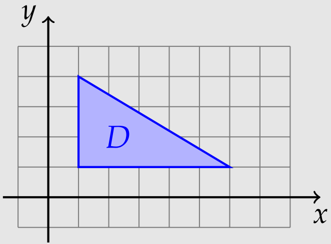
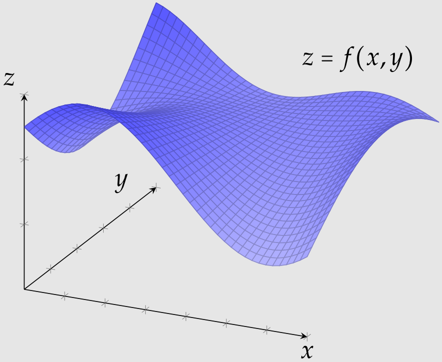
TATA69 Flervariabelanalys

# Dubbelintegral: tolkning, uppskattning, rimlighetskontroll, symmetri, falluppdelning

Hans Lundmark, MAI, LiU

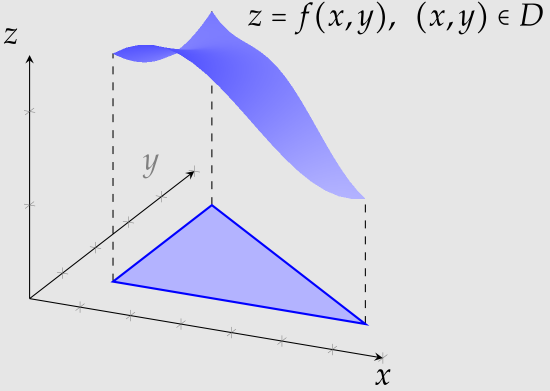
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$




Integrationsområde $D$ (begränsad mängd i $\mathbf{R}^2$).
Integrand $f(x,y)$ (funktion som är begränsad på $D$).

# Volymtolkning av dubbelintegral

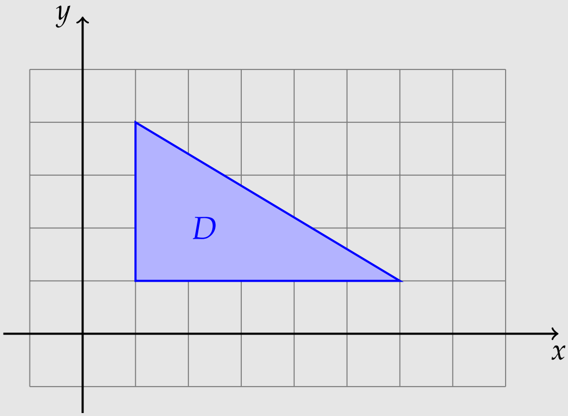


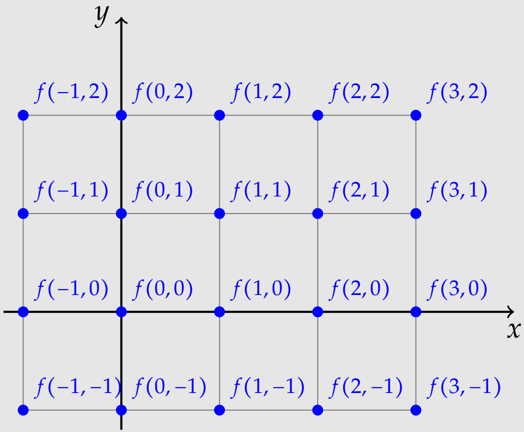

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \text{volymen av kroppen ovan, förutsatt att } f(x,y) \geq 0 \text{ för } (x,y) \in D$$

Volymen räknas ”med tecken” om $f$ antar negativa värden också:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = (\text{volymen ovanför } xy\text{-planet}) - (\text{volymen under } xy\text{-planet})$$

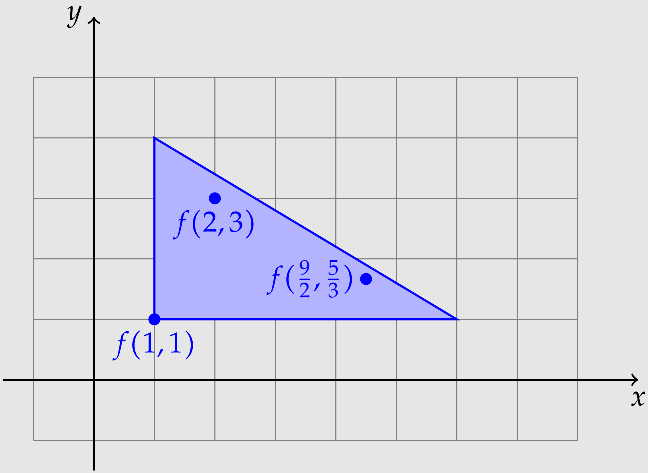
# Tolkning som ”oändligt förfinad summa”



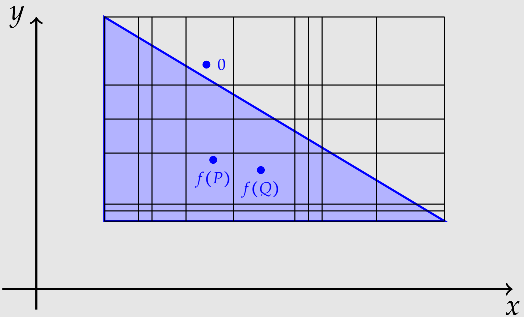

Integrationsområde $D$, integrand $f(x, y)$.

Betrakta funktionsvärdena $f(x,y)$ för alla punkter $(x,y) \in D$:




De är överuppräkneligt många, så vi kan inte bara summera allihop rakt av.

Men vi kan lägga in ett rutnät som täcker $D$, ta en punkt $P$ i varje ruta, läsa av funktionsvärdet $f(P)$ (eller noll om $P \notin D$), multiplicera detta med den rutans area, och summera dessa produkter över alla rutor (vanlig ändlig summa):




$$\boxed{\sum_i \sum_j f(P_{ij}) \Delta x_i \, \Delta y_j \to \iint_D f(x,y)\, dx dy}$$ då rutnätets finhet går mot noll

Specialfall: om $\boxed{f(x,y) = 1}$ för alla $(x,y) \in D$ så är

$$\sum_i \sum_j f(P_{ij}) \Delta x_i \, \Delta y_j$$

$= \text{summan av areorna av de rutor där } P_{ij} \in D$

$\approx \text{arean av } D$

Såvida inte $D$:s **rand** är alltför konstig kan denna approximation göras godtyckligt bra genom att ta ett tillräckligt fint rutnät:

$$\boxed{\iint_D dx dy = \text{Area}(D)}$$

Om $f(x,y) \geq 0$ representerar **massdensiteten** (massa per areaenhet) i punkten $(x,y)$ hos en platta vars form beskrivs av $D$, så är

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \text{plattans totala massa}}$$

Om $f(x,y)$ representerar den **elektriska laddningstätheten** (laddning per areaenhet, kan vara positivt såväl som negativt) i punkten $(x,y)$ hos en platta vars form beskrivs av $D$, så är

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \text{den totala mängden laddning i plattan}}$$

Motsvarande tolkningar fungerar även för **trippelintegraler**:

$$\boxed{\iiint_D dxdydz = \text{Volym}(D)}$$

samt

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \text{totala massan/laddningen hos kroppen } D \text{ i } \mathbf{R}^3}$$

om $f(x,y,z)$ beskriver massan/laddningen per **volymsenhet** i punkten $(x,y,z)$.

Volymtolkningen av dubbelintegral funkar däremot sämre för trippelintegraler:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \text{volymen i } \mathbf{R}^3 \text{ mellan } xy\text{-planet och ytan } z = f(x,y)$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \text{hypervolymen i } \mathbf{R}^4 \text{ mellan } xyz\text{-hyperplanet och hyperytan } w = f(x,y,z)$$

Svårt att visualisera!

# Uppskattning

Antag att vi känner till en undre och en övre begränsning av **integranden** (dvs. av funktionen som ska integreras):

$$m \leq f(x,y) \leq M \quad \text{för alla } (x,y) \in D.$$

Då får vi även en undre och en övre begränsning av **integralen** (dvs. det tal som vi räknar ut när vi integrerar):

$$\iint_D m\,dxdy \leq \iint_D f(x,y)\,dxdy \leq \iint_D M\,dxdy$$

$$\boxed{m \cdot \mathrm{Area}(D) \leq \iint_D f(x,y)\,dxdy \leq M \cdot \mathrm{Area}(D)}$$

Från förra sidan:

$$m \cdot \text{Area}(D) \leq \iint_D f(x,y)\,dxdy \leq M \cdot \text{Area}(D)$$

Om $\text{Area}(D) > 0$ får vi därmed

$$\boxed{m \leq \frac{\iint_D f(x,y)\,dxdy}{\text{Area}(D)} \leq M}$$

(Och fallet $\text{Area}(D) = 0$ är inte så intressant, för då är ju $\iint_D f(x,y)\,dxdy = 0$ oberoende av vad $f$ är.)

## Medelvärde

Vanligt aritmetiskt medelvärde av talen $a_k$ för $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

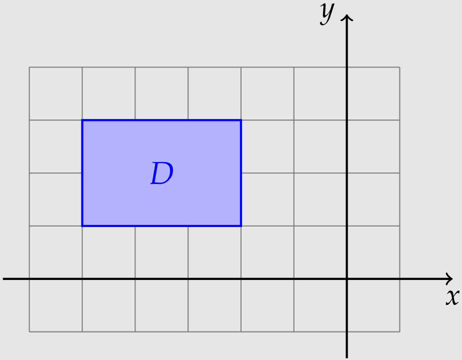
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{1 + 1 + \cdots + 1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

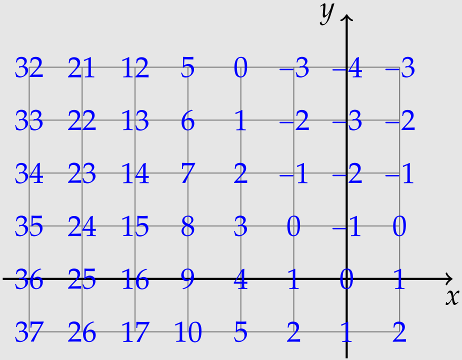
Medelvärde av överuppräkneligt många funktionsvärden $f(x, y)$ för $(x, y) \in D$:

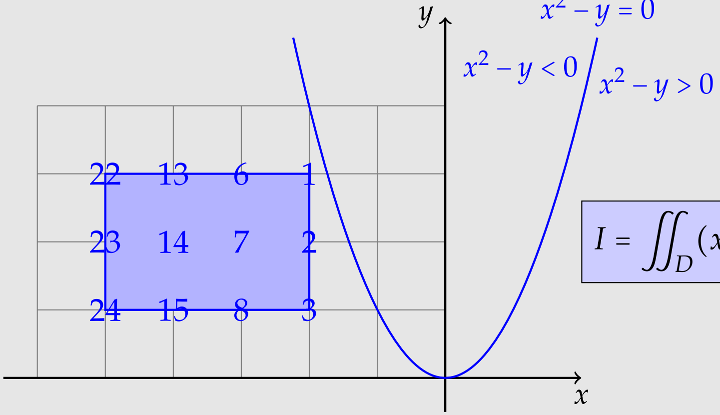
$$\boxed{\frac{\iint_D f(x,y)\,dxdy}{\iint_D dxdy} = \frac{\iint_D f(x,y)\,dxdy}{\text{Area}(D)}}$$

Enligt förra sidan ligger detta medelvärde mellan $m$ och $M$ ifall $f(x, y)$ gör det för varje $(x, y) \in D$. Om $f$ är kontinuerlig och $D$ är kompakt och sammanhängande finns det (minst) en punkt $(x_0, y_0) \in D$ sådan att $f(x_0, y_0)$ är lika med medelvärdet (**medelvärdessatsen för dubbelintegraler**).

**Exempel.** Uppskatta och beräkna $I = \iint_D (x^2 - y)\, dx dy$ där $D = [-5, -2] \times [1, 3]$.






$$I = \iint_D (x^2 - y)\,dxdy$$

- $x^2 - y > 0$ för alla $(x, y) \in D$, så $I > 0$.
- $1 \le x^2 - y \le 24$ för alla $(x, y) \in D$, och $\text{Area}(D) = 6$, så $6 \le I \le 144$.
- Medelvärdet av $x^2 - y$ på $D$ är kanske mellan 10 och 15, så $60 \lesssim I \lesssim 90$?

Uträkning:

$$I = \int_{x=-5}^{-2} \left( \int_{y=1}^{3} (x^2 - y)\,dy \right) dx = \int_{x=-5}^{-2} \left[ x^2 y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{3} dx$$

$$= \int_{x=-5}^{-2} \left( 2x^2 - 4 \right) dx = \left[ \frac{2x^3}{3} - 4x \right]_{x=-5}^{-2} = \cdots = \boxed{66}$$

Eller kanske såhär:

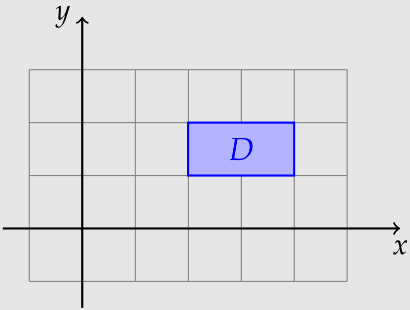
$$I = \iint_D x^2\,dx\,dy - \iint_D y\,dx\,dy$$

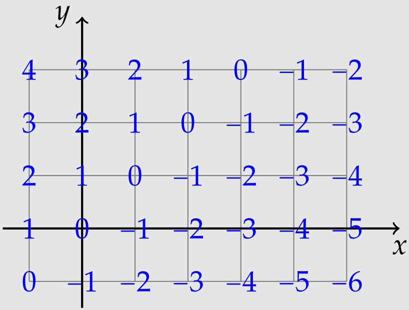
$$= \left( \int_{x=-5}^{-2} x^2\,dx \right) \left( \int_{y=1}^{3} dy \right) - \left( \text{medelvärdet av } y \text{ på } D \right) \cdot \text{Area}(D)$$

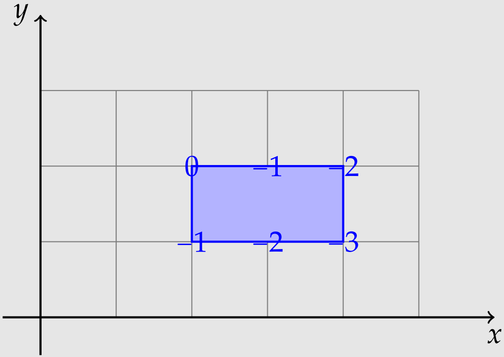
$$= 2 \int_{x=2}^{5} x^2\,dx - 2 \cdot 6 = 2 \cdot \frac{5^3 - 2^3}{3} - 12 = \boxed{66}$$

(Så **medelvärdet** av $x^2 - y$ på $D$ visade sig vara $66/\,\text{Area}(D) = 66/6 = 11$.)

**Exempel.** Uppskatta och beräkna $I = \iint_D (y - x)\,dxdy$ där $D = [2, 4] \times [1, 2]$.





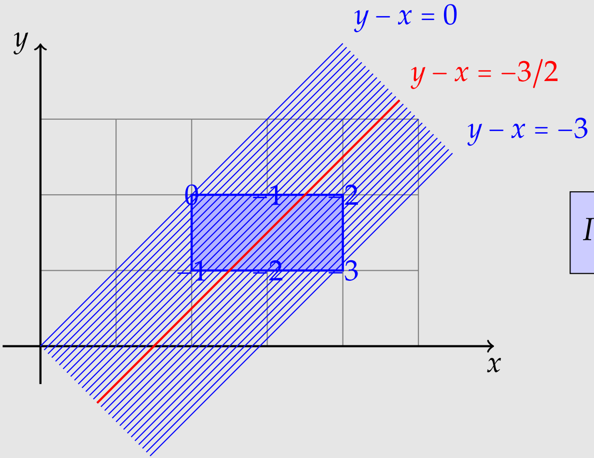

$$\boxed{I = \iint_D (y-x)\,dxdy}$$

- Randen $\partial D$ har arean noll och ger därför inget bidrag till integralen, så

$$I = \iint_D (y-x)\,dxdy = \iint_{D^\circ} (y-x)\,dxdy$$

där $D^\circ = ]2,4[ \times ]1,3[$ är $D$:s inre.

- $-3 < y - x < 0$ för alla $(x,y) \in D^\circ$, och $\mathrm{Area}(D^\circ) = \mathrm{Area}(D) = 2$, så $\boxed{-6 < I < 0}$.




$$\boxed{I = \iint_D (y - x)\, dx dy}$$

- Medelvärdet av $y - x$ på $D$ är $-3/2$, eller hur?
  (Obs! Ta noga hänsyn till utseendet hos både nivåkurvorna och $D$.)
- Alltså $I = (-3/2) \cdot \mathrm{Area}(D) = \boxed{-3}$.

Uträkning, för den som tvivlar:

$$I = \int_{x=2}^{4} \left( \int_{y=1}^{2} (y - x) dy \right) dx = \int_{x=2}^{4} \left( \frac{3}{2} - x \right) dx = \frac{3}{2} \cdot 2 - \frac{12}{2} = \boxed{-3}$$

Eller kanske såhär:

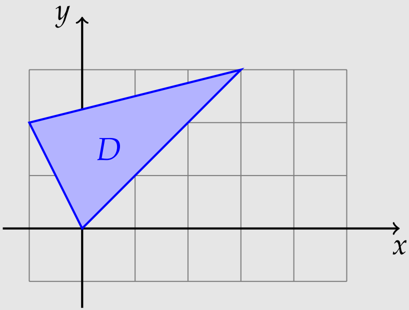
$$\begin{aligned} I &= \iint_D y \, dx dy - \iint_D x \, dx dy \\ &= \big(\text{medelvärdet av } y \text{ på } D\big) \cdot \text{Area}(D) - \big(\text{medelvärdet av } x \text{ på } D\big) \cdot \text{Area}(D) \\ &= \frac{3}{2} \cdot 2 - 3 \cdot 2 = \boxed{-3} \end{aligned}$$

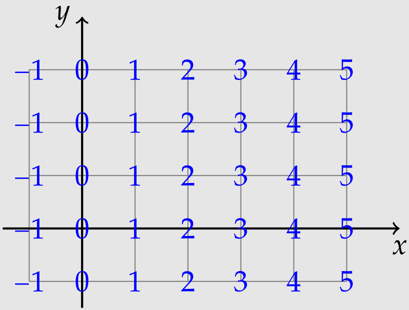
# Symmetri

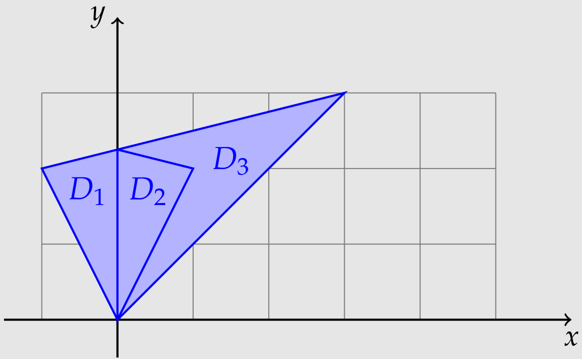
Uträkning och uppskattning av integraler kan ibland förenklas betydligt med hjälp av **symmetriresonemang**.

Obs! Ta noga hänsyn till både integranden och integrationsområdet!

**Exempel.** Avgör om $I = \iint_D x \, dx dy$ är positiv eller negativ (med $D$ enl. fig.).



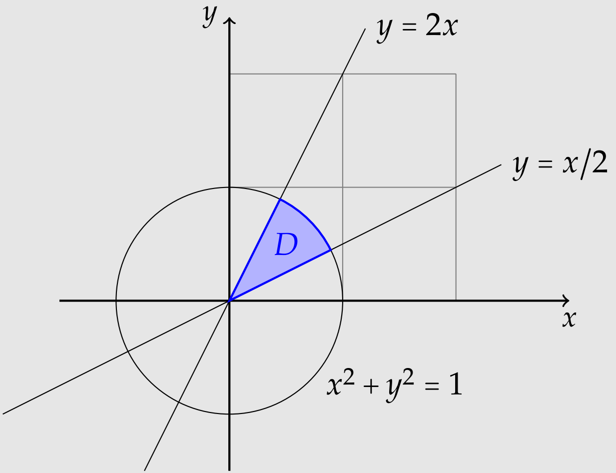



$$\iint_{D_1} x\,dxdy + \iint_{D_2} x\,dxdy = 0 \quad \text{p.g.a. symmetri}$$

$$\Longrightarrow \qquad I = \iint_{D} x\,dxdy = \iint_{D_3} x\,dxdy > 0$$

**Svar:** $I$ är positiv.

**Exempel.** Beräkna $\boxed{I = \iint_D x^2\,dx\,dy}$ där $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ \frac{x}{2} \le y \le 2x\right\}$.



I polära koordinater $(x, y) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ motsvaras $D$ av området

$$E = \left\{(\rho, \varphi) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le \rho \le 1,\ \arctan\tfrac{1}{2} \le \varphi \le \arctan 2\right\}.$$

Direkt uträkning:

$$I = \iint_D x^2\,dxdy = \iint_E (\rho\cos\varphi)^2\,\rho\,d\rho d\varphi = \left(\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right)\underbrace{\left(\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\arctan 2} \cos^2\varphi\,d\varphi\right)}_{\text{lite jobbig}} = \cdots$$

Med symmetriknep:

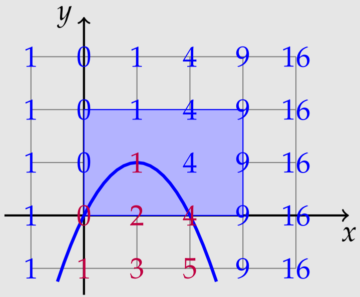
$$I = \iint_D x^2\,dxdy = \iint_D y^2\,dxdy \quad \text{p.g.a. symmetri}$$

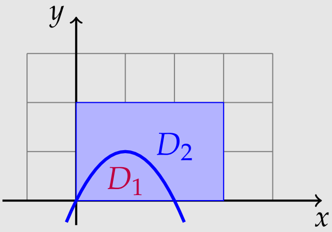
$$\Longrightarrow \quad I = \frac{I + I}{2} = \iint_D \frac{x^2 + y^2}{2}\,dxdy = \left(\int_0^1 \frac{\rho^3}{2}\,d\rho\right)\underbrace{\left(\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\arctan 2} d\varphi\right)}_{\text{mycket enklare}} = \frac{\arctan 2 - \arctan\frac{1}{2}}{8}$$

# Falluppdelning

**Exempel.** Beräkna $I = \iint_D \max(2x - y, x^2)\, dx dy$ där $D = [0,3] \times [0,2]$.

$$\max(2x - y, x^2) = \begin{cases} 2x - y, & 2x - y \geq x^2 \quad (\iff y \leq 2x - x^2) \\ x^2, & \text{annars} \end{cases}$$






$$\max(2x-y,x^2)=\begin{cases}2x-y, & (x,y)\in D_1\\ x^2, & (x,y)\in D_2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D \max(2x-y,x^2)\,dxdy = \iint_{D_1}(2x-y)\,dxdy + \iint_{D_2} x^2\,dxdy\\
&= \iint_{D_1}(2x-y)\,dxdy + \left(\iint_D x^2\,dxdy - \iint_{D_1} x^2\,dxdy\right)\\
&= \iint_{D_1}(2x-y-x^2)\,dxdy + \iint_D x^2\,dxdy\\
&= \int_{x=0}^{2}\left[\frac{-(2x-x^2-y)^2}{2}\right]_{y=0}^{2x-x^2} dx + \left(\int_{x=0}^{3} x^2\,dx\right)\left(\int_{y=0}^{2} dy\right)\\
&= \int_{x=0}^{2}\frac{(2x-x^2)^2}{2}\,dx + \frac{27}{3}\cdot 2 = \cdots = \frac{8}{15}+18 = \boxed{\frac{278}{15}}
\end{aligned}$$