5 Induktionsbevis

5.1 Visa att talet $n^3 - n$ är jämnt delbart med 6 då n är ett naturligt tal

a) med hjälp av induktion   b) utan att använda induktion

5.2 Visa med hjälp av induktion att talet

a) $3^{2n} - 1$ är jämnt delbart med 8 då n är ett naturligt tal

b) $15^n - 7^n$ är jämnt delbart med 8 då n är ett naturligt tal

5.3 Visa med hjälp av induktion att $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = n(2n - 1)$ då $n = 1, 2, 3 \ldots$

5.4 Summan av de n första jämna talen är $n^2 + n$. Visa detta!

5.5 Visa att $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ då $n = 1, 2, 3, \ldots$

5.6 Låt $s_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

a) Skriv summan s_n med hjälp av summatecknet Σ

b) Visa att $s_n = \frac{1}{3} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$

c) Visa att $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{2} n(n+1)(n+2)(n+3)$

5.7 Undersök för vilka naturliga tal n det gäller att $2^n > n^2$.
Visa sedan med hjälp av induktion att ditt påstående stämmer.

5.8 Visa att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$ då $n = 1, 2, 3, \ldots$

5.9 Använd induktion för att visa formeln för den geometriska summan:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad , \ x \neq 1 \ , \ n = 1,2,3,\ldots$$

5.10 Visa att $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ för alla naturliga tal $n \geq 1$.

5.11 Visa att $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n}<\frac{n}{2}$ för alla naturliga tal $n \geq 5$.

5.12 Talföjden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definieras rekursivt genom

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

Visa att $a_n = 2^n - 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

5.13 Talen i följden 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... kallas Fibonaccital. Om det n-te Fibonaccitalet kallas c_n är alltså $c_1 = c_2 = 1$ och $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ för $n = 3, 4, 5, \ldots$

a) Visa att $c_1 + c_2 + c_3 + \ldots c_n = c_{n+2} - 1$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Visa att $c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$