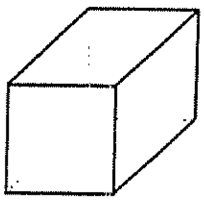
Eulers polyederformel

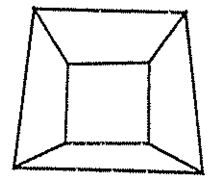
$$F + V = E + 2$$

F är antalet sidoytor (**faces**), V är antalet hörn (**vertices**) och E är antalet kantlinjer (**edges**) i polyedern.

Vi studerar en låda. Den har sex sidoytor.

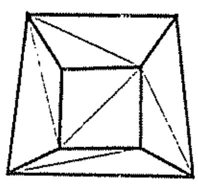


Vi tar bort bottensidan och plattar ut figuren. Vi har således minskat F med 1. Genom att även minska högerledet med 1 får vi en ekvivalent formel; $F + V = E + 1$. Detta betyder att om formeln var korrekt förut så är den korrekt nu i sin nya skepnad och **tvärtom**.



Formeln lyder nu $F+V = E+1$ och med det följande resonemanget vill vi motivera att den är korrekt.

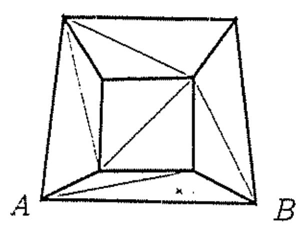
Triangulera:



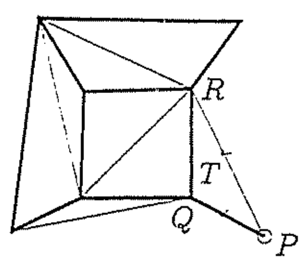
Gör om alla polygonerna (i vårt fall fyrhörningar) till trianglar genom att dra diagonaler i dem. Varje diagonal ökar E med 1 och dessutom ökar F med 1, således ökar båda leden i formeln med 1. Den är ekvivalent med tidigare formel.

Vi skall nu succesivt reducera vår graf till en enda triangel där vi direkt kan verifiera formeln.

Tag bort kantlinjen AB, nu minskas E med 1, men även F minskas med 1 så formeln är intakt. En triangel har försvunnit.

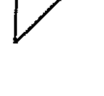


Men som framgår av figuren kan ibland ett något mer komplicerat läge uppstå när vi skall ta bort en triangel. För att ta bort triangeln T måste vi avlägsna två kantlinjer, PQ och PR samt hörnet P. Dvs. E minskas med 2 och V minskas med 1 men eftersom även F minskas med 1 har båda leden i formeln minskats med 2 och läget är ekvivalent med det föregående.



Endast dessa två sätt att reducera grafen förekommer eftersom den endast består av trianglar.

Efter ett ändligt antal steg har vi reducerat grafen till en triangel. Här gäller trivialt att $F + V = E + 1$. (Kontrollera!)



Vi har motiverat Eulers polyederformel. $F + V = E + 2$