräcklig bild av hindren i elevens matematikutveckling. Om elever till exempel tillämpar en beräkningsprocedur korrekt men i fel kontext och använder en begreppsmodell utanför dess applikationsområde, så representerar inte detta primärt en brist på förkunskaper. Elevens kunskapsutveckling är alltså mer komplex. Därför måste även andra orsaker till elevers misstag beaktas.

11.2 Elevers kunskaper i relation till olika relevanta forskningsresultat

I nedanstående avsnitt kommer kunskapsbilden, som eleverna visat, att ställas i relation till relevanta forskningsresultat. Första avsnittet rör området aritmetik och taluppfattning för årskurs fyra och andra området geometri. I det tredje avsnittet kommer området algebra i årskurs åtta att relateras och därefter geometri. I det sista avsnittet analyseras subtraktion i det nationella ämnesprovet i årskurs fem.

11.2.1 Aritmetik och taluppfattning, årskurs 4

Begreppet platsvärde testades i en uppgift genom att ental, tiotal och hundratal angetts. En grupp elever reverserade siffrorna i talet, vilket är ett fenomen känt från nationell forskning (Johansson, 2005; Bentley, 2008b).

I testningen av subtraktion exponerades flera olika misstag. Det första berör enkodning av problemtexterna. För subtraktion finns följande principiellt skilda problemsituationer, förändring ta bort, utjämna samt jämföra. Fischbein et al. (1985) menade, att det är förändring-ta-bort-situationen, som elever får lära sig och använder. Problemsituationerna utjämna och jämföra tas mera sällan upp i undervisningen. Enligt Fuson (1992) är just jämförelsesituationer svåra att enkoda. Några av testuppgifterna, som skulle enkodas, utgjordes av jämförelsesituationer. Därför hade dessa uppgifter låga lösningsfrekvenser. En uppgift hade, trots att den representerade en förändringssituation, relativt låg lösningsfrekvens. Förklaringen till detta stod inte att söka i enkodningsprocessen utan i de talområden, som behandlades i uppgiften.

Det andra misstaget rörde en uppgift med den uppställda standardalgoritmen för subtraktion. Endast en femtedel av eleverna lyckades fullborda algoritmen. Från det nationella ämnesprovet framgick, att endast ungefär en tredjedel av eleverna behärskade standardalgoritmen, något som kan kasta ljus över den låga lösningsfrekvensen på TIMSS-testet.

Ett annat från tidigare internationell forskning känt misstag är tillämpningen av den talsortsvisa beräkningsproceduren på fel kontext. Detta misstag har visat sig vara förknippat med en relativt hög felfrekvens. Resultatet på TIMSS-testet bekräftar detta. På vissa uppgifter gjorde mer än hälften av eleverna det kända misstaget att tillämpa beräkningsproceduren, som är avsedd för subtraktioner utan växling, på subtraktioner som kräver växling.

Då multiplikation testades, visade sig enkodningen också vara den stora stötestenen. Uppgifter med låg lösningsfrekvens bestod konsekvent av en typ av problemsituationer, för vilken enkla intuitiva modeller av multiplikation inte fungerade, till exempel modellen med upprepad addition. Då emellertid den modellen kunde tillämpas, så ökade lösningsfrekvensen. Resultatet speglar tidigare känd forskning (Fischbein et al. 1985). I en av uppgifterna fanns förutom en multiplikation, en subtraktiv jämförelsesituation, vilken knappt hälften av eleverna klarade att enkoda. Som beskrivits vid enkodningen av subtraktion uppfattas ett problem som svårare, då en jämförelsesituation är involverad (Fuson, 1992). Denna del av resultatet står också i överensstämmelse med forskning inom området.

Enkodningen av divisionsproblem var den avgörande svårigheten för eleverna, då division testades. När problemsituationen representerades av en innehållsdivision, sjönk lösningsfrekvensen som förväntats. Elever tillägnar sig innehållsdivision relativt sent under skoltiden enligt Fischbein et al. (1985). I ett fall påverkades dessutom lösningsfrekvensen negativt av, att det inte var möjligt att direkt tillämpa en kort divisionsuppställning på de i uppgiften ingående talen. Svenska elevers huvudsakliga svårigheter står, vad beträffar division, alltså i överensstämmelse med, vad som beskrivits i den internationella forskningen (Greer, 1992).

Vid testningen av tal i bråkform, så lyckades eleverna inte heller särskilt bra. Ett inom forskningen beskrivet misstag känt från addition av tal i bråkform är, att elever inte gör någon åtskillnad på täljare och nämnare utan adderar båda var för sig. Detta har visat sig bero på, att momenten inte belysts tillräckligt i undervisningen (Davis, 1997).

Proportionalitet innebar svårigheter för ungefär hälften av eleverna. Flera blandade ihop andel och motsvarighet men även proportionell ökning med additiv ökning. Tidigare forskning har visat på svårigheter att särskilja dessa delbegrepp (Bentley, 2008a; Hart, 1981).

Utifrån ovanstående redovisning kan konstateras, att resultatet av analysen av elevlösningar från det nationella ämnesprovet och elevlösningarna från TIMSS-uppgifterna, vad gäller taluppfattning och aritmetiska problem, harmonierar med forskningsresultat inom området.

11.2.2 Geometri, årskurs 4

Sammanblandning av begreppen area och omkrets verkar vara ett problem för svenska elever i årskurs 4. Däremot använder de summan av längden och bredden som storleksmått på rektanglar, något som syntes särskilt tydligt i en av testuppgifterna, i vilken ungefär hälften av eleverna exponerade ett sådant beteende. Som tidigare nämnts kan yngre elever använda linjära mått på arean av en rektangel, som till exempel summan av längden och bredden (Clements & Stephan, 2003). Detta alternativs höga frekvens är mer en spegling av, att undervisningen troligen inte problematiserat användningen av linjära mått för tvådimensionella egenskaper.

Även areabegreppets konservation visade sig vara problematisk med låga lösningsfrekvenser som följd. Som beskrivits i forskningsgenomgången, så gynnas inte eleverna av den procedurella inriktningen av undervisningen med numeriskt fokus (Hiebert, 1981; Douady & Perrin, 1986; Stigler & Hiebert, 1999; Patronis & Thomaidis, 2008). Beskrivningen av de två lektionerna om areabegreppet från TIMSS-videostudie i Japan och USA illustrerar tydligt skillnaden mellan ett begreppsligt och procedurellt fokus (Se avsnitt 4.3.2). Ett procedurellt fokus gör, att elever klarar uppgifter, som innebär en direkt tillämpning av inlärda beräkningsprocedurer, men misslyckas lättare då en begreppslig anpassning krävs.

Klassificeringar förknippade med trianglars egenskaper, det vill säga begreppsattribut, lyckades eleverna bra med.

Mätandets princip, att se hur många gånger en triangels yta går i en sammansatt figurs yta, utgörs av en innehållsdivision, som beskriver, hur mätetalet för arean kommer fram. Lösningsfrekvenser, som rörde dessa uppgifter, var relativt låga, något som harmonierar med forskning om innehållsdivision (Greer, 1992).

Spatial förmåga testades med en tvådimensionell representation av ett tredimensionellt objekt. Ungefär hälften av eleverna löste uppgiften. Från internationell forskning är känt, att denna förmåga utvecklas förhållandevis sent, om inte speciell träning med till exempel datorprogram förekommer. Ryu, Chong och Song (2007) fann, att även begåvade barn hade svårigheter att utveckla denna förmåga.

Vridningar, som är en central del i en av modellerna för vinkelbegreppet, behärskade ungefär en tredjedel av eleverna, vilket överensstämmer med kända resultat om svårigheter att förstå vinkelbegreppet. Själva vridningen tycks vara den verkliga stötestenen. Foxman och Ruddock (1983) rapporterade, att bara 4 % av de 15-åringar, som undersöktes, spontant nämnde vridning, då de skulle beskriva vinkelbegreppet. Speglingar och symmetri hade dubbelt så hög lösningsfrekvens. Inga speciella svårigheter kring dessa företeelser finns beskrivna i den internationella forskningen.

Huvuddelen av de misstag, som svenska elever gjorde på avsnittet geometri, har tidigare beskrivits i den internationella forskningen och därför får analysresultatet anses stå i överensstämmelse med denna.

11.2.3 Algebra, årskurs 8

I testuppgifterna avseende ekvationslösning visade det sig, att elevernas förståelse av likhetstecknet hade stor betydelse för deras möjligheter att lösa ekvationer med *x*-termer i båda led. Alltför få elever tycktes ha utvecklat den statiska uppfattningen, ett förhållande som står i överensstämmelse med forskningen inom området (Ginsburg, 1977; Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Kieran, 1981; Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Carpenter, Franke & Levi, 2003).

Eleverna lyckades förhållandevis bra med additiva förenklingar av uttryck, då den så kallade objektsmodellen kunde tillämpas direkt. Då multiplikativa uttryck skulle förenklas emellertid, så kan inte denna enkla modell tillämpas, något som ledde till låga lösningsfrekvenser. Detta resultat harmonierar med tidigare forskning (Küchemann, 1981; Wagner, 1983; Booth, 1984; Philipp, 1992; MacGregor & Stacey, 1997; Bentley, 2008a).

Då funktionsbegreppet, formler och ekvationer med två obekanta, testades fick elevers uppfattningar av variabelbegreppet en avgörande betydelse. Eftersom kontexten bestämmer begreppets betydelse, är det särskilt viktigt, att det uppfattas på avsett sätt. I en funktionskontext skall variabeln förstås som ett generaliserat tal. I vissa uppgifter, vilka inte är fria för publicering, visade det sig, att flera sätt att missuppfatta variabelbegreppet var vanliga. Missuppfattningar av detta slag kan förklara den låga lösningsfrekvensen på uppgifter, vilka testar funktionssamband. Detta är ett förhållande, som redovisats i forskningen (Küchemann, 1981; Wagner, 1983; Booth, 1984; Philipp, 1992; MacGregor & Stacey, 1997; Bentley, 2008a).

I en uppgift, där ingen variabelbeteckning förekom, var abstraktionsnivån låg. Detta fick till följd, att lösningsfrekvensen blev relativt hög.

En av testuppgifterna bestod av en multiplikativ jämförelsesituation och en av en subtraktiv jämförelsesituation. Båda uppgifterna hade låga lösningsfrekvenser. Enligt internationell forskning är det sannolikhet att dessa principiella problemsituationer inte behandlats i undervisningen och därför kan det förklara resultatet (Fischbein et al., 1985; Fuson, 1997).

De återstående testuppgifterna, varav en berör olikheter, bedöms inte ligga inom ramen för uppnåendemålen i matematik för åldersgruppen.

11.2.4 Geometri, årskurs 8

Begreppen omkrets och area för kvadrat och cirkel blandade eleverna i årskurs 8 ihop. Detta står i överensstämmelse med forskning inom området (Clements & Stephan, 2003).

Den procedurella inriktningen av undervisningen av areabegreppet i västländerna (Stigler & Hiebert, 1999) leder lätt till, att formeln för area i princip endast kan tillämpas om de tal, som skall användas i formeln, direkt finns tillgängliga i problemtexten. Krävs en begreppslig anpassning för att få fram dessa tal, så försvåras tillämpningen. En av testuppgifterna var av denna beskaffenhet, då höjden i triangeln inte explicit var given. Det visade sig därför, att lösningsfrekvensen blev förhållandevis låg. I en andra uppgift var förutom en procedurell tillämpning även en begreppslig tillämpning möjlig, vilket dock inte tycks ha upptäckts av alla elever. Den begreppsliga lösningen bestod i, att ett rutnät medgav, att arean kunde bestämmas genom att rutorna räknades. Då denna möjlighet inte upptäcktes, blev lösningsfrekvensen låg.

Även areabegreppets additiva karaktär behärskades av en alltför liten grupp elever. Endast hälften av eleverna kunde dela in en given figur i andra figurer, vars areor var möjliga att beräkna. Erfarenheter av areabegreppets additiva egenskap är central för elevernas möjligheter att förstå och tillämpa denna egenskap operationellt (Chick & Baker, 2005).

Vinkelbegreppet var ett av de begrepp, som testades ovanligt frekvent. Begreppsmodellen är avgörande för förståelsen av vinkelbegreppet och spelar därför en viktig roll för de olika uppgifternas lösningar (Mitchelmore & White, 2000). Klassificering med avseende på position och storlek av olika typer av vinklar ingick i flera testuppgifter. Dock kan konstateras att en avgörande förutsättning för att uppfatta dessa klassificeringar är, att modellen för vinkelbegreppet uppfattats på korrekt sätt. Vinkelsumman i en triangel, 180° var den matematiska sats, som användes mest frekvent i uppgifterna. Den tycktes också eleverna behärska.

Elevers spatiala förmåga testades med hjälp av tolkning av en tvådimensionell representation av ett tredimensionellt objekt. Erfarenheter av sådana representationer spelar troligen en avgörande roll för elevers möjligheter att lösa motsvarande testuppgifter (Ryu, Chong & Song, 2007). De förhållandevis låga lösningsfrekvenserna bekräftar resultaten från forskningen inom området.

Trots att vridningar är en central del i den modell av vinkelbegreppet, som används i skolmatematiken, så löste en förhållandevis liten grupp elever motsvarande testuppgift. Detta är något som står i överensstämmelse med tidigare forskning, som visar att begreppet tillägnas relativt sent under skoltiden (Foxman & Ruddock, 1983; Mitchelmore & White, 1998).

11.2.5 Subtraktion i det nationella ämnesprovet, årskurs 5

Elevlösningarna från nationella ämnesprovet i årskurs fem avseende subtraktion kunde indelas i tre olika områden. I det första området testades taluppfattning med hjälp av enkla subtraktionsuppgifter, vilka löstes med relativt höga frekvenser. Motsvarande uppgifter i TIMSS-projektet hade också lösts med ungefär lika höga frekvenser, ett faktum som säkrade representativiteten. För talområden med mindre tal hade eleverna utvecklat talfakta, vilket också befanns vara fallet med eleverna i Lilla Edet-projektet (Bentley, 2000b).

Det andra området rörde subtraktioner utan växling. De två uppgifter, som testades, löste eleverna högfrekvent, vilket också står i överensstämmelse med resultatet i Lilla Edet-projektet. I TIMSS-testet fanns inga subtraktionsuppgifter utan växling.

Det tredje området rörde subtraktioner, som krävde växlingsförfarande. Lösningsfrekvenserna visade, att ungefär en fjärdedel av eleverna inte klarade att lösa uppgifterna. Detta kan tyckas som en liten andel, men om den extrapoleras till motsvarande elevpopulation, så svarar en fjärdedel mot ca 25 000 elever. I det nationella ämnesprovet och i TIMSS-testet finns en principiellt likadan tvåsiffrig subtraktionsuppgift, som kräver växling. Eftersom de båda uppgifternas lösningsfrekvenser var mycket lika 72,0 % respektive 73,4 % stöder detta urvalens representativitet i både det nationella ämnesprovet och i TIMSS-testet.

I analysen av det nationella ämnesprovet återfanns misstaget, felaktig tillämpning av talsortsvis beräkning, som Foxman och Beiszhusern (2002) tidigare hade redovisat.

Att en och samma elev exponerade både korrekta och inkorrekta beräkningsprocedurer på en och samma uppgift fast i olika kontexter verkar endast tidigare vara känt från studien i Lilla Edet (Bentley 2008b).

11.3 Har syftet med studien uppnåtts?

Den första delen av syftet var att beskriva elevers lösningsstrategier av de inom TIMSS-projektet frisläppta uppgifterna i årskurserna 4 och 8 samt av de insamlade elevlösningarna av det nationella ämnesprovet i årskurs 5. Elevernas lösningsstrategier från de båda projekten har redovisats i de olika resultatavsnitten. Dessutom har de analyserats för att den andra delen av syftet skall kunna uppnås, nämligen att belysa vilken förståelse av centrala matematiska begrepp och vilken tillämpning av beräkningsprocedurer, som ligger bakom dessa elevers exponerade lösningsstrategier. Genom analysen och dess koppling till olika relevanta forskningsresultat kom det alltså fram vilken förståelse av matematiska begrepp och tillämpning av procedurer, som låg bakom elevernas lösningsstrategier. Det finns alltså en mångfacetterad beskrivning av elevers kunskaper i matematik avseende både årskurs 4 för områdena aritmetik, taluppfattning och geometri och årskurs 8 för områdena algebra och geometri. Denna beskrivning har, som redovisats i första avsnittet, visat sig vara delvis annorlunda jämfört med forskningsresultat på området.

11.4 Studiens begränsningar

Vad beträffar studiens reliabilitet, så görs testuppgifterna speciellt inom TIMSS under mycket kontrollerade former. Som tidigare redovisats förekommer tre olika typer av testuppgifter, uppgifter med flervalsalternativ, uppgifter med krav på endast svar samt uppgifter med krav på redovisning av fullständiga lösningar.

Uppgifter med flervalsalternativ innebär oftast inga svårigheter vid bedömningen mer än undantagsvis, då fler än ett alternativ kan ha kryssats i. Då skall enligt bedömningsmallen positiv bedömning tillämpas. Detta innebär, att om det korrekta alternativet är ikryssat tillsammans med ytterligare alternativ, så accepteras det korrekta endast, om det andra alternativet är av sådan beskaffenhet, att det inte tydligt visar, att eleven exponerar en förståelse, vilken motsäger den förståelse, som krävs för att välja det korrekta alternativet. Uppskattningsvis rör detta tio elevlösningar.

Uppgifter med krav på endast svar bedömdes huvudsakligen utifrån rätt eller fel. I vissa uppgifter klassificerades även olika feltyper dock endast utifrån, vilket svar som eleven angivit. Här fanns mycket lite utrymme för subjektiv bedömning.

För uppgifter med krav på redovisning av fullständiga lösningar eller krav på endast svar tillämpades medbedömarprincipen. Likheten i bedömningarna är ett mått på interbedömarreliabiliteten. Den var för årskurs fyra, 98 % och för årskurs nio, 97 %, vilka får anses som mycket höga.

Bedömningarna, som nämnts ovan, ligger till grund för den statistiska redovisningen. Förutom dessa bedömningar har också ett antal elevlösningar analyserats i sin helhet för att skapa en bild med högre precision av beskaffenheten av enskilda elevers kunskaper. Denna analys av elevlösningar, dels avseende TIMSS-projektet och dels avseende det nationella ämnesprovet påverkar inte denna studies reliabilitet, eftersom data utgörs av de insamlade elevlösningarna. Analysen av elevdata ingår istället i validitetsbedömningen.

Konstruktionsvaliditet beskriver i vilken grad som elevlösningarna var möjliga att kategorisera, och som de skapade kategorierna täcker elevlösningarna. Eftersom endast exponerad förståelse av begrepp och tillämpning av beräkningsprocedurer studerats, har en bristfällig elevlösning setts som icke fullt exponerad förståelse eller tillämpning. Sådana bristfälliga elevlösningar har redovisats som icke-kategoriserade. Detta gör att innehållsvaliditeten kan ses som hög då exponerade elevlösningar studerats.

Extern validitet beskriver i vilken grad resultatet är generaliserbart till populationen som helhet. Eftersom antalet elever ur de båda TIMSS-samplen, årskurs fyra och åtta, som studerats är något över 40 % av hela samplet, så är detta på gränsen till, vad man skulle kunna acceptera för att generalisera resultatet till hela elevpopulationen i årskurserna. Om däremot TIMSS-resultatet visar sig harmoniera med annan forskning samt med resultatet från det nationella ämnesprovet, så kan slutsatser för hela elevpopulationen dras med större säkerhet. Det förhåller sig också så, att de delar av resultatet, som utgörs av väldigt tydliga trender, kan med större säkerhet extrapoleras till populationen.

Givetvis hade det varit önskvärt med ett ännu större antal elevlösningar, som hade kunnat analyseras. Då hade säkerheten i slutsatserna ökat. Ett sådant större antal elevlösningar skulle dock inte ha varit möjligt att analysera inom den givna tidsramen.

11.5 Förslag på framtida forskning

Eftersom det nationella ämnesprovet genomförs varje läsår, skulle det genom att förändra vissa uppgiftstyper vara möjligt att få en mer detaljerad bild över elevers matematiska kunskaper. Det skulle då vara lämpligt att samla in en betydligt större andel elevlösningar än vad som gjorts hittills. Storleksordningen 5 000 elevlösningar skulle göra att slutsatser om populationen skulle blir relativt säkra. Viss användning av uppgifter med flervalsalternativ skulle kunna förenkla bedömningen. Flervalsalternativen skulle på samma sätt, som görs inom TIMSS-projektet, kunna spegla kända sätt att missförstå begrepp och tillämpningar av beräkningsprocedurer i fel kontexter. Men även fullständiga elevlösningar är viktiga att analysera. Inte bara elevlösningar från det nationella ämnesprovet i årskurs 5 utan också i årskurs 9 skulle studeras. Inte minst är området algebra intressant, då svenska elever presterar särskilt svagt där.

Även TIMSS-materialet från några andra länder skulle kunna kasta extra ljus över den svenska resultatbilden. Skiljer sig karaktären på elevers misstag åt på väsentliga punkter eller är likheterna slående. En intressant utgångspunkt för analysen skulle kunna vara att jämföra procedurellt och konceptuellt inriktad undervisning och se vilka skillnader gentemot denna studies bild av elevkunskapernas beskaffenhet, som kan komma fram.

Eftersom lärares användning av begreppsmodeller är ett avgörande inslag i denna studies resultat, så borde denna användning studeras mer ingående. I några exempel har elever tillämpat en begreppsmodell utanför dess applikationsområde med misslyckat resultat som följd. Så ett fokus skulle kunna vara att studera hur applikationsområdena behandlas i undervisningen och i läromedel. Ett annat fokus skulle kunna vara att studera, om flera modeller används samtidigt och om eleverna då kan hålla isär dem eller vad konsekvenserna blir för deras begreppsuppfattning.

Implikationer för undervisningen

12. Implikationer för undervisningen

I de olika avsnitten nedan redovisas en sammanfattning av de hinder, som har visat sig finnas för elevers matematikutveckling. I första avsnittet behandlas förutom elevers taluppfattning och enkodning av de principiella problemsituationerna också den procedurellt inriktade geometriundervisningen i årskurs fyra. I avsnitten därefter tas med avseende på årskurs åtta upp vikten av befästa kunskaper i aritmetik för förståelse av algebran samt poängen med en mer begreppsligt inriktad geometriundervisning.

12.1 En befäst taluppfattning samt förmåga att enkoda de principiella problemsituationerna

Elevers taluppfattning och beräkningsprocedurer har inte utvecklats tillräckligt. Speciellt problematiskt visade sig det vara med subtraktioner som kräver växlingsförfarande. Alla tre studierna visade på samma resultat i detta avseende. En enskild elev kan ha, visade det sig, flera parallella beräkningsprocedurer, av vilken någon kan vara inkorrekt eller tillämpas inkorrekt. Men samma elev kan också ha korrekta strategier, som tillämpas korrekt. Om eleven skall kunna utveckla talfakta, vilket innebär en optimerad användning av arbetsminnet, så måste inkorrekta strategier rensas ut. Detta kan illustreras med ett exempel. Om fem plus tre ibland blir sju, ibland åtta och ibland kanske nio så finns ingen bestämd kombination att lagra i arbetsminnet. Eleverna måste därför få tillfälle att tillsammans med läraren och kamraterna diskutera matematik, få bekräftelse på, att han eller hon har förstått något korrekt. Om eleverna är hänvisade enbart till läromedlen, så visar analysen i Lilla Edet-projektet, att läromedlen inte alltid beskriver beräkningsstrategierna korrekt eller på ett lämpligt sätt.

Det som troligen händer idag är, att eleverna under de tidiga åren i grundskolan övar in felaktiga strategier och fortsätter att använda dessa strategier, vilka därmed befästs alltmer under flera skolår. De elever som klarar uppgifterna bäst tycks vara de, som också behärskar standardalgoritmerna för de fyra räknesätten.

Enkodning av problemtext till matematiska modeller tycks vara ett relativt stort problem. Det finns anledning att anta, att de principiellt olika problemsituationer, som enkodas med addition, subtraktion, multiplikation och division, inte har belysts systematiskt i undervisningen. Jämförelsesituationen, som leder till subtraktion, är sannolikt inte behandlad i undervisningen med tanke på den låga lösningsfrekvensen på denna typ av uppgifter. De olika problemsituationerna är inte så många, sex i addition och subtraktion tillsammans samt fyra i multiplikation och division. Enkodningen av problemsituationerna innefattar också begreppen fördelningsdivision och innehållsdivision. Dessa två typer av division tycks ha varit den stora svårigheten för eleverna. I testuppgifter, vilkas enkodning resulterade i innehållsdivision, var lösningsfrekvensen låg, medan i testuppgifter vilkas enkodning resulterade i fördelningsdivision, var frekvensen högre, dock inte över 70 %.

Ett systematiskt studium av dessa olika typer av problemsituationer kan antagligen dramatiskt förbättra elevresultaten.

Av studiens resultat att döma så har tal i bråkform, trots att de ingår som en del i uppnåendemålen i kursplanen i årskurs 5, inte tagits upp i undervisningen fram till vårterminen i årskurs 4 då TIMSS genomfördes. Detta bekräftas av, att inte ens hälften av eleverna löste denna typ av uppgifter.

12.2 Bort från den procedurinriktade geometriundervisningen

Först är det viktigt att konstatera, att en elev kan ha flera parallella uppfattningar av samma begrepp. Bland dessa uppfattningar kan också finnas rena missuppfattningar, som i vissa situationer kan leda eleven fel. Diskussioner gemensamma för klassen ledda av läraren kan ge elever möjligheter att förbättra och utveckla sina uppfattningar och att få de korrekta bekräftade. Om detta genomförs, så försvinner missuppfattningarna efterhand och de korrekta uppfattningarna blir kvar. (Spitze, M., 1996)

Undervisningens procedurella inriktning i västländerna kan vara en bidragande orsak till låga lösningsfrekvenser, speciellt när sammanhanget är något ändrat i förhållande till, vad eleverna är vana vid. Eftersom begreppslig kunskap kan generera procedurell kunskap och procedurell kunskap bara undantagsvis kan generera begreppslig, så finns mycket att vinna på att försöka inrikta undervisningen åt mer begreppslig inlärning (Rittle-Johnson & Wagner Alibali, 1999). Lärare måste därför lära sig olika begreppsinlärningsteorier, vilka också har sin grund i hjärnforskningen. De två avgörande huvudteorierna är ”theory revision” och ”redescription” (Bentley, 2008a).

Uppfattningen av areabegreppet är central inom området geometri. Begreppet förväxlas ofta med omkrets. Areabegreppets konservation och additiva egenskaper behöver eleverna få talrika erfarenheter av. Den internationella forskningen visar också, att vår procedurella inriktning av undervisningen, då beräkningsformler memoreras och övas, inte leder till någon särskild matematisk förståelse av areabegreppets egenskaper. Ett positivt resultat tycks emellertid vara, att eleverna bemästrar och har förstått mätandets matematiska idé.

Elevernas spatiala förmåga testades med hjälp av tvådimensionella representationer av tredimensionella objekt. Det är ett känt faktum att denna förmåga utvecklas relativt sent i skolåldern, vilket också bekräftades av lösningsfrekvensen. I en del andra länder används datoranimationer för att träna elevers spatiala förmåga, vilket enligt internationell forskning tycks ge goda resultat.

Trots att vridningar är en central del av de modeller av vinkelbegreppet, som används i grundskolan, klarade knappt hälften av eleverna uppgifter som rörde vridningar. Frågan man kan ställa sig är, om lärare är bekanta med de tre olika modeller, som finns för vinkelbegreppet, samt om de känner till de olika svagheter dessa modeller har.

12.3 Befästa aritmetiska kunskaper – ett måste för förståelse av den formella algebran

De flesta elever har fortfarande i årskurs 8 den dynamiska och inte den statiska uppfattningen av likhetstecknet, vilket kan göra ekvationers lösningsprocedurer inte bara besvärliga utan också direkt omöjliga. Den statiska uppfattningen, som behövs för ekvationslösning, kan lätt tränas med luckövningar av typen $5 + 3 = \square - 4$.

Om elevers aritmetiska kunskaper är bristfälliga, så finns inga förutsättningar att förstå den formella algebran. I stället för att utgå från aritmetiska strukturer så tycks många lärare använda objektsmodellen vid förenklingar av algebraiska uttryck. Tyvärr är modellens tillämpningsområde snävt och gäller bara additiva förenklingar. Detta innebär, att eleverna blir helt utslagna, då de får en multiplikativ förenkling.

En annan knepig situation för eleverna är substitution av negativa tal, vilket frekvent tycktes ge inkorrekta svar. En majoritet av eleverna trodde till exempel att även om $b = -1$ så är också $-b = -1$.

Det utan tvekan största problemet är emellertid elevernas förståelse av variabelbegreppet. Många testuppgifter blev extra svåra att lösa beroende på, att de inblandade variablernas betydelse inte förstods korrekt. Eleverna exponerade vanliga sätt att missförstå variabelbegreppet, såsom icke-symbolisk representation, sifferrepresentation, additiv representation samt konkret objektsrepresentation. Dessutom hade eleverna svårigheter att identifiera de två sätten att förstå variabeln, som tillhör kategorierna speciellt okänt tal och generaliserat tal, med hjälp av kontexten. Vanligen uppfattade eleverna variabeln, som ett speciellt okänt tal och inte som ett generaliserat tal.

Som har beskrivits i forskningsöversikten (se avsnitt 2.2) så kan elever ha ett antal olika sätt att förstå ett begrepp, ibland kontextuellt betingade. Variabelbegreppet är inte något undantag i detta avseende. Det som beskrivits här är de sätt att förstå, som eleverna indirekt har exponerat i sina lösningar av uppgifterna. Det betyder inte nödvändigtvis, att eleverna saknar korrekt förståelse. Men de tycks däremot omedvetna om, när en viss uppfattning skall tillämpas.

Elevers olika uppfattningar om variabelbegreppet borde vara ett centralt fortbildningsinnehåll för lärare i grundskolans senare årskurser. Rättas inte problemen med variabelbegreppet till i grundskolan kan problemen bli än större i gymnasieskolan, speciellt vad beträffar förståelsen av begreppen funktioner och grafer.

12.4 Begreppsligt inriktad geometriundervisning

Inte bara i årskurs fyra utan också i årskurs åtta brukade eleverna förväxla de två begreppen, omkrets och area, ett faktum känt från internationell forskning.

Den additiva karaktären av det allmänna areabegreppet tycks en majoritet av elever vara bekant med. Dock behärskar alltför många elever i årskurs åtta inte detta.

När formeln för beräkning av triangelns area kunde appliceras direkt, så var lösningsfrekvensen relativt hög, men när det erfordrades en begreppslig anpassning, så minskade lösningsfrekvensen. Kännedomen om cirkelns areabegrepp består inte bara av formeln utan också av förståelsen om, hur areaenheter kan fås att täcka cirkelns yta. Till exempel måste en elev känna till hur många gånger större arean av en cirkel med radien r är än en kvadrat med sidan r. Den strikt procedurella inriktningen skapar problem för eleverna.

De begreppsmodeller, som finns för vinklar, är också internationellt kända för att vara besvärliga att förstå. De tre modellerna har alla sina nackdelar. Men eleverna behöver uppenbarligen någon begreppslig bild att relatera sina uppfattningar till. Emellertid tycks eleverna känna till, att summan av innervinklarna i en triangel är 180°, men färre elever känner till att ett halvt varv motsvarar 180°.

Vinklar klassificeras både med avseende på läge och på storlek. Vertikalvinklar, alternatvinklar, samt inner- och yttervinklar är begrepp, som har med vinkelns läge att göra. En annan egenskap, som är förknippad med läge är, att vinkeln kan vetta mot en viss sida. I en likbent triangel finns det en toppvinkel och två basvinklar. Basvinklarna är lika stora. Klassificering, som gäller vinkelns storlek, rör räta, trubbiga och spetsiga vinklar. Terminologin om dessa begrepp måste undervisas återkommande, eftersom omedvetenhet om dessa är den troliga orsaken till den relativt moderata lösningsfrekvensen.

Spatiala erfarenheter i matematikundervisningen verkar vara kritiska för förståelsen och tolkningen av två-dimensionella representationer av tre-dimensionella objekt. Såsom påpekats i redovisningen av årskurs fyras geometriavsnitt, så används datoranimeringar med gott resultat i en del länder för att träna elevers utveckling av spatial förmåga.

Den huvudsakliga sammantagna anledningen till elevresultaten är, att eleverna i alltför många klasser är utelämnade till sig själva och till läroboken. Härigenom får de inte möjlighet att bearbeta sina kunskaper för att få nödvändiga bekräftelser. Om en och samma elev har både korrekta och inkorrekta procedurer samt både korrekta och inkorrekta uppfattningar av begrepp, så måste de korrekta bekräftas så att de inkorrekta så småningom kan försvinna. Om inte detta sker, befäster eleven också de inkorrekta procedurerna och uppfattningarna om begrepp.

Undervisningen skulle säkert också vinna på att inriktas mer på begreppslig kunskap.

Referenser

13. Referenser

Adams, J., W. & Hitch, G., J. (1998). Children's Mental Arithmetic and Working Memory. In *The Development of Mathematics Skills*, Donlan, C., (Ed.), Studies in Developmental Psychology. London: Psychology Press.

Af Ekenstam, A. & Greger, K. (1983). Some Aspects of Children's Ability to Solve Mathematical Problems. *Educational Studies in Mathematics*. No. 14, pp. 369–384.

Arzt, A. & Armour-Thomas, E. (1999). A Cognitive Model for Examining Teachers' Instructional Practice in Mathematics: A Guide for Facilitating Teacher Reflexion. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 40, pp. 211–235.

Baddeley, A., D. (1986). *Working Memory*. Oxford, UK: Oxford University Press.

Baddeley, A., D. & Hitch, G., J. (1974). Working Memory. In *The Psychology of Learning and Motivation*. Bower, G. (Ed.), Vol. 8, pp. 47–90.

Behr, M., Erlwanger, S. & Nichols, E. (1980). How Children View the Equals Sign. *Mathematics Teaching*, No. 92, pp. 13–15.

Bell, A., Fischbein, E. & Greer, B. (1984). Choice of Operation in Verbal Arithmetic Problems: The Effect of Number Size, Problem Structure and Context. *Educational Studies in Mathematics*. No. 15, pp. 129–147.

Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R., T. (1988). *American Educational Research Journal*, Vol. 25, No. 1, pp. 51–71.

Bentley, C., G. (2002). *The Roots of Variation in English Teaching*. Göteborg, Studies in Educational Sciences, 176. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Bentley, P-O. (2008a). *Mathematics Teachers and Their Conceptual Models. A New Field of Research*. Göteborg, Studies in Educational Sciences, 265. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Bentley, P-O. (2008b). Pupils' Arithmetic Knowledge and the Procedural Models in their Teaching. (In Press).

Booth, L, R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. New Winsor, Berkshire, England: NFER-Nelson Publishing Co.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Chick, H., L. & Baker, M., K. (2005). In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2, pp. 249–256. Melbourne: PME.

Clements, D., H. & Stephan, M. (2003). Measurement in PreK-2 Mathematics. In *Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics*. Clements, D,. H., Sarama, J. & DiBiase, A-M. (Eds.) Lawrence Erlbaum Assoc Inc.

Close, G., S. (1982). *Children's Understanding of Angle at the Primary/Secondary Transfer Stage*. Polytechnic of the South Bank, London.

Cuneo, D. (1980). A General Strategy for Quantity Judgements: The Height + Width Rule. *Child Development*. No. 51, pp. 299–301.

Davis, B. (1997). Listening for Differences: An Evolving Conception of Mathematics Teaching. *Journal of Research in Mathematics Education*. Vol. 28, No. 3, pp. 355–376.

DeStefano, D., & LeFevre, J-A. (2004). The Role of Working Memory in Mental Arithmetic. *European Journal of Cognitive Psychology*. No. 16(3), pp. 353–386.

Douady, R. & Perrin, M-J. (1986). Concerning Conceptions of Area (pupils aged 9 to 11). *Proceedings of PME 10*, London, 253–258.

Falkner, K. P., Levi, L. & Carpenter, T. P. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics*, No. 6(4), pp. 232–236.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, No. 16, pp. 3–17.

Foxman, D., & Ruddock, G. (1984). Concepts and Skills: Line Symmetry and Angle. *Mathematics in Schools*, March 1984, 9–13.

Foxman, D., & Beishuizen, M., (2002). Mental Calculation Methods Used by 11-Year-Olds in Different Attainment Bands: A Reanalysis of Data from the 1987 APU Survey in the UK. In *Educational Studies in Mathematics*, 51 pp. 41–69.

Freudenthal, (1973). *Mathematics as an educational task*. Riedel, Dordrecht.

Fuson, K., C. (1992). Addition and Subtraction. In Grouws, D., A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillian Publishing Company.

Fuson, K., C., Wearne, D., Hiebert, J., C., Murray, H., G., Human, P., G., Carpenter, T., P., & Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structure for Multi-Digit Numbers and Methods of Multi-Digit Addition and Subtraction. In *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, pp. 130–162.

Gelman, R. & Gallistel, C., R. (1978). *The Child's Understanding of Number*. London: Harvard University Press.

Ginsburg, H. (1977). *Children's Arithmetic*. New York: Van Nostrand.

Graeber, A., O., Tirosh, D. & Glover, R. (1989). Preservice Teachers' Misconceptions in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*. No. 20, pp. 324–345.

Greer, B. (1992). Multiplication and Division as Models of Situations. In Grouws, D., A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillian Publishing Company.

Hart, K., M. (1981). Ratio and Proportion. In Hart, K., M. (Ed.) *Children's Understanding of Mathematics*: 11–16, London: John Murray.

Hiebert, J. (1981). Units of Measure: Results and Implications from National Assessment. *Arithmetic Teacher*, 28 (6), 38–43.

Johansson, B., S. (2005). Numeral Writing Skill and Elementary Arithmetic Mental Calculations. *Scandinavian Journal of Educational Research.* Vol. 49, No. 1, pp. 3–25.

Kaput, J. (1985). *Multiplicative Word Problem and Intensive Quantities: An Integrated Software Response.* (Technical Report 85-19). Cambridge, MA: Harvard University, Educational Technology Centre.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, No. 12, pp. 317–326.

Klein, A., S. & Beishuizen, M. (1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic Versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, pp. 443–464.

Kordaki, M. & Potari, D. (1997). *Children's Approaches to Area Measurement through Different Contexts.* Manuscript submitted for publication.

Krainer, K. (1989). *'Lebendige Geometrie: Überlegungen zu einem integriven Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffs'* [Living Geometry: Deliberations on a Comprehensive Understanding of Geometry Teaching as Exemplified by the Angle Concept], Lang, Frankfurt.

Küchemann, D., E. (1981). Algebra. In Hart, K., M. (Ed.) *Children's Understanding of Mathematics*: 11–16, London: John Murray.

Lindahl, M. (1996). *Inlärning och erfarande. Ettåringars möte med förskolans värld.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Lo, J.-J., Gaddis, K., and Henderson, D. (1996) 'Building upon Student Experience in a College Geometry Course', *For the Learning of Mathematics*, 16(1), 34–40.

Logie, R., H. (1995). *Visual-Spatial Working Memory.* Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates Ltd.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' Understanding of Algebraic Notation. *Educational Studies in Mathematics.* No. 33. pp. 1–19.

Mangan, C. (1986). *Choice of Operation Multiplication and Division Word Problems.* Unpublished Doctorial Dissertation, Queen's University, Belfast.

Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande.* Lund: Studentlitteratur.

Mitchelmore, M. C. (1989) 'The Development of Children's Concepts of Angle', in G. Vergnaud (ed.), *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Paris, Vol. 2, pp. 304–311.

Mitchelmore, M. C., & White, P. (1998). Development of Angle Concepts: A Framework for Research, *Mathematics Education Research Journal*, 10(3), 4–27.

Mitchelmore, M. C. & White, P. (2000) Development of Angle Concepts by Progressive Abstraction and Generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, 41(3); pp. 209–238

Patronis, T. & Thomaidis, Y. (2008). On Arithmetization of School Geometry in the Setting of Modern Axiomatic, *Science and Education.*

Philipp, R. (1992). The Many Uses of Algebraic Variables. In *The Mathematics Teacher*. Vol. 85, No. 7. pp. 557–561.

Piaget J. , Inhelder B. & Sheminska A. (1981). *The Child's Conception of Geometry*, N.Y: Norton & Company.

Rittle-Johnson, B. & Wagner Alibali, M. (1999). Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics: Does One Lead to the Other? *Journal of Educational Psychology*. Vol. 91. No. 1. pp. 175–189.

Roels, G. (1985). 'Het fenomeen hoek' [The Angle Phenomenon], *Wiskunde en Onderwijs*, 11, 127–138.

Ryu, H., A., Chong, Y., O. & Song, S., H. (2007). In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 137–144. Seoul: PME.

Schweiger, F. (1986) 'Winkelbegriff und Winkelmaß' [The Angle Concept and Angle Measurement], *Mathematik im Unterricht*, 11, 1–9.

Seyler, D., J., Kirk, E., P., & Ashcraft, M., H. (2002). *Elementary Subtraction.* Manuscript under review.

Skolöverstyrelsen (1966). *Matematikterminologi i skolan.* Skolöverstyrelsen: SÖ-förlaget.

Spitzer, M., (1996). *Geist im Netz: Modelle für Lernen, Denken und Handeln.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg

Stigler, J., W. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap.* New York: The Free Press.

Strehl, R. (1983). 'Anschauliche Vorstellung und mathematische Theorie beim Winkelbegriff' [Visualisation and Mathematical Theory of the Angle Concept], *Mathematica Didactica*, 6, 129–146.

Swedner, H. (1978). *Sociologisk metod. En bok om kunskapsproduktion och förändringsarbete.* Lund: Liber Läromedel.

Thompson, I. (1999). Mental Calculation Strategies for Addition and Subtraction, Part 1. *Mathematics in School*, November, pp. 2–4.

Usiskin, Z. (1998). Paper-and-Pencil Algorithms in a Calculator and Computer Age. In Morrow, l., J. & Kenny, M., J. (Eds.), *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (Yearbook of the national Council of Teachers of Mathematics, pp. 7–20) Reston, VA: NCTM.

Van den Heuvel-Panhuizen, (2001). Realistic Mathematics Education in the Netherlands, in *Principles and Practices in Arithmetic Teaching*, Anghileri, J (Ed), Buckingham: Open University Press, pp. 15–31.

Wagner, S. (1983). What Are Those Things Called Variables? *Mathematics Teacher*, Vol. 76, pp. 474–479.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and Language*. London: The MIT Press.

Yackel, E. (2001). Perspectives on Arithmetic from Classroom-Based Research in the United States of America, in *Principles and Practices in Arithmetic Teaching*, Anghileri, J. (Ed.), Open University Press, Buckingham, pp. 15–32.

TIMSS *(Trends in International Mathematics and Science Study)* undersöker elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i årskurserna 4 och 8.

I rapporten analyseras elevernas lösningar av enskilda TIMSS-uppgifter i matematik inom de innehållsliga områden där de svenska elever klarar sig mindre bra. Det gäller taluppfattning och aritmetik samt geometri och mätningar i årskurs 4, algebra och geometri i årskurs 8. Analysen syftar till att belysa hur väl eleverna förstår centrala matematiska begrepp och kan tillämpa beräkningsprocedurer inom dessa innehållsliga områden.

Analysen är genomförd och rapporten är skriven av Per-Olof Bentley, universitetslektor och filosofie doktor vid Göteborgs universitet, inom ramen för hans uppdrag som ämnesdidaktisk expert i TIMSS-projektet.

Skolverket

www.skolverket.se