

# Vektoranalys (TATA44)

David Rule

Höst 2021

---

Last modified: 1 september 2022.

# Innehåll

<b>A Funktioner i vektoranalys: vektorfält, kurvor och ytor</b>	<b>4</b>
Föreläsning A . . . . .	4
A.1 Introduktion . . . . .	4
A.2 Funktioner . . . . .	5
A.3 Kurvor och ytor . . . . .	7
A.4 Derivering av skalär- och vektorfält . . . . .	9
Lektion A.1 . . . . .	10
<b>B Ytintegraler, flöde och Gauss sats</b>	<b>11</b>
Föreläsning B . . . . .	11
B.1 Elektrostatik . . . . .	11
B.2 Ytintegraler . . . . .	13
B.3 Gauss sats och divergens . . . . .	16
B.4 Två tillämpningar av Gauss sats . . . . .	18
B.5 En kort sammanfattning och en blick framåt . . . . .	19
Lektion B.1 . . . . .	20
Lektion B.2 . . . . .	20
<b>C Gauss sats och singulära vektorfält</b>	<b>21</b>
Föreläsning C . . . . .	21
C.1 Singulära vektorfält . . . . .	21
C.2 Divergens i andra koordinatsystem . . . . .	23
Lektion C.1 . . . . .	24
<b>D Fysikaliskt arbete, kurvintegraler och Greens formel</b>	<b>25</b>
Föreläsning D . . . . .	25
D.1 Linjeintegraler: definitioner . . . . .	25
D.2 Linjeintegraler: exempel . . . . .	26
D.3 Greens formel . . . . .	26
Lektion D.1 . . . . .	27
Lektion D.2 . . . . .	27
<b>E Rotation och Stokes sats</b>	<b>28</b>
Föreläsning E . . . . .	28
E.1 Rotation . . . . .	28
E.2 Stokes sats . . . . .	29
Lektion E.1 . . . . .	29
Lektion E.2 . . . . .	30
<b>F Potentialfält</b>	<b>31</b>
Föreläsning F . . . . .	31
F.1 Potentialfält . . . . .	31
F.2 Vektorfält i $\mathbf{R}^2$ . . . . .	32

Lektion F.1 . . . . .	32
<b>G Kroklinjiga koordinatsystem</b>	<b>33</b>
Föreläsning G . . . . .	33
G.1 Introduktion . . . . .	33
G.2 Exempel: cylinderkoordinater . . . . .	33
G.3 Exempel: sfäriska koordinater . . . . .	34
G.4 Transformation av operatorer . . . . .	35
Lektion G.1 . . . . .	35
Lektion G.2 . . . . .	35
<b>H Gauss och Stokes sats i kroklinjiga koordinatsystem</b>	<b>36</b>
Föreläsning H . . . . .	36
H.1 Volymintegraler . . . . .	36
H.2 Linjeintegraler . . . . .	36
H.3 Ytintegraler . . . . .	37
H.4 Exempel på derivator av basvektorer: cylinderkoordinater . . . . .	37
Lektion H.1 . . . . .	37
Lektion H.2 . . . . .	37
<b>I Sammanfattning av kursen</b>	<b>39</b>
Föreläsning I . . . . .	39
Lektion I.1 . . . . .	39

# Modul A

## Funktioner i vektoranalys: vektorfält, kurvor och ytor

### Föreläsning A

#### A.1 Introduktion

Följande länk ger en kort översikt av kursen och administrativa detaljer.



Film A.1:<https://youtu.be/1KfQmrcnDKM>

När man ser den här symbolen kan man klicka på länken för att titta på en videoklipp.

I Kurs-PM hittar du alla detaljerna i skriftlig form. Kurs-PM finns på kurshemsidan via följande länken:



<https://courses.mai.liu.se/GU/TATA44/Dokument/coursedoc.pdf>

Bilden ändra sig beroende på vad länken pekar till.

Föreläsningar kommer mest följa *Ramgard* och i första föreläsning går vi igenom kapitel 1–3. För att kunna få tillgång till de flesta lektions uppgifter behöver du också köpa *Nikoltjeva-Hedberg*. Se kurs-PM för detaljerna. Båda går att köpa från bokhandeln på campus:



[www.bokab.net](http://www.bokab.net)

Bland de här anteckningar och på kurshemsidan finns det länkar till videoklipp som till exempel introduktionen ovan. Videoklippen utgör inspelade föreläsningar och anteckningarna är en skriftlig underlag som är förhoppningsvis lättare att bläddra igenom än videoklipp. Noterar att **första bilden i vissa videoklipp inte stämmer med dess rubrik**, men man kan alltid vara säkert den är den rätta videon genom att kontrollera rubriken med länken i anteckningarna eller hemsidan man klickar på. Anledningen bakom detta är att jag har ändrat ordningen av vissa videoklipp i kursen jämfört med förra året.

Ämnet utvecklades för att behandla och lösa fysiska problem – framför allt i elektromagnetism – och det är därifrån vi mest kommer motivera vår studier. I vektoranalys kan man mer än i vissa andra

matematiska ämne dra mycket nytta av bra intuition. Men det inte skulle vara en högskoleutbildning utan bevis.

## A.2 Funktioner

Funktioner spelar en central roll i vektoranalys. Vi använder de för att representera på ett matematiskt sätt en rad olika fysiska saker. Men först kommer vi håg detta grundläggande begrepp: En *funktion*  $f$  är en regel som till varje element  $x$  i en mängd  $A$  hänför ett element i en mängd  $B$ . Vi kallar  $A$  för funktionens *definitionsområde* och  $B$  för funktionens *målmängd*. Vi skriver  $f: A \rightarrow B$ .

**Exempel A.1.** Kom ihåg från envariabelanalys både  $A$  och  $B$  var oftast lika med  $\mathbf{R}$  eller en delmängd av  $\mathbf{R}$ . Till exempel har vi följande funktioner.

(a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , som till varje  $x \in \mathbf{R}$  hänför talet  $f(x) = x^2 + 2$ .

(b)  $f: [0, 3] \rightarrow \mathbf{R}$ , som till varje  $x \in [0, 3]$  hänför talet  $f(x) = x - \frac{3}{4}$ .

Vi har också sett i flervariabelanalys funktioner där  $A$  är en delmängd av

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$$

eller

$$\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}.$$

(Så  $\mathbf{R}^2$  och  $\mathbf{R}^3$  är mängderna av alla koordinater med 2 respektive 3 komponenter.)

**Exempel A.2.** Här ger vi ett par exempel av funktion med definitionsområde  $\mathbf{R}^2$  eller  $\mathbf{R}^3$ .

(a)  $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , som till varje  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  kopplas talet  $F(x, y) = xy$ .

(b)  $G: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , som till varje  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  kopplas talet  $G(x, y) = 2x - 3y$ .

(c)  $H: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , som till varje  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  kopplas talet  $H(x, y, z) = xy + yz + zx$ .

En intressant fråga är hur man kan representera funktioner grafiskt. Ni kan säkert rita grafer av funktionerna som ges i exempel A.1. För de första två i exempel A.2 kan man försöka rita en graf med tre axlar, men det är förstås inte alltid lätt på pappret som egentligen är bara tvådimensionellt. Sista exempel är även svårare. I flervariabelanalys har ni jobbat med olika sätt att representera sådana funktioner och använt till exempel *nivåområden* och *nivåkurvor*.

Med en *nivåområde* för en funktion  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  menas mängden av alla  $x \in A$  för vilka  $f$  antar något givet värde  $c \in \mathbf{R}$ :

$$N_c = \{x \in A : f(x) = c\}.$$

För olika  $c$  kan  $N_c$  vara olika mängden. Om  $A \subseteq \mathbf{R}^3$  är  $N_c$  i många fall en *yta* och då kallas  $N_c$  för en *nivåyta* och om  $A \subseteq \mathbf{R}^2$  är  $N_c$  i många fall en *kurva* och då kallas  $N_c$  för en *nivåkurva*. Vi ger en mer konkret definition av vad en yta och en kurva är för någonting senare i det här modulen.

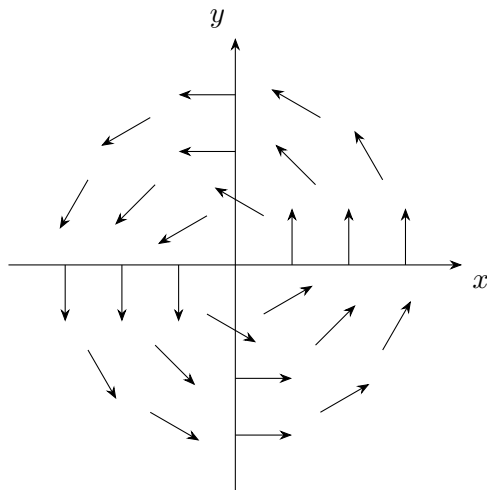
Kom ihåg även hur man kan derivera och integrera sådana funktioner. Viktiga begrepp där är partiella derivator, dubbel- och trippelintegraler.

## Vektorfält

I det här kursen ägnar vi mycket tid åt studien av funktioner  $f: A \rightarrow B$  där både definitionsområdet  $A$  och målmängden  $B$  är delmängder av antingen  $\mathbf{R}^2$  och  $\mathbf{R}^3$ . Vi skriver  $\mathbf{R}^n$  istället för  $\mathbf{R}^2$  eller  $\mathbf{R}^3$  där det vi pratar om gäller likväl för den ena som den andra.

Sådana funktioner representerar många viktiga fysiska begrepp. Till exempel kan man modellera ett rum (till exempel ett tentasal) som en delmängd  $R$  av  $\mathbf{R}^3$  – varje punkt i rummet ges av en koordinat  $(x, y, z) \in R$ . Sedan kan en funktion  $F: R \rightarrow \mathbf{R}^3$  beskriva lufthastigheten i varje punkt i rummet.

Men när vi tänker på lufthastigheten – som i en given punkt är ett element i  $\mathbf{R}^3$  – slutar vi tänka på den som en koordinat och istället tänker på den som en vektor. Rent matematisk är en vektor  $\mathbf{v}$



Figur A.1: En representation av funktionen  $G$  från exempel A.3.

ingen mer än ett element i  $\mathbf{R}^3$  men det tolkas istället som en pil som börjar i origo och har sin spets i en punkt  $(u, v, w) \in \mathbf{R}^3$ . Punkten  $(u, v, w) \in \mathbf{R}^3$  beskriver allt vi behöver veta om pilen så vi skriver  $\mathbf{v} = (u, v, w)$ .

En funktion  $F: R \rightarrow \mathbf{R}^n$  där  $B \subseteq \mathbf{R}^n$  kallas för ett *vektorfält* eftersom för varje  $\mathbf{x} \in R$  är  $F(\mathbf{x})$  en vektor.<sup>1</sup>

Vi kan representera vektorfältet  $F$  grafisk genom att representera definitionsmängden  $D$  som en del av pappret och sedan ritar vektorn  $F(\mathbf{x})$  med sin svans i punkten  $\mathbf{x}$ . I praktiken kan man förstås inte rita pilar i alla punkter och fallet  $n = 3$  är svårare än fallet  $n = 2$ , men det fungerar oftast bra även med de där begränsningar. Kom ihåg att alla förflyttningar av pilen tolkas som samma vektor. Det vill säga vektorn är bara pilens *storlek* (eller *magnitud*) och *riktning*, inte sin placering.

**Exempel A.3.** Vi definierar  $G: \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^2$  med hjälp av uttrycket

$$G(x, y) = \left( \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Figur A.1 visa hur vi kan rita  $G$ . Ritningen passar den fysiska tolkningen av ett vektorfält.

Senare i kursen kommer vi använda funktioner för att hjälpa oss representera både kurvor och ytor.

Vi kommer ihåg notation vi har sett i linjär algebra och flervariabelanalys. Vi använder oss ofta av enhetsvektorerna  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  och  $\mathbf{k}$ : I  $\mathbf{R}^2$  är

$$\mathbf{i} = (1, 0) \quad \text{och} \quad \mathbf{j} = (0, 1),$$

och i  $\mathbf{R}^3$  är

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \text{och} \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

Med hjälp av den notation kan vi till exempel skriva vektorfältet  $G$  från exempel A.3 som

$$G(x, y) = G_1(x, y)\mathbf{i} + G_2(x, y)\mathbf{j}$$

där  $G_1: \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$  och  $G_2: \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$  definieras enligt formlerna

$$G_1(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{och} \quad G_2(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$



**Film A.2:** <https://youtu.be/2fqSM02KasM>

<sup>1</sup>Så  $\mathbf{x}$  är lika med  $(x, y)$  eller  $(x, y, z)$  för  $n = 2$  respektive  $n = 3$  ( $x, y, z \in \mathbf{R}$ )

## Skalärprodukt

I linjär algebra har vi lärt oss om skalärprodukten. *Skalärprodukten* av två vektorer  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  och  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  är

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$$

där  $\theta$  är vinkeln mellan  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$ .

För två vektorfält  $\mathbf{F}$  och  $\mathbf{G}$  kan man förstå ta skalärprodukten av de punktvis:

$$\mathbf{F}(x) \cdot \mathbf{G}(x) = F_1(x)G_1(x) + F_2(x)G_2(x) + F_3(x)G_3(x)$$

för varje  $x$  i  $\mathbf{F}$  och  $\mathbf{G}$ 's definitionsmängd, där  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  och  $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$  så  $G_k$  och  $F_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) är komponentfunktioner av  $\mathbf{F}$  respektive  $\mathbf{G}$ .

## Skalärfält

En funktion  $F: R \rightarrow \mathbf{R}$  där  $B \subseteq \mathbf{R}^n$  kallas för ett *skalärfält*. Exempelvis kan en sådan funktion representera temperaturfördelningen i en kropp, tryckfördelningen i en vätska eller potentialen kring en elektrisk laddning. Vi såg några exempel av skalärfält i exempel A.2.

## A.3 Kurvor och ytor

### Kurvor

De flesta av oss har en bra känsla för vad en kurva är för någonting. Den är någonting man kan rita på papper, eller strecka ut i luften med ett tomt bloss. Men hur representerar vi den matematiskt? Återigen använder vi begreppet av en funktion: Betrakta en kontinuerlig funktion  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ , där  $[a, b]$  är ett intervall. Man kan tänka att  $\gamma$  "ritar" en kurva i  $\mathbf{R}^n$ , så vi säger att en *kurva* är värdemängden  $\{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$  av en kontinuerlig funktion  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Med andra ord är en kurva en kontinuerlig avbildning av intervallet  $[a, b]$  i  $\mathbf{R}^n$ .

För varje kurva finns det flera möjliga val av funktion  $\gamma$  vars värdemängd är kurvan, så vi kallar varje funktion  $\gamma$  för en *parametrisering* av kurvan.

**Exempel A.4.** Hitta två parametriseringer av mängden  $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ .

*Lösning.* Vi vet att mängden är den översta halvan av en cirkel med radie 1 och medelpunkt i origo. Vi kan använda vinkeln  $\theta$  med  $x$ -axeln som ett sätt att parametrisera kurvan.

Om  $\theta$  är vinkeln linjen från origo till en punkt  $(x, y)$  bildar med  $x$ -axeln vet vi att  $x = \cos \theta$  och  $y = \sin \theta$  så vi får välja  $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$  där

$$\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \tag{A.1}$$

för alla  $\theta \in [0, \pi]$  är en parametrisering av halvcirkeln.

Det enklaste sättet att hitta en annan parametrisering är att ta den första och "rita kurvan dubbel så fort" istället: Vi tar istället  $\gamma: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbf{R}^2$  där

$$\gamma(\theta) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$$

för alla  $\theta \in [0, \pi/2]$ . □

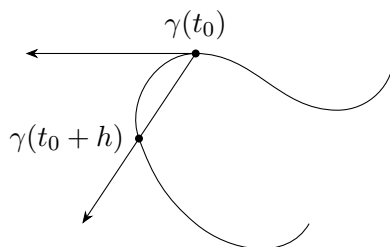
Om en parametrisering  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  av en kurva uppfyller  $\gamma(a) = \gamma(b)$  kallar vi kurvan för *sluten*.

En parametrisering av en kurva innehåller mycket information. Som ett exempel försöker vi hitta ett sätt att ta fram en tangentlinje till en kurva vid en viss punkt. Låt  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  vara en parametrisering av en kurva. Vi letar efter en tangentlinje till kurvan i punkten  $\gamma(t_0)$  (för givet  $t_0 \in [a, b]$ ).

För att specificera en tangentlinje behöver vi också riktningen av tangentlinjen. Det kan vi åtminstone uppskatta med kvoten

$$\frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} \tag{A.2}$$





Figur A.2: En uppskattning av en tangentvektor till en kurva och tangentvektorn.

(se figur A.2). Vi känner förstås till kvoten: den uppstår i definitionen av derivatan av en funktion. Skillnaden här förstås är att täljaren är differensen av två vektorer istället för reella tal, men annars är den detsamma vi såg i envariabelanalys. Ju mindre  $h$  desto närmare är vektorn i (A.2) till riktningen av tangentlinjen genom  $\gamma(t_0)$ . Så vi definierar *derivatan* av  $\gamma$  i  $t_0$  att vara

$$\gamma'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}. \quad (\text{A.3})$$

Eftersom den även pekats i samma riktning som kurvans tangentlinje kallar vi den för en *tangentvektor* till kurvan i punkten  $\gamma(t_0)$ .

Om  $\gamma$  har komponentfunktioner  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$  och möjligen  $3$ ), så  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  i fallet  $n = 3$ , ser vi direkt från (A.3) att

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \gamma'_3(t))$$

där  $\gamma'_i(t)$  är den vanliga derivatan från envariabelanalys. Nu ser vi direkt att det inte alls är skälvt klart att gränsvärdet (A.3) existerar för vilket  $\gamma$  som helt: Den existerar precis när varje komponentfunktion är deriverbara och därför kallar vi  $\gamma$  för *deriverbar* när varje komponentfunktion är deriverbar.

**Exempel A.5.** Hitta en ekvation för tangentlinjen till kurvan i exempel A.4 genom punkten  $(1/2, \sqrt{3}/2)$ .

*Lösning.* Vi tar parametreringen (A.1). Observera att  $(1/2, \sqrt{3}/2) = \gamma(\pi/3)$ , så tangentlinjen går igenom  $\gamma(\pi/3)$  i riktningen  $\gamma'(\pi/3)$ . Vi räknar

$$\gamma'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

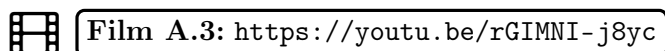
så  $\gamma'(\pi/3) = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$ . Härifrån är det enkelt att skriva tangentlinjen i parameterform:

$$(x, y) = (1/2, \sqrt{3}/2) + t(-\sqrt{3}/2, 1/2)$$

för  $t \in \mathbf{R}$ . Den har även den kartesiska ekvationen

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

□



## Ytor

Vi kan för ytor utföra en motsvarande konstruktion till den vi gjorde för kurvor. Istället för att betrakta kontinuerliga avbildningar av intervall betrakta vi kontinuerliga avbildningar av öppna delmängder av planet. Vi börjar med ett exempel.

**Exempel A.6.** Betrakta skivan  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  och halvsfären  $S_+ = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ . Vi kan skriva halvsfären som värdemängd av en funktion. Vi föreställer oss att skivan sitta på  $xy$ -planet i  $\mathbf{R}^3$  och höja upp varje punkt på skivan tills det når halvsfären. Höjden av halvsfären över punkten  $(x, y, 0)$  är  $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$  och därför är  $\mathbf{u} : D \rightarrow \mathbf{R}^3$  definierad enligt formeln

$$\mathbf{u}(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

för  $(x, y) \in D$  en parametrisering av  $S_+$ .

I allmänhet är en *parametrisering* (eller *parameterframställning*) av en yta i  $\mathbf{R}^3$  en kontinuerlig funktion  $\mathbf{u} : D \rightarrow \mathbf{R}^3$  där  $D$  är en delmängd av  $\mathbf{R}^2$  sådant att ytan är  $\mathbf{u}$ 's värdemängd. Precis som för kurvor när vi pratar om deriverbarheten av  $\mathbf{u}$  menar vi deriverbarheten av  $\mathbf{u}$ 's komponentfunktioner, det vill säga existensen av partiella derivator.<sup>2</sup>

Betrakta en parametrisering  $\mathbf{u} : D \rightarrow \mathbf{R}^3$  av en yta  $S \subset \mathbf{R}^3$ . Observerar att om vi håller en av  $\mathbf{u}$ 's variabler konstant anskaffar vi en parametrisering av en kurva som ligger i ytan  $S$ . Till exempel om  $(u, v)$  är en inre punkt av  $D \subseteq \mathbf{R}^2$  finns det ett intervall  $I$  som innehåller  $u$  sådan att funktionen

$$s \mapsto \gamma_1(s) := \mathbf{u}(s, v) \quad (s \in I)$$

är en parametrisering av en kurva som ligger i ytan  $S$ . Man kan säga samma sak för funktionen

$$t \mapsto \gamma_2(t) := \mathbf{u}(u, t) \quad (t \in J)$$

där  $J$  är ett lämpligt intervall som innehåller  $v$ . Derivator av de två kurvor är tangentvektor till två olika kurvor som ligger i  $S$  och är därför två olika tangentvektor till ytan  $S$ . Därför är

$$\mathbf{n} = \gamma_1'(u) \times \gamma_2'(v)$$

en normalvektor till ytan  $S$  i punkten  $\mathbf{u}(u, v)$ . Men

$$\gamma_1'(u) = \mathbf{u}'_u(u, v) \quad \text{och} \quad \gamma_2'(v) = \mathbf{u}'_v(u, v)$$

så

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}'_u(u, v) \times \mathbf{u}'_v(u, v).$$

Med hjälp av en deriverbar parametrisering av en yta kan vi räkna ut en normal till ytan i varje punkt på ytan.



**Film A.4:** <https://youtu.be/k0J07yIfyMg>

## A.4 Derivering av skalär- och vektorfält

I flervariabelanalys har ni sett *gradienten* av en skalärfält  $F : A \rightarrow \mathbf{R}$  där  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ . Den definieras som

$$\text{grad } F(x, y, z) = (\partial_x F(x, y, z), \partial_y F(x, y, z), \partial_z F(x, y, z))$$

eller

$$\text{grad } F(x, y) = (\partial_x F(x, y), \partial_y F(x, y))$$

beroende på om  $n = 3$  eller  $2$  och är ett vektorfält  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Vi använder oss av notationen

$$\nabla F = \text{grad } F.$$

Vi definierar också andra differentialoperatorer genom att formellt blanda operatorn

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

<sup>2</sup>Men kom ihåg skillnaden mellan deriverbar och differentierbar från flervariabelanalys

med produkter från linjär algebra: Vi har *divergensen* som ges av uttrycket

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3$$

där  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  är ett vektorfält och *rotationen*

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = (\partial_y F_3 - \partial_z F_2, \partial_z F_1 - \partial_x F_3, \partial_x F_2 - \partial_y F_1).$$

Rent formellt då är divergensen och rotationen av en funktion  $\mathbf{F}$  skalär- respektive vektorprodukten mellan  $\nabla$  och  $\mathbf{F}$ , men ”produkten” mellan en partiell derivata och en komponent funktion tolkas som vanligt derivering.



**Film A.5:** [https://youtu.be/znuIcrW\\_Bhs](https://youtu.be/znuIcrW_Bhs)

Kom ihåg det vi lärde oss i flervariabelanalys om hur vi kan hitta normalvektor till en yta när ytan ges som en nivå mängd.



**Film A.6:** <https://youtu.be/h0t1zi4zfHo>

## Lektion A.1

Efter du har gått igenom föreläsning A förbered dig för lektionen genom att göra följande uppgifter. Eventuella frågor kan du ställa under lektionens gång. Samarbeta gärna med dina klasskompisar. Om det finns någonting många ha svårt för kan det vara värt att mejla lektionsledaren i förväg så de kan förbereda ytterligare exempel på den.

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 1.3
- 1.5
- 1.7
- 1.10
- 1.11
- 1.12
- 2.3
- 2.4
- 2.5
- 2.9

Från Ramgard:

- 20

# Modul B

## Ytintegraler, flöde och Gauss sats

### Föreläsning B

Ramgard kapitel 5–6.

#### B.1 Elektrostatik

Vår genomgång av vektoranalys tar mycket motivation och inspiration från elektrostatik. Här går vi igenom lite av de fysiska idéerna – det här avsnittet examineras inte direkt, så ni kan hoppa över det om ni vill, men jag tror man kan dra nytta av att ha en känsla för det. Jag hoppas att det mesta av det vi diskuterar här är bekant eller i värsta fall inte så långt ifrån det ni här läst i fysikklasser i skolan.

#### Elektrisk laddning

*Elektrisk laddning* är en fysikalisk storhet. För våra syften kan vi tänka att det är en fysisk egenskap som varje kropp har. Den kan vara positivt, negativt eller noll. Det motsvara massa, som är en annan fysikalisk storhet (men till skillnad från laddning kan massa inte vara negativ).

Vi kommer betrakta både punktladdningar och laddningstäthet. En punktladdning är en kropp som anses existera i en punkt  $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^3$  med laddningen  $q$ . För en kropp som fyller ett område  $M \subseteq \mathbf{R}^3$  betecknar vi laddningstätheten som  $\rho(\mathbf{r})$  för  $\mathbf{r} \in M$  och sen är laddningen av hela kroppen

$$Q = \iiint_M \rho(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r})$$

där  $dV$  är volymelementet ni har sätt i flervariabelanalys (som skrivs till exempel i kartesiska koordinater som  $dx dy dz$ ).

#### Coulombs lag

Coulombs lag specificerar kraften som verkar mellan två elektrisk laddad partiklar, det vill säga mellan två punktladdningar. Vi låter  $q_0 \in \mathbf{R}$  och  $q \in \mathbf{R}$  beteckna laddningarna av två partiklar som sitter i punkten  $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^3$  respektive  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$ . Då säger *Coulombs lag* att kraften  $\mathbf{F}$  som verkar på partikeln i  $\mathbf{r}_0$  på grund av laddningen  $q$  i  $\mathbf{r}$  är

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = K \frac{qq_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} \quad (\text{B.1})$$

där  $K$  är en proportionell konstant. Vi vet faktiskt att

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

där  $\epsilon_0$  är den elektriska konstanten.

Utifrån (B.1) ser vi att kraften  $\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)$ :

- (a) är proportionell mot produkten  $qq_0$  av elektriska laddningar av både partiklar;

(b) är omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet  $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|$ ; och

(c) verkar längs linjen som innehåller  $\mathbf{r}$  och  $\mathbf{r}_0$ .

## Superposition

Krafter från olika laddningar lyder *superpositionsprincipen* – det vill säga krafterna från olika laddningar kan adderas. Om vi har till exempel partiklar i punkterna  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{r}_1$  och  $\mathbf{r}_2$  men laddningar  $q_0$ ,  $q_1$  respektive  $q_2$  säger Coulombs lag att kraften på partikeln i  $\mathbf{r}_0$  på grund av laddningen  $q_1$  är

$$\mathbf{F}_1 = K \frac{q_1 q_0 (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^3}$$

och kraften på partikeln i  $\mathbf{r}_0$  på grund av laddningen  $q_2$  är

$$\mathbf{F}_2 = K \frac{q_2 q_0 (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2|^3}$$

Superpositionsprincipen säger att den totala kraften på partikeln i  $\mathbf{r}_0$  på grund både  $q_1$  och  $q_2$  är summan

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = K q_0 \left( \frac{q_1 (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{q_2 (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2|^3} \right).$$

I synnerhet säger superpositionsprincipen att kraften mellan två elektriskt laddade partiklar ändras inte av andra laddningar.

Om vi har en mängd laddningar  $\{q_0, q_1, \dots, q_k\}$  i de respektive punkterna  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$  säger superpositionsprincipen och Coulombs lag att kraften på  $q_0$  i  $\mathbf{r}_0$  är

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = K q_0 \sum_{i=1}^k \frac{q_i (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (\text{B.2})$$

För att summan ska vara definierad måste  $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{r}_i$  för  $i = 1, \dots, k$ .

Med lite handviftning säger samma argument att kraften på en partikel i  $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^3$  med laddning  $q_0$  som uppstår på grund av laddningstätheten  $\rho: M \rightarrow \mathbf{R}$  är

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = K q_0 \iiint_M \frac{\rho(\mathbf{r})(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} dV(\mathbf{r}). \quad (\text{B.3})$$

## Elektriskt fält

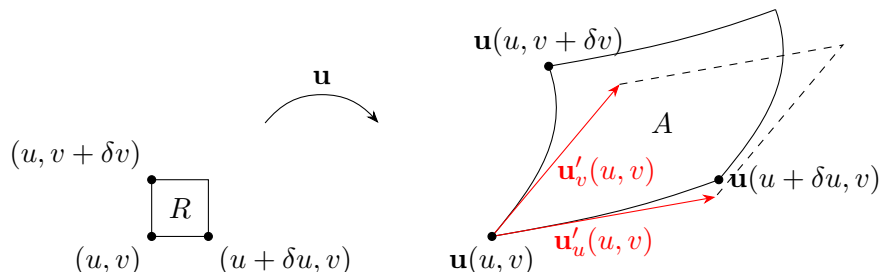
Enligt Coulombs lag och superpositionsprincipen är kraften på en laddning  $q_0$  i en punkt  $\mathbf{r}_0$  alltid proportionell mot laddningen  $q_0$ . Därför kan vi betrakta storleken  $\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)/q_0$  som vi kallar för *elektriska fältet* i punkten  $\mathbf{r}_0$ . Man kan undra om det överhuvudtaget har någon fysisk mening: Det är en djup filosofisk fråga, men just nu kan vi tänka att det kraften på en orörlig positivt laddad test partikel i varje punkt i rummet.

Från (B.2) ser vi att elektriska fältet som uppstår i punkten  $\mathbf{r}_0$  på grund av en mängd punktladdningar  $\{q_1, \dots, q_k\}$  i de respektive punkterna  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$  är

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = K \sum_{i=1}^k \frac{q_i (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (\text{B.4})$$


(Återigen måste  $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{r}_i$  för  $i = 1, \dots, k$ .) Dessutom ser vi från (B.3) att elektriska fältet i  $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^3$  som uppstår på grund av laddningstätheten  $\rho: D \rightarrow \mathbf{R}^3$  är

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = K \iiint_D \frac{\rho(\mathbf{r})(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} dV(\mathbf{r}). \quad (\text{B.5})$$



Figur B.1: Avbildning av en rektangel under  $\mathbf{u}$ .

Vid första ögonblick känns det som (B.5) borde vara väldigt användbart. Det ger en explicit formel för elektriska fältet som uppstår på grund av en laddningstäthet  $\rho$ . Med tyvärr är det inte så direkt användbart. Integralen är i många fall så svårt att beräkna att man inte kan använda formeln alls och behöver hitta en annat sätt att nå elektriska fältet. Ett mål av nästa modulen är att hitta en differentialekvation för elektriska fältet. Erfarenhet visar att differentialekvationen är mycket mer användbar en (B.5). På vägen ditt kommer vi upptäcka Gauss sats som är en väldigt kraftful sats i vektoranalys.

 **Film B.1:** <https://youtu.be/vNctnnNITKg>

## B.2 Ytintegraler

Nu ta vi vad kan känna som en avstickare och vänder oss tillbaka till ytor och hur man kan definierar integraler över ytor – ytintegraler. Man kan undra vad det har att göra med (B.5) när man ser att det innehåller bara en integral över en volym (som redan är välkänt från flervariabel analys).

Svaret på det är att vi vill hitta ett samband mellan volymintegraler och ytintegraler. Sambandet kallas för Gauss sats men innan vi kan upptäcka den behöver vi först hitta en rimligt definition för en ytintegral.

### Motivationen bakom definitionen

Låt  $\mathbf{u}: D \rightarrow \mathbf{R}^3$  vara en parametrisering av en yta  $S \subset \mathbf{R}^3$  så värdemängden av  $\mathbf{u}$  är  $S$  och  $D \subseteq \mathbf{R}^2$ . Vi ställer frågan: Hur avbildar  $\mathbf{u}$  en liten rektangel  $R = \{(x, y) : u \leq x \leq u + \delta u, v \leq y \leq v + \delta v\} \subseteq D$  där  $\delta u$  och  $\delta v$  är två små positiva tal? Vi kallar avbildningen av  $R$  för  $A$ . Se figur B.1. Funktionerna

$$s \mapsto \mathbf{u}(x, v) \quad \text{och} \quad t \mapsto \mathbf{u}(u, t)$$

parametriserar två kurvor som är sidorna till  $A$  som går igenom punkten  $\mathbf{u}(u, v) \in S$ . Om  $\mathbf{u}$  är tillräckligt glatt är arean av avbildningen  $A$  välapproximerad av parallelogrammen med sidorna  $\mathbf{u}'_u(u, v)\delta u$  och  $\mathbf{u}'_v(u, v)\delta v$ . Ju mindre  $\delta u$  och  $\delta v$  desto bättre är uppskattningen.

Area av parallelogrammen ges av

$$|\mathbf{u}'_u(u, v) \times \mathbf{u}'_v(u, v)| (\delta u)(\delta v) = |\mathbf{u}'_u(u, v)| |\mathbf{u}'_v(u, v)| \sin \theta (\delta u)(\delta v)$$

där  $\theta$  är vinkeln mellan  $\mathbf{u}'_u(u, v)$  och  $\mathbf{u}'_v(u, v)$ . Om det var möjligt att dela upp  $D$  i små rektanglar  $R_i$  med ett hörn i punkten  $(u_i, v_i)$  och sidolängderna  $\delta u$  och  $\delta v$  skulle en bra definition av en integral av en funktion  $F: S \rightarrow \mathbf{R}$  över  $S$  vara något slags gränsvärde av

$$\sum_i F(\mathbf{u}(u_i, v_i)) |\mathbf{u}'_u(u_i, v_i) \times \mathbf{u}'_v(u_i, v_i)| \delta u \delta v$$

då  $\delta u$  och  $\delta v$  går mot noll. Det kunde vi rimligen gissar ha gränsvärdet

$$\iint_D F(\mathbf{u}(u, v)) |\mathbf{u}'_u(u, v) \times \mathbf{u}'_v(u, v)| \delta u \delta v \tag{B.6}$$

som är en väldefinierad integral över ett område  $D$  som vi känner igen från flervariabelanalys. Integralen i (B.6) är den vi tar som definitionen av integralen av en funktion  $F$  över en parametriserad yta  $S$ .



Film B.2: <https://youtu.be/xPXRrkjnIoM>

## Definitionen och ett exempel

Nu definierar vi integralen av en funktion över en yta.

**Definition B.1.** Låt  $S \subseteq \mathbf{R}^3$  vara en styckvis glatt yta – det vill säga att den har en parametrisering  $\mathbf{u}: D \rightarrow S$  som är kontinuerlig och styckvis kontinuerligt deriverbar – och  $F: S \rightarrow \mathbf{R}$  vara en begränsad styckvis kontinuerlig funktion. Vi definierar

$$\iint_S F d\sigma = \iint_S F(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) := \iint_D F(\mathbf{u}(u, v)) |\mathbf{u}'_u(u, v) \times \mathbf{u}'_v(u, v)| dudv.$$

Vi definierar arean av  $S$  att vara

$$\iint_S d\sigma := \iint_D |\mathbf{u}'_u(u, v) \times \mathbf{u}'_v(u, v)| dudv$$

**Exempel B.2.** Betrakta ytan  $S$  som har parametriseringen  $\mathbf{u}: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$  som ges av

$$\mathbf{u}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

för  $0 \leq u \leq 1$  och  $0 \leq v \leq 2\pi$ . Beräkna

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma(x, y, z)$$

där  $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ .

Lösning.



Film B.3: <https://youtu.be/vrs92xyHue0>

□

## Flöde och orientbarhet

Nu diskuterar vi ett särskilt fall av integraler över ytor. Betrakta ett vektorfält  $\mathbf{F}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  och en styckvis glatt yta  $S \subset \mathbf{R}^3$ . Om  $\mathbf{F}$  representerade hastigheten av en vätska kunde man fråga: Vad är mängden av vätska som passerar igenom ytan per tidsenhet? Om vektorfältet var alltid parallellt med ytan skulle ingen vätska passera igenom ytan. Däremot om vektorfältet var normal med ytan skulle mängden vara  $\iint_S |\mathbf{F}| d\sigma$  per tidsenhet. Hastigheten av vätskan genom ytan i en viss punkt  $\mathbf{x}$  ges är den komponent av  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  som pekar i ytans normalriktning. Därför är det

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$$

vi behöver integrera över ytan  $S$ , där  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$  är en enhetsnormal till ytan i  $\mathbf{x}$ . Men i varje punkt på  $S$  finns det två möjliga val av enhetsnormal – den ena är alltid den negativa av den andra. Så när vi integrerar  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$  är det viktigt att välja  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$  på ett kontinuerligt sätt över ytan. (Varför?)

**Definition B.3.** Vi kallar en yta för orienterbar om det finns ett kontinuerligt sätt att välja en plus- och en minussidan på hela ytan.

På en styckvis glatt yta  $S$  kan vi nästan överallt välja en enhetsnormal med hjälp av parametriseringen  $\mathbf{u}$ : Vi väljer

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{n}(u, v)}{|\mathbf{n}(u, v)|} = \frac{\mathbf{u}'_u(u, v) \times \mathbf{u}'_v(u, v)}{|\mathbf{u}'_u(u, v) \times \mathbf{u}'_v(u, v)|} \quad (\text{B.7})$$

där  $\mathbf{x} = \mathbf{u}(u, v)$ . Om en styckvis glatt yta  $S$  är orienterbar finns det en parametrisering  $\mathbf{u}$  som en konsekvent med orientering, det vill säga att (B.7) alltid pekar åt plussidan av  $S$ .

**Definition B.4.** Vi definierar flödet av en begränsat kontinuerligt vektorfält  $\mathbf{F}$  genom en orienterbar styckvis glatt yta  $S$  att vara

$$\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x})$$

där  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$  är ett val av enhetsnormal till ytan konsekvent med orienteringen av  $S$ .

Vi kommer snart se att flödet är ett viktigt begrepp även där vektorfältet är ett elektriskt fält. Eftersom det alltid finns två val av kontinuerlig enhetsnormal på en orienterbar yta, och den ena är den negativa av den andra, måste vi precisera vilken val av  $\hat{\mathbf{n}}$  vi har gjort för att precisera flödets tecken.

Utifrån definition B.4 och uttrycket för normalvektorn (B.7) kan vi räkna att

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{u}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{n}(u, v)}{|\mathbf{n}(u, v)|} |\mathbf{n}(u, v)| dudv \\ &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{u}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) dudv \\ &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{u}(u, v)) \cdot (\mathbf{u}'_u(u, v) \times \mathbf{u}'_v(u, v)) dudv \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

där  $S$  är har parametreringen  $\mathbf{u}: D \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Likhet (B.8) förenklar räkningar av flöden eftersom man slipper räkna enhetsnormalen separat.

**Exempel B.5.** Betrakta flödet av vektorfältet  $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x, z, y)$  genom följande del av en cylinder:

$$S = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 = 4, -1/2 \leq x \leq 1/2, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Välj normalvektorn så att den pekar utåt från  $x$ -axeln.

*Lösning.* Först behöver vi hitta en lämplig parametrering av  $S$ . Vi kan välja

$$\mathbf{u}(u, v) = (u, 2 \cos v, 2 \sin v)$$

där  $-1/2 \leq x \leq 1/2$  och  $0 \leq v \leq \pi/2$ . Sedan räknar vi att

$$\mathbf{u}'_u(u, v) = (1, 0, 0) \quad \text{och} \quad \mathbf{u}'_v(u, v) = (0, -2 \sin v, 2 \cos v)$$

så  $\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{u}'_u(u, v) \times \mathbf{u}'_v(u, v) = (1, 0, 0) \times (0, -2 \sin v, 2 \cos v) = (0, -2 \cos v, -2 \sin v)$ . Detta normal pekar mot  $x$ -axeln så vi byter tecken på den och sätter istället

$$\mathbf{n}(u, v) = (0, 2 \cos v, 2 \sin v)$$

Det följer från (B.8) att flödet är

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) &= \int_0^{\pi/2} \int_{-1/2}^{1/2} F(u, 2 \cos v, 2 \sin v) \cdot (0, 2 \cos v, 2 \sin v) dudv \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_{-1/2}^{1/2} (\sin u, 2 \sin v, 2 \cos v) \cdot (0, 2 \cos v, 2 \sin v) dudv \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_{-1/2}^{1/2} 8 \sin v \cos v dudv \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_{-1/2}^{1/2} 4 \sin(2v) dudv = \int_0^{\pi/2} 4 \sin(2v) dv \\ &= -2 \cos(2v) \Big|_0^{\pi/2} = 4 \end{aligned}$$

□



### B.3 Gauss sats och divergens

Nu utreda vi ett samband mellan en integral över en kropp i  $\mathbf{R}^3$  – en volymintegral – och flödet genom sin yta – en ytintegral. Sambandet kallas för *Gauss sats* eller *Divergens sats*. Det är inte svårt att föreställa sig att sådana sats kan vara till stor nytta: Som en tillämpning kommer vi till härleda från Coulombs lag och superpositionsprincipen en differential ekvation för elektriska fält.

Vad motivera vår utredning är en lust att förstå gränsvärdet av kvoten

$$\frac{\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma}{\iiint_M dV} \quad (\text{B.9})$$

då  $M$  krymper sig till en punkt. Här är  $M \subseteq \mathbf{R}^3$  en kropp och  $S = \partial M$  med en utåtriktad enhetsnormal  $\hat{\mathbf{n}}$  (och  $\mathbf{F}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  är en vektorfält).

Gränsvärdet av (B.9) är intressant eftersom det säger någonting om vektorfältets "källor": Om vi tänker att  $\mathbf{F}$  var hastigheten av en vätska då skulle flödet mäta hur mycket vätska rinner ut av  $M$ . I (B.9) har vi förstas normaliserat flödet med volymen av  $M$ , så gränsvärdet av (B.9) då  $M$  krymper sig ner till en punkt säger någonting om hur mycket vätska flödar ut av (eller flödar in i) punkten som  $M$  krymper sig ner till.

Och det fantastiska är att vi även kommer få ett enkelt uttryck för gränsvärdet! Uttrycket är

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) := \frac{\partial F_1}{\partial x}(\mathbf{x}) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\mathbf{x}) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.10})$$

**Sats B.6** (Gauss sats). *Låt  $M$  vara en begränsad öppen mängd i  $\mathbf{R}^3$  vars rand  $\partial M$  är en styckvis glatt slutet orienterad yta  $S$  där i varje punkt på  $S$  väljer vi enhetsnormalen  $\hat{\mathbf{n}}$  som pekar utåt från  $M$ . Då är*

$$\iiint_M \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma \quad (\text{B.11})$$

för varje begränsad och kontinuerligt deriverbart vektorfält  $\mathbf{F}$  vars definitionsmängd innehåller  $M$ .

*Bevis. (Extra material)*<sup>1</sup>. Vi bevisar Gauss sats bara i fallet  $M$  har en särskilt enkelt form. Vi antar att  $M$  kan skrivas som en mängd mellan två grafer i  $x$ -,  $y$ - och  $z$ -riktningen: Det vill säga att vi kan skriva  $M$  på tre sätt:

$$\begin{aligned} M &= \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}, \\ M &= \{(x, y, z) : (y, z) \in D, \varphi_1(y, z) \leq x \leq \psi_1(y, z)\} \quad \text{och} \\ M &= \{(x, y, z) : (z, x) \in D, \varphi_2(z, x) \leq y \leq \psi_2(z, x)\} \end{aligned}$$

för lämpliga funktioner  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \psi, \psi_1$  och  $\psi_2$ . Vi använder första omskrivning av  $M$  för att bevisa likheten

$$\iiint_M \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz = \iint_S (0, 0, F_3) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma \quad (\text{B.12})$$

med samma notation som ovan (så  $\hat{\mathbf{n}}$  är utåtriktad) och  $F_3$  är den tredje komponent av ett vektorfält  $\mathbf{F}$ . Mer precis sagt är  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ .

Beviset av (B.12) bygger på en uppgift som vi lämnar den som en övning till läsaren.

**Uppgift B.7.** *Betrakta en yta  $S$  som är grafen av en funktion  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  där  $D \subset \mathbf{R}^2$ . Visa att*

$$\iint_S G d\sigma = \iint_D G(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2} dx dy$$

för begränsade kontinuerliga funktioner  $G: S \rightarrow \mathbf{R}$ .

<sup>1</sup>Om man så vill kan man återkomma till den lilafärgade texten efter man är bekant med modulens andra innehåll.

Visa även följande formeln för flödet av en vektorfält  $F: S \rightarrow \mathbf{R}^3$  med komponent funktionerna  $F = (F_1, F_2, F_3)$ :

$$\begin{aligned} & \iint_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) \\ &= \iint_D (-F_1(x, y, f(x, y))f'_x(x, y) - F_2(x, y, f(x, y))f'_y(x, y) + F_3(x, y, f(x, y))) dx dy \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Titta på följande videoklipp där vi avslutar beviset av (B.12).



En liknande argument med andra och tredje omskrivningen av  $M$  ge likheterna

$$\begin{aligned} \iiint_M \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) dx dy dz &= \iint_S (F_1, 0, 0) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma \\ \iiint_M \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) dx dy dz &= \iint_S (0, F_2, 0) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Vi behöver knappt skriva ner beviset av (B.14): vi har helt enkelt bytt roll av variablerna  $x$ ,  $y$  och  $z$  med varandra. Om vi summerar alla likheter i (B.12) och (B.14) får vi (B.11) där  $\text{div } \mathbf{F}$  definieras i B.10.  $\square$

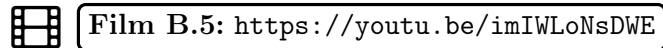
Nu ger vi ett exempel av hur man kan använda Gauss sats för att räkna ut integraler.

**Exempel B.8.** Beräkna

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$$

där  $S = \{(x, y, z): z = (1-x^2-y^2)e^{1-x^2-y^2}, x^2+y^2 \leq 1\}$ , enhetsnormalen  $\hat{\mathbf{n}}$  pekar uppåt och  $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^y \cos z, \sqrt{x^3+1} \sin z, x^2+y^2+3)$ .

Lösning.



$\square$

## Divergens och gradient igen

Nu vänder vi tillbaka till gränsvärdet av (B.9). Vi betrakta en variant av (B.9) där kroppen  $M = B_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3: |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r\}$  är ett klot av radie  $r > 0$  och medelpunkt  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^3$ . Antagandena på mängden  $M$  i vår bevis av (B.11) är uppfyllda när  $M = B_r(\mathbf{x}_0)$ , så för en  $C^1$  vektorfält  $\mathbf{F}$  kan vi skriva om (B.9) till

$$\frac{\iint_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \iiint_{B_r(\mathbf{x}_0)} \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \rightarrow \text{div}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0) \quad \text{då } r \rightarrow 0.$$

Jag hoppas att sista gränsvärdet är relativt självklart: Det är inget mer än påståendet att medelvärdet av den kontinuerliga funktionen  $\text{div}(\mathbf{F})$  över ett klot  $B_r(\mathbf{x}_0)$  går mot  $\text{div}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0)$  då  $r \rightarrow 0$ .<sup>2</sup> Därför på något sätt fångar (B.10)  $\mathbf{F}$ 's källor, eller mäter  $\mathbf{F}$  tendens att "stråla".

I flervariabelanalys har ni sätt notationen

$$\nabla F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

<sup>2</sup>Jämför med integralkalkylens medelvärdesats

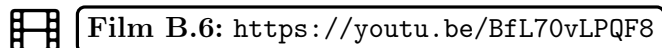
för vektorn av alla partiella derivator av en ( $C^1$ ) funktion  $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ . Vi tar notationen lite vidare och definierar en differential operator som kallas för *nablaoperatorn* och är

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Notationen tillåter oss att skriva divergens av ett vektorfält

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

där ”produkten” av till exempel  $\partial/\partial x$  och  $F_1$  i skälärprodukten tolkas som derivatan av  $F_1$  med avseende på  $x$ . Notation är även konsekvent med hur vi skrev gradienten  $\nabla F$  i flervariabelanalys. Vi kommer också använda notationen senare i kursen.



Följande sats kan visas med hjälp av vanliga räkneregler från flervariabelanalys.

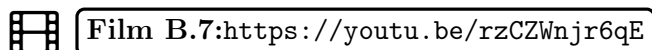
**Sats B.9.** Låt vektorfält  $\mathbf{F}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  och  $\mathbf{G}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ , och funktioner  $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  och  $G: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  vara deriverbara. Då för  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  är:

- (a)  $\nabla(\alpha F + \beta G) = \alpha \nabla F + \beta \nabla G$ ;
- (b)  $\nabla \cdot (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{F} + \beta \nabla \cdot \mathbf{G}$ ;
- (c)  $\nabla(FG) = (\nabla F)G + F(\nabla G)$ ;
- (d)  $\nabla \cdot (G\mathbf{F}) = (\nabla G) \cdot \mathbf{F} + G(\nabla \cdot \mathbf{F})$ ; och
- (e)  $\nabla \cdot (\nabla F) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$  om  $F$  är två gånger deriverbar.

## B.4 Två tillämpningar av Gauss sats

### Gauss lag i integral- och differentialform

Gauss sats visar att Coulombs lag och superpositionsprincipen är ekvivalent med Gauss lag, en av Maxwells ekvationer – fyra ekvationer som är en förenade beskrivning av elektriska och magnetiska fält. Gauss lag har två ekvivalenta former, en integral- och differentialform.



Uppgifter (B-11) och (C-5) nämnde i videoklippen är det här året uppgift B.10 nedan respektive 1.14(d) från Nikoltjeva-Hedberg med  $\Phi(r) = r^{-3}$ .

*Gauss lag i integralform* är likheten mellan den totala laddningen  $Q$  i en begänsad kropp  $M$  och flödet av elektriska fältet genom kroppens yta  $S = \partial M$ . Den säger att

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

där enhetsnormalen  $\hat{\mathbf{n}}$  är utåtriktad från  $M$ .

Gauss lag i differentialform är en partiell differentialekvation i elektriska fältet  $\mathbf{E}$  och laddningstätheten  $\rho$ . Den säger att

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Fördelen av Gauss lag i differentialform över den i integralform är att det är en lokaliserad ekvation, det vill säga att ekvationen handlar om vad händer i (en omgivning av) en punkt. Däremot är Gauss lag i integralform en relation som måste håller för varje tänkbara yta  $S$ ! Det är därför svårt att använda det för att beräkna själva fältet  $\mathbf{E}$ .

Men Gauss lag i differentialform är ändå inte perfekt: Det är en ekvation för  $\mathbf{E}$ , men  $\mathbf{E}$  är en vektorfält med tre komponenter. Så det känns som vi behöver mer information för att komma åt den elektriska fältet om vi inte har mycket symmetri vi kan använda oss av. Det kommer vi närmare till i nästa module.



[https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb's\\_law#Relation\\_to\\_Gauss's\\_law](https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb's_law#Relation_to_Gauss's_law)

**Uppgift B.10.** Låt  $S_\rho$  vara en sfär av radie  $\rho > 0$  med medelpunkt i origo och  $\mathbf{E}$  vara elektriska fältet från en punktladdning i origo (det vill säga låt  $\mathbf{E}$  vara (B.4) där  $k = 1$ ,  $q_1$  är ett givet tal och  $\mathbf{r}_1$  är origo). Beräkna  $\iint_{S_\rho} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$  där  $\hat{\mathbf{n}}$  pekar bort från origo.

## Kontinuitetsekvationen

Kontinuitetsekvationen är ett sätt att uttrycka påståendet att en fysisk storhet är konserverad. Betrakta en konserverad storhet med täthet  $\rho(x, y, z, t)$  och hastighet  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ .<sup>3</sup> Kontinuitetsekvationen är den partiell differentialekvationen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.^4 \quad (\text{B.15})$$

För att se varför det gäller kan man först övertyga sig själv att om storhet är konserverad måste

$$-\iint_{\partial M} (\rho \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \frac{d}{dt} \iiint_M \rho(x, y, z, t) dx dy dz = \iiint_M \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t} dx dy dz$$

↑  
Vi byter plats av  $\iiint$  och  $\partial/\partial t$

gäller eftersom det enda sätt att mängden av storheten i en kropp  $M$  kan ändra är genom att lämna kroppen genom sin yta  $\partial M$ . Gauss sats säger därför att

$$\iiint_M \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t} dx dy dz = - \iiint_M \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV$$

och eftersom  $M$  kan (till exempel) vara vilken öppen mängd som helst kan vi dra slutsatsen att själva integrander måste vara lika. Det vill säga vi får (B.15).

## B.5 En kort sammanfattning och en blick framåt

Grant Sanderson har ett vackert videoklipp (på engelska) som ger en bra känsla för vektorfält, divergens och rotation. Vi har förstås redan tänkt mycket på vektorfält och även divergens. Rotation (engelska: *curl*) kommer vi snart se i mer detalj, men det kan vara bra att få en smak av begreppet nu eftersom den är ett syskon till divergens.



**Film B.8:** <https://youtu.be/rB83DpBJQsE>

<sup>3</sup>Påståendet att en storhet är konserverad kallas för en *konservationslag*.

<sup>4</sup>Här tar vi divergensen i variablerna  $(x, y, z)$ .

## Lektion B.1

Efter du har gått igenom föreläsning B förbered dig för lektionen genom att göra följande uppgifter. Som vanligt kan ni ställa eventuella frågor under lektionen. Samarbeta gärna!

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 3.3
- 3.4
- 3.14
- 4.1
- 4.2
- 4.3
- 4.4
- 4.8
- 4.9

## Lektion B.2

Gör följande uppgifter. Som vanligt kan ni ställa eventuella frågor under lektionen. Samarbeta gärna!

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 1.13
- 1.14
- 4.10
- 4.11
- 4.13
- 4.14
- 4.15
- 4.17
- 4.18

# Modul C


## Gauss sats och singulära vektorfält

### Föreläsning C

Ramgard kapitel 6.

#### C.1 Singulära vektorfält

Om man är lite kreativ med hur man väljer områden och ytor kan man på något sätt tillämpa Gauss sats på mer allmänna vektorfält än de som är tillåten enligt hypoteserna i sats B.6. Kom ihåg att vi tillämpade Gauss sats i videoklipp B.7 till ett område  $M \setminus B_\rho(\mathbf{r}_1)$ . Vi tog bort bollen  $B_\rho(\mathbf{r}_1)$  från området för att undvika singulariteten i vektorfältet  $\mathbf{E}$  i origo. I nästa videoklipp utvecklar vi idén vidare och använder oss av generaliserade integraler.


 **Film C.1:** <https://youtu.be/jFbosz2fUzU>

**Exempel C.1.** Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \mathbf{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \mathbf{j} + \frac{z}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \mathbf{k}$$

genom ytan  $S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$  där vi väljer normalen så att den pekar bort från  $z$ -axeln.

*Lösning.* Vi observerar att  $\mathbf{F}$  har ett singularitet längs  $z$ -axeln och ytan  $S$  skär  $z$ -axeln i origo. Därför måste vi betrakta flödet som en generaliserad integral.

 **Film C.2:** [https://youtu.be/\\_k4bBHJjX4](https://youtu.be/_k4bBHJjX4)

Här har jag skrivit upp samma lösningen fast där jag använder cylinderkoordinater lite mer. Ytan  $S$  kan skrivas som lösningar till  $\rho^2 + (z - 1)^2 = 1$  i cylinderkoordinater. Detta ger att  $\rho = \sqrt{2z - z^2}$  och vi kan därför parametrisera ytan  $S$  (i cylinderkoordinater) med

$$\mathbf{u}(\varphi, z) = \sqrt{2z - z^2} \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z$$

med  $(\varphi, z) \in D$  där  $D = \{(\varphi, z): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\}$ . I cylinderkoordinater är

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_\rho + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{e}_z.$$

Vi kan räkna  $\mathbf{u}'_\varphi = \sqrt{2z - z^2} \mathbf{e}_\varphi$  och  $\mathbf{u}'_z = \frac{1-z}{\sqrt{2z-z^2}} \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_z$ , så

$$\mathbf{u}'_\varphi \times \mathbf{u}'_z = \sqrt{2z - z^2} \mathbf{e}_\rho + (z - 1) \mathbf{e}_z.$$

För att undvika singularitet längs  $z$ -axeln definierar vi ytan

$$S_\epsilon = \{\sqrt{2z - z^2}\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z : \epsilon \leq z \leq 2 - \epsilon, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \quad (\epsilon > 0)$$

så det sökta flödet blir

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma.$$

Låt  $D_\epsilon = \{(\varphi, z) : \epsilon \leq z \leq 2 - \epsilon, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  vara parameterområdet. Vi har då

$$\begin{aligned} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\epsilon \, dS_\epsilon &= \iint_{D_\epsilon} \mathbf{F}(\mathbf{u}(\varphi, z)) \cdot (\mathbf{u}'_\varphi \times \mathbf{u}'_z) \, d\varphi dz \\ &= \iint_{D_\epsilon} \left[ \sqrt{2z - z^2} + \frac{z^2 - z}{\sqrt{2z - z^2}} \right] d\varphi dz \\ &= 2\pi \int_\epsilon^{2-\epsilon} \frac{z}{\sqrt{1 - (z-1)^2}} dz \\ &= 2\pi \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= 2\pi \left[ \arcsin t - \sqrt{1-t^2} \right]_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \\ &= 4\pi \arcsin(1 - \epsilon). \end{aligned}$$

Av detta följer att det sökta flödet är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = 4\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arcsin(1 - \epsilon) = 2\pi^2.$$

En alternativ lösning är att tillämpa Gauss sats, men vi måste ändå när flödet genom  $S$  via ett gränsvärde. Till exempel kan vi tillämpa Gauss sats på volymen  $V_\epsilon$  mellan

$$S'_\epsilon = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, 1 - \sqrt{1 - \epsilon^2} \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}\}$$

och

$$C_\epsilon = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = \epsilon^2, 1 - \sqrt{1 - \epsilon^2} \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}\}.$$

Därmed är

$$\iint_{S'_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \iiint_{V_\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz - \iint_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$$

och

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{S'_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma.$$

Se uppgift 6 från tentan den 21:e oktober 2019. □

**Exempel C.2.** Beräkna flödet av

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

genom  $S = \{(x, y, z) : x = y^2 + z^2, x \leq 1\}$  orienterad så att  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{i} < 0$ .

Lösning.



**Film C.3:** <https://youtu.be/D3tMKGaDwLM>

Se uppgift 6 från tentan den 23:e oktober 2010. □

## C.2 Divergens i andra koordinatsystem



Film C.4: <https://youtu.be/WI23Tut4B0M>

### Cylindriska koordinater

Kom ihåg det cylindriska koordinatsystemet. Transformeringen mellan det och det kartesiska koordinatsystemet ges av

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \\y &= \rho \sin \varphi \\z &= z\end{aligned}$$

Motsvarande enhetsvektorna  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  och  $\mathbf{k}$  finns det  $\mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  och  $\mathbf{e}_z$ :<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{k}\end{aligned}\tag{C.1}$$

Observera att till skillnad från  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  och  $\mathbf{k}$  som inte beror på  $x$ ,  $y$  och  $z$  beror  $\mathbf{e}_\rho$  och  $\mathbf{e}_\varphi$  på koordinaten  $\varphi$ .

För en vektorfält  $\mathbf{F}(\rho, \varphi, z) = F_\rho(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\rho + F_\varphi(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\varphi + F_z(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_z$  som ges i cylindriska koordinater är divergensen

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\tag{C.2}$$

### Sfäriska (eller rympolära) koordinater

Kom också ihåg sfäriska koordinater. Transformeringen mellan det och kartesiska koordinatsystemet ges av

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

Motsvarande enhetsvektorna är:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}\end{aligned}$$

För en vektorfält  $\mathbf{F}(r, \theta, \varphi) = F_r(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r + F_\theta(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\theta + F_\varphi(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi$  som ges i cylindriska koordinater är divergensen

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

<sup>1</sup>Alternativ notation:  $\mathbf{e}_\rho = \hat{\rho}$ ,  $\mathbf{e}_\varphi = \hat{\varphi}$  och  $\mathbf{e}_z = \hat{z}$

<sup>2</sup>Alternativ notation:  $\mathbf{e}_r = \hat{r}$ ,  $\mathbf{e}_\theta = \hat{\theta}$  och  $\mathbf{e}_\varphi = \hat{\varphi}$



## Lektion C.1

- I föreläsningen har vi beräknat flödet genom två sidor av en "cylindrisk rättblock" för att visa första termen i formeln (C.2) för divergens. Använd samma metod på de andra fyra sidor för att göra färdigt beviset av (C.2).

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 4.19
- 4.22
- 4.23
- 4.25
- 4.26
- 8.2

# Modul D

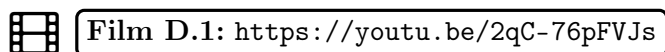
## Fysikaliskt arbete, kurvintegraler och Greens formel

### Föreläsning D

Ramgard kapitel 4 och avsnitt 7.1–7.2.

#### D.1 Linjeintegraler: definitioner

Utifrån *fysikaliskt arbete* motiverar vi en definition för ett par linjeintegraler. Först för ett skalärfält:



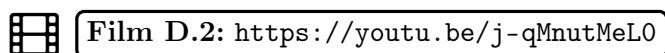
Vi definierar linjeintegraler på *orienterade* kurvor. En kurva sägs vara *orienterad* när vi har försett den med en positiv genomloppsriktning.

**Definition D.1.** *Integralen av ett skalärfält  $f$  över en orienterad linje  $L$  definieras som*

$$\int_L f ds := \int_a^b f(\mathbf{r}(u)) |\mathbf{r}'(u)| du$$

där  $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  är en kontinuerlig och styckvis kontinuerligt deriverbar parametrisering av kurvan  $L$ . Här måste  $f$ 's definitionsmängd förstås innehålla  $L \subseteq \mathbf{R}^n$ .

Från definition D.1 kan vi definierar arbetet som utförs av ett vektorfält längs en kurva  $L$ .



Om  $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  är en parametrisering av en kurva  $L$  vars derivata  $\mathbf{r}'$  är aldrig noll vet vi att  $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{r}'(u)/|\mathbf{r}'(u)|$  är en enhetstangentvektor till kurvan i punkten  $\mathbf{r}(u)$  på kurvan. Därför kan vi utifrån definition D.1 beräkna att det arbete som utförs av ett vektorfält  $\mathbf{F}$  längs  $L$  är

$$\int_L \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} ds \stackrel{\text{definition D.1}}{=} \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(u)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(u)}{|\mathbf{r}'(u)|} |\mathbf{r}'(u)| du = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) du.$$

## D.2 Linjeintegraler: exempel

Alternativ notation för arbete:

$$\int_L \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{t}} ds = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_L (F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz)$$

där vektorfältet  $\mathbf{F}$  har komponenterna  $(F_1, F_2, F_3)$ .



Film D.3: <https://youtu.be/QmHaxWtcGpk>

Uppgift D.2. Beräkna

$$\int_L -ydx + xdy + dz$$

där  $L$  ges av  $\mathbf{r}: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{r}(u) = (\cos u, 2 \sin u, 2u)$ .

Lösning. Vi löser uppgiften i följande videoklipp:



Film D.4: <https://youtu.be/x9dkgQSNQYE>

□

## D.3 Greens formel

Vi kallar en kurva  $L$  *styckvis glatt* om den har en parametrering som är kontinuerlig och styckvis kontinuerligt deriverbar. En sluten kurva sägs vara *orienterad moturs* eller *orienterad medurs* om den försedda positiva genomloppsriktningen är moturs respektive medurs. I fortsättningen antas varje vald parametrering  $\mathbf{r}(u)$  vara konsekvent med kurvans orientering, det vill säga att växande  $u$ -värden svarar mot rörelse i positiv riktning längs  $L$ .

**Sats D.3** (Greens formel). Låt  $P(x, y)$  och  $Q(x, y)$  vara två funktioner definierade och kontinuerligt deriverbara i området  $D \subset \mathbf{R}^2$ . Anta att  $D$ 's randkurva  $L$  är sluten styckvis glatt kurva som är orienterad moturs. Då är

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_L (P(x, y)dx + Q(x, y)dy)$$



Film D.5: [https://youtu.be/pE1p6B\\_Jymw](https://youtu.be/pE1p6B_Jymw)

**Uppgift D.4.** Anta att ett område  $D \subset \mathbf{R}^2$  har en sluten styckvis glatt och orienterad randkurva  $L$ . Bevisa med hjälp av Green's formel att arean av ett område  $D$  ges av formeln

$$\frac{1}{2} \int_L (-ydx + xdy)$$

där  $L$  ges av  $\mathbf{r}: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{r}(u) = (\cos u, 2 \sin u, 2u)$ .

Lösning. Vi löser uppgiften i följande videoklipp:



Film D.6: <https://youtu.be/00VpGQxqQR4>

□

## Lektion D.1

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 5.1
- 5.2
- 5.3
- 5.4
- 5.5
- 5.6

## Lektion D.2

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 5.7
- 5.8
- 5.9
- 5.11
- 5.13
- 5.14
- 5.15

# Modul E

## Rotation och Stokes sats

### Föreläsning E

Ramgard kapitel 7.

#### E.1 Rotation

I första videoklipp motiverar vi definitionen av rotation utifrån en önskamål att mäta hur mycket ett vektorfält roterar i ett utvalda plan



**Film E.1:** <https://youtu.be/Wp4azwdZHrs>

Här betonar vi skillnaden mellan randkurvor vi betraktar här jämfört med begreppet av rand från flervariabelanalys. Randkurvan av ett område i planet stämmer överens med det vi kallade för områdets rand i flervariabelanalys, men nu börjar vi pratar om randkurvor till ytor i  $\mathbf{R}^3$  och då är de olika begrepp. Enligt definitionen från flervariabelanalys är hela ytan en del av en ytas rand, men om vi jämför en yta med ett blad papper är randkurvan bara bladets rand.



**Film E.2:** <https://youtu.be/PcqV0JG2VXI>

Med hjälp från Greens formeln beräknar vi en formel för rotation i det kartesiska koordinatsystemet.



**Film E.3:** <https://youtu.be/B8tXEk3hJN0>

Formeln är

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

där  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ .

Istället för att spela in en videoklipp om hur man kan räkna med formeln räknar jag lite här i texten. Se också avsnitt A.4.

**Exempel E.1.** Beräkna rot  $\mathbf{F}$  i följande fall:

(a)  $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-y}\mathbf{i} + e^{-z}\mathbf{j} + e^{-x}\mathbf{k}$ ; och

(b)  $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xz\mathbf{i} - x^2\mathbf{k}$ .

Lösning. (a) Vi räknar att

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{-y} & e^{-z} & e^{-x} \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial e^{-x}}{\partial y} - \frac{\partial e^{-z}}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial e^{-y}}{\partial z} - \frac{\partial e^{-x}}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial e^{-z}}{\partial x} - \frac{\partial e^{-y}}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= e^{-z} \mathbf{i} + e^{-x} \mathbf{j} + e^{-y} \mathbf{k}\end{aligned}$$

(b) Vi räknar också att

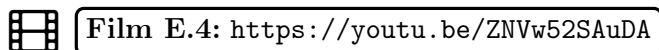
$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3xz & 0 & -x^2 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial(-x^2)}{\partial y} - \frac{\partial(0)}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial(3xz)}{\partial z} - \frac{\partial(-x^2)}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(3xz)}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= 5x\mathbf{j}.\end{aligned}$$

□

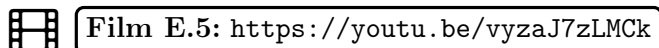
Om du vill prova ett par exempel kan du till exempel prova **NH**: 1.11 och 1.12. Även 1.14 kan vara rolig.

## E.2 Stokes sats

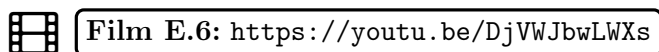
Först motiverar vi satsen med någon slags bevis:



Sen går vi igenom ett par exempel. Först där vektorfältet är kontinuerligt deriverbart i hela  $\mathbf{R}^3$ :



Och sen där vektorfältet är odefinierad längs  $z$ -axeln. I sådana fall får vi inte tillämpa Stokes sats till ytor som skär  $z$ -axeln. Vi upptäcker att en yta som har en randkurva med två komponenter kan vara till nytta:



## Lektion E.1

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 6.1
- 6.2
- 6.3
- 6.5
- 6.6
- 6.8
- 6.10

## Lektion E.2

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 6.11
- 6.16
- 6.17
- 6.18
- 6.19

# Modul F

## Potentialfält

### Föreläsning F

Ramgard avsnitt 3.2.

#### F.1 Potentialfält

I första videoklipp utreda vi vad man kan säga om arbetet  $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  när kraften  $\mathbf{F}$  kan skrivas som gradienten av en funktion  $\phi$ .



**Film F.1:** [https://youtu.be/x\\_WQfKybmK0](https://youtu.be/x_WQfKybmK0)

Vi ser att arbetet beror endast på kurvans ändpunkter och inte om vägen mellan punkterna. Vi kallar vektorfält som kan skrivas  $\mathbf{F} = \text{grad } \phi$  för *potentialfält* och funktionen  $\phi$  för en *potential*.

I andra videoklipp ser vi att Coulombs lag  $\mathbf{F}$  är ett exempel av ett potentialfält. Dessutom kan vi räkna att  $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$  (där  $\mathbf{F}$  ges av Coulombs lag). Jag påstår att det var ingen slump. Vi även definierar vad vi menar med en *enkel sammanhängande mängd*. Vi kommer ha nyttja av begreppet i följande avsnitt.



**Film F.2:** <https://youtu.be/GqG210wGU-k>

I tredje videoklipp visar vi följande satsen.

**Sats F.1.** *Anta att vektorfältet  $\mathbf{F}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  är kontinuerligt deriverbart öven en enkel sammanhängande mängd  $\Omega$ . Då gäller att följande villkor är ekvivalenta.*

(i)  $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  är oberoende av vägen  $\Gamma$  tar mellan sina ändpunkterna (där  $\Gamma$  är en styckvis  $C^1$ -kurva).

(ii) Det existerar en funktion  $\phi: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  sådan att  $\mathbf{F} = \text{grad } \phi$  i  $\Omega$ .

(iii)  $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$  i  $\Omega$ .

(iv)  $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  för alla slutna styckvis  $C^1$ -kurvor  $\Gamma$  i  $\Omega$ .

*Bevis.* Vi bevisar (i)  $\implies$  (ii)  $\implies$  (iii)  $\implies$  (iv)  $\implies$  (i):



**Film F.3:** <https://youtu.be/uHiYfHeqUzA>

□

Vi går igenom ett exempel av hur man kan beräkna alla potential av ett vektorfält:





Film F.4: <https://youtu.be/O7fE1TV-51k>

Och sist funderar vi på vad kan gå fel om antagandet att  $\Omega$  är en enkel sammanhängande mängd inte är uppfylld:



Film F.5: <https://youtu.be/4QFMwDHEgns>

## F.2 Vektorfält i $\mathbf{R}^2$

Alla våra diskussioner i den här modulen har varit där vektorfält och potentialer är definierade i delmängder av  $\mathbf{R}^3$ . Man kan förstås utföra en motsvarande utredning där definitionsmängder är delmängder av  $\mathbf{R}^2$ . De allra mest är identiskt och sats F.1 gäller utan ändringar, men en fråga kring vad man menar med rotationen av ett vektorfält i  $\mathbf{R}^2$  kan uppstå. Det enklaste sätt att handera problemet är att tolka  $\mathbf{F}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$  som ett vektorfält definierad i  $\Omega \times \mathbf{R}$ : Om  $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$  för  $(x, y) \in \Omega$  kan vi utvidga vektorfältet till  $\Omega \times \mathbf{R}$  genom att definierar  $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0)$ . I så fall kan man räkna att rotationen aldrig har någon nollskilda  $\mathbf{i}$  eller  $\mathbf{j}$  komponenter:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x, y) & F_2(x, y) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Det går därför lika bra att stryka vektorn  $\mathbf{k}$  och definiera  $\text{rot } \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \right)$  i fallet  $\mathbf{F}$  är ett vektorfält i  $\mathbf{R}^2$ .

Svaret på frågan om en mängd är enkel sammanhängande eller inte kan ser olika ut även där mängderna ser ganska lika ut. Observera till exempel att  $\mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  är enkel sammanhängande men  $\mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  inte är det.

## Lektion F.1

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 7.1
- 7.2
- 7.3
- 7.4
- 7.6
- 7.7
- 7.8
- 7.10
- 7.12

Från Ramgard:

- 27
- 32

# Modul G

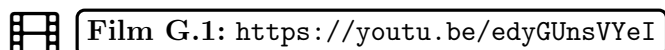
## Kroklinjiga koordinatsystem

### Föreläsning G

Ramgard kapitel 10.

#### G.1 Introduktion

I första videoklipp introducerar vi vad vi menar med ett kroklinjigt koordinatsystem. I grunden är det ett variabelbyte  $\mathbf{r}$  från  $(u_1, u_2, u_3)$ -rummet till  $(x, y, z)$ -rummet:



Koordinatsystemet kallas för *ortogonalt* om

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} = 0 \quad \text{för } i \neq j$$

Vi normaliserar partiella derivator av  $\mathbf{r}$  för att skapa ett *basvektorsystem*  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ :

$$\mathbf{e}_i := \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \quad \text{där } h_i := \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|$$

Med hjälp av basvektorsystemet kan man skriva ett vektorfält  $\mathbf{A}$  i  $(u_1, u_2, u_3)$ -koordinater:

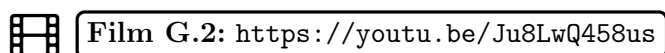
$$\mathbf{A}(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i=1}^3 A_i(u_1, u_2, u_3) \mathbf{e}_i(u_1, u_2, u_3)$$

I ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem motsvarar räkneregler för skalär och kryss produkten de vi har sett tidigare:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \sum_{i=1}^3 A_i(u_1, u_2, u_3) B_i(u_1, u_2, u_3) \quad \text{och} \\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1(A_2 B_3 - A_3 B_2) + \mathbf{e}_2(A_3 B_1 - A_1 B_3) + \mathbf{e}_3(A_1 B_2 - A_2 B_3). \end{aligned} \tag{G.1}$$

#### G.2 Exempel: cylinderkoordinater

I andra avsnitt tittar vi på cylinderkoordinater:



Med  $(u_1, u_2, u_3) = (\rho, \varphi, z)$  har vi

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$$

så

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1).$$

Därför är

$$h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1.$$

och

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

$$\mathbf{e}_z = \frac{1}{h_z} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1).$$

### G.3 Exempel: sfäriska koordinater

I tredje avsnitt tittar vi på sfäriska koordinater:



**Film G.3:** <https://youtu.be/Gu9wCfWPIoU>

Med  $(u_1, u_2, u_3) = (r, \theta, \varphi)$  har vi

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi, z) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

så

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0).$$

Därför är

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.$$

och

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

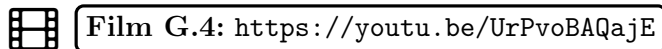
$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).$$

## G.4 Transformation av operatorer

Till skillnad från (G.1) kan vi inte överföra formlerna för gradient, divergens och rotation direkt från kartesiska koordinater till kroklinjiga koordinater. Anledningen för det är att  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  är konstanter medan  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  kan bero på koordinaterna och derivatorna handlar förstås om vad händer när vi varierar koordinaterna.

I följande videoklipp härledar vi en formel för gradienten i ett kroklinjigt koordinatesystem:



Om  $\mathbf{r}$  är ett variablebyte från ett ortogonalt kroklinjigt koordinatesystem  $(u_1, u_2, u_3)$  till kartesiska koordinater  $(x, y, z)$  och  $\tilde{\phi}$  är en skalär funktion av variablerna  $(u_1, u_2, u_3)$  är

$$\text{grad } \tilde{\phi} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial u_3} \mathbf{e}_3.$$

Man kan förstås också härleda formler för divergens och rotation i kroklinjiga koordinatsystem, men vi skriver bara resultaten här. Om ett vektorfält kan skrivas  $\mathbf{F}(u_1, u_2, u_3) = F_1(u_1, u_2, u_3)\mathbf{e}_1 + F_2(u_1, u_2, u_3)\mathbf{e}_2 + F_3(u_1, u_2, u_3)\mathbf{e}_3$  är

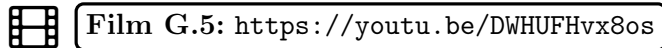
$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right)$$

och

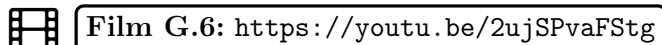
$$\text{rot } \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}.$$

Jämför formlerna här med vad vi såg i C.1.3.

Följande videoklipp är ett exempel av hur man kan använda formlerna ovan:



Ett mer omfattande exempel som är ett litet manageri av räkningar:



## Lektion G.1

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 8.1
- 8.2
- 8.3
- 8.4
- 8.5
- 8.6
- 8.7
- 8.8
- 8.9

## Lektion G.2

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 8.7
- 8.8
- 8.9
- 8.10
- 8.11
- 8.12
- 8.13
- 8.14
- 8.15

# Modul H

## Gauss och Stokes sats i kroklinjiga koordinatsystem

### Föreläsning H


Ramgard kapitel 10.

Gauss och Stokes sats är inte bunden till något särskilt koordinatsystem, men för att använda de i kroklinjiga koordinatsystem måste vi lista ut hur vi räknar flöde, cirkulation, med mera i kroklinjiga koordinatsystem.


I modul G har vi räknat formler för divergensen och rotationen av ett vektorfält så det är bara integralerna i satserna som står kvar att förstå. Därför kunde en alternativ rubrik för modulen vara ”Integraler i kroklinjiga koordinatsystem”.

#### H.1 Volymintegraler

I första videoklipp nämnar jag några viktiga integraler och pratar om hur man kan beräkna volymintegraler i kroklinjiga koordinatsystem:


 **Film H.1:** [https://youtu.be/DB\\_XybVPcZc](https://youtu.be/DB_XybVPcZc)

Sen går vi igenom ett exempel av en volymintegral och säger även ett par ord om vektorfält med singulariteter:


 **Film H.2:** <https://youtu.be/RDhoF1867AU>

#### H.2 Linjeintegraler


Näst går vi igenom vad vi menar med en kurvintegral i kroklinjiga koordinater:

 **Film H.3:** <https://youtu.be/IqBsVv-i6Mk>

Och sen beräknar ett exempel av en kurvintegral:

 **Film H.4:** <https://youtu.be/yXGstyS600A>

Vi kan även dubbelkolla att man får samma svar när man gör beräkningarna i Cartesiska koordinater:

 **Film H.5:** <https://youtu.be/sKAQzpqZze0>

### H.3 Ytintegraler

Istället för att försöka härleda en allmän formel för en ytintegral i kroklinjiga koordinater betrakta vi ett par exempel som illustrerar hur vi kan räkna. Först härledar vi en formel av en ytintegral över en koordinatyta:



**Film H.6:** <https://youtu.be/r811022t1No>

Och sen räkna vi ett exempel:



**Film H.7:** <https://youtu.be/k7MGgZTIen4>

Till slut betraktar vi en mer allmänt exempel där vi får en parametrisering av ytan som ges som en linjärkombination av basvektorerna för koordinatsystemet.



**Film H.8:** <https://youtu.be/jaIaGcyCyp8>

### H.4 Exempel på derivator av basvektorer: cylinderkoordinater

Vi har att  $\mathbf{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$  så

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \rho} = (0, 0, 0) = \mathbf{0} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = \mathbf{e}_\varphi \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial z} = (0, 0, 0) = \mathbf{0},$$

och  $\mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$  så

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \rho} = (0, 0, 0) = \mathbf{0} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = (-\cos \varphi, -\sin \varphi, 0) = -\mathbf{e}_\rho \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial z} = (0, 0, 0) = \mathbf{0},$$

och  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$  så

$$\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} = (0, 0, 0) = \mathbf{0}.$$

## Lektion H.1

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 8.16
- 8.17
- 8.18
- 8.19
- 8.20

## Lektion H.2

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 8.22

Från Ramgard:

- 113
- 115
- 117

**Tips:** Här skriver jag ett par anmärkningar angående uppgifter från Ramgard.


- 113 (a) Meningen här är att se vad händer om man tillämpar Gauss sats utan att kontrollera satsens antaganden, så försök inte att ta hänsyn till vektorfältets singularitet.
- 113 (b)  $S_1$  och  $S_2$  är sfärer med medelpunkter i origo (och  $R_1 \neq R_2$ ). Uppgiften visar oss hur vi kan ta hänsyn till singulariteten.
- 115 Dela upp vektorfältet i två delar:  $\text{grad}(1/\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2})$  och  $\text{grad}(xy^3)$ . Första delen kan se bekant ut från uppgift 113 eller Coloumbs lag, men se även sats 11.1 i Ramgard.
- 117 (a) Här är det meningen att man tillämpar Gauss sats på ett lämpligt sätt – det vill säga man tillämpar satsen på ytor som inte omslutar vektorfältets singulariteter. Det enklaste är att delar upp vektorfältet i två delar –  $\text{grad}(\ln \rho)$  och  $\text{grad}(1/\sqrt{\rho^2 + z^2})$  – och tillämpar Gauss sats på båda delar. Första delen kan jämföras med andra lösning till exempel 11.2 i Ramgard. Återigen kan andra delen kan se bekant ut från uppgift 113 eller Coloumbs lag, men se även sats 11.1 i Ramgard.

# Modul I


## Sammanfattning av kursen

### Föreläsning I


Här svarar jag på er frågor:

 **Film I.1:** [https://youtu.be/sqk\\_gcX1DgQ](https://youtu.be/sqk_gcX1DgQ)


En genomgång av parametriseringar:

 **Film I.2:** <https://youtu.be/hM71tHprWSs>


Flöde och andra ytintegraler:

 **Film I.3:** <https://youtu.be/S09datW1E2A>

Hur jag tänker när jag skriver tentauppgifter:

 **Film I.4:** <https://youtu.be/6vXregQeLd4>

Ett exempel av en tentauppgift med en lösning:

 **Film I.5:** <https://youtu.be/517QGGJGWDc>

### Lektion I.1

Repetition.



# Sakregister

- arbete (fysikaliskt), 25–26
- area, 14, 26
- avbildning, 7
  
- Coulombs lag, 11
- cylindriska koordinater, 23
  
- definitionsområde, 5
- derivata, 5, 8
- divergens, 10, 19
  - cylindriska koordinater, 23
  - sfäriska koordinater, 23
- Divgens sats, *se* Gauss sats
  
- elektrisk fält, 12
- elektrisk laddning, 11
  
- flöde, 15
- funktion, 5–9
- fysikaliskt arbete, *se* arbete (fysikaliskt)
  
- Gauss lag, 18–19, 19
- Gauss sats, 16
- glatt
  - kurva, 26
  - yta, 14
- gradient, 9
  
- integral, 5
  - generaliserad, 21, 22
  - linje-, 25, 36
  - volym-, 36
  - yt-, 14, 37
  
- konservationslag, 19
- kontinuerlig, 7
- kontinuitetsekvationen, 19
- kurva, 7–8
  
- målmängd, 5
- magnitud, *se* storlek
- massa, 11
  
- nablaoperatör, 18
- nivåkurva, 5
- nivåområde, 5
- nivåyta, 5
  
- orientering
  - kurva, 25
  - med- eller moturs, 26
  - yta, 14
  
- parameterframställning, *se* parametrisering
- parametrisering, 7, 9
  
- rand, *se även* randkurva, 16, 28
- randkurva, 26, 28
- riktning, 6
- rotation, 10, 19, 28–29
- rymdpolära koordinater, *se* sfäriska koordinater
  
- sfäriska koordinater, 23
- skalärfält, 7
- skalärprodukt, 7
- sluten, 7
- storlek, 6
- styckvis glatt
  - se yta
  - glatt 14
- superpositionsprincipen, 12
  
- tangentvektor, 8
  
- värdeområde, 7
- vektorfält, 6, 19
  
- yta, 8–9