TATA69 Flervariabelanalys

Implicita funktionssatsen

Hans Lundmark, MAI, LiU

Implicita funktionssatsen

= satsen om **implicit definierade funktioner** (”implicita funktioner”)

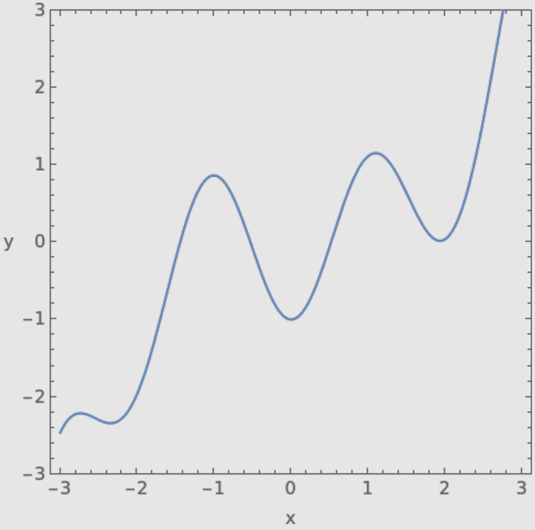
Explicit

= uttrycklig, sagd rakt ut, ”svart på vitt”

Implicit

= innefattad i något annat, underförstådd, ”måste läsas mellan raderna”

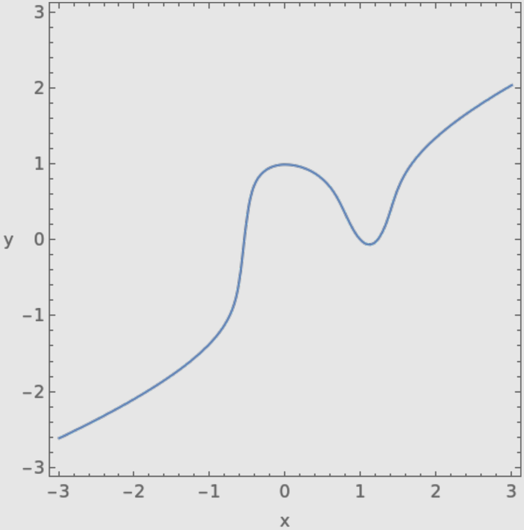
Exempel 1.



Grafen $y = f(x)$, där funktionen f definieras **explicit** av formeln

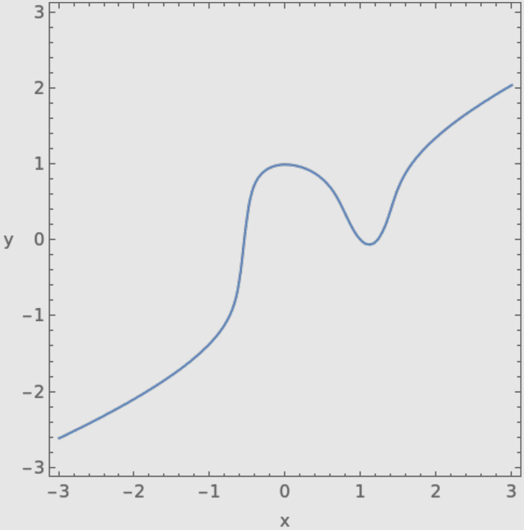
$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \cos(3x).$$

Exempel 2.



Grafen $y = f(x)$, där …

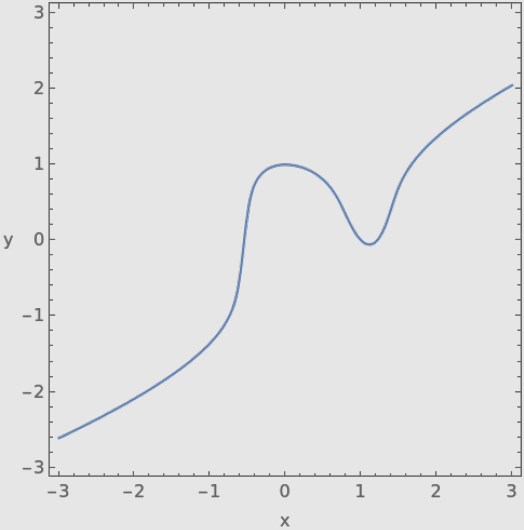
Exempel 2.



Grafen $y = f(x)$, där funktionen f definieras **implicit** av formeln

$$y^5 + y = 3x^3 - 5x^2 + 2.$$

Exempel 2.

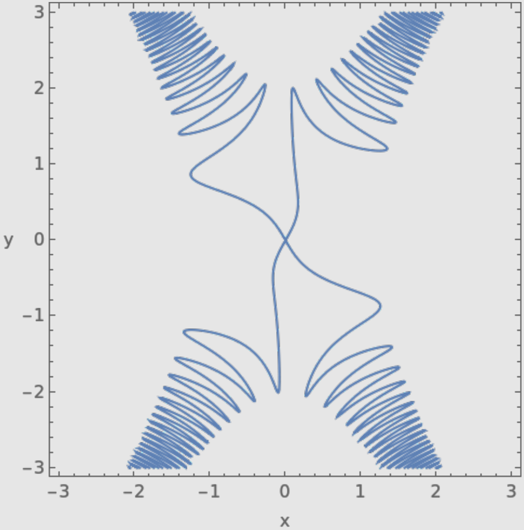


Grafen $y = f(x)$, där funktionen f definieras **implicit** av formeln

$$y^5 + y = 3x^3 - 5x^2 + 2.$$

(Ekvationen $y^5 + y = k$ har exakt en reell lösning y för varje $k \in \mathbf{R}$, eftersom $y^5 + y$ är en strängt växande funktion av y, som går mot $\pm\infty$ då $y \to \pm\infty$.)

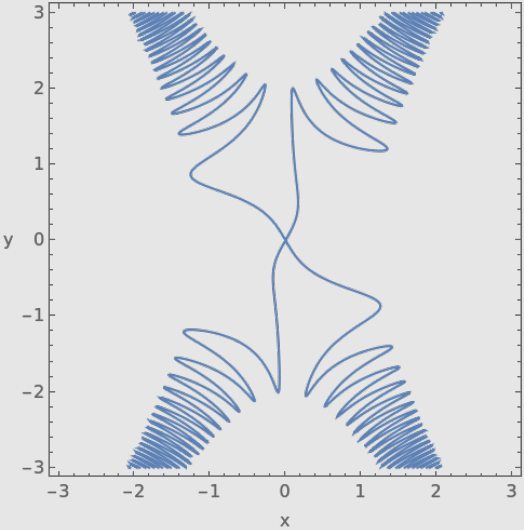
Exempel 3.



Lösningsmängden till ekvationen

$$3x^2 - y^2 + 4\sin(2xy^3) = 0.$$

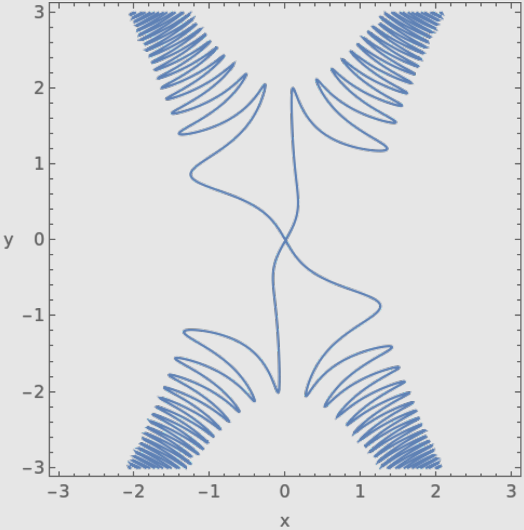
Exempel 3.



Lösningsmängden till ekvationen

$$3x^2 - y^2 + 4\sin(2xy^3) = 0.$$

Exempel 3.

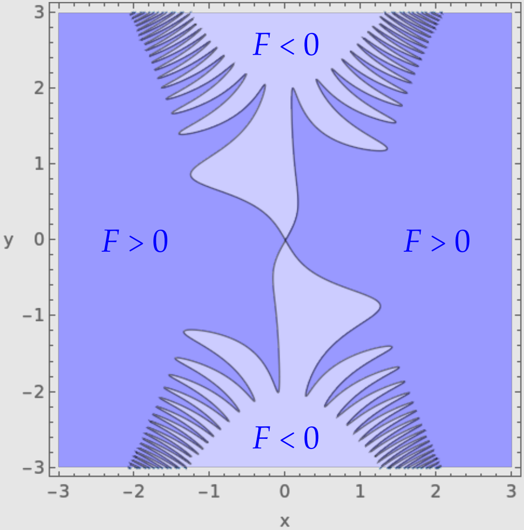


Lösningsmängden till ekvationen

$$\underbrace{3x^2 - y^2 + 4\sin(2xy^3)}_{=F(x,y)} = 0.$$

Detta är alltså en viss nivåmängd (eller ”nivåkurva”) till tvåvariabelfunktionen F, nämligen den nivåmängd som hör till värdet 0.

Exempel 3.

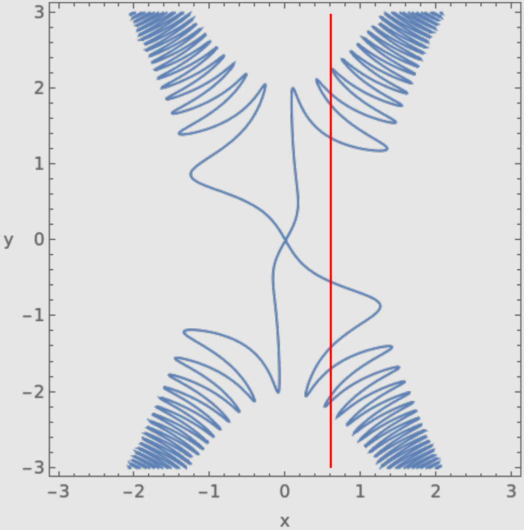


Lösningsmängden till ekvationen

$$\underbrace{3x^2 - y^2 + 4\sin(2xy^3)}_{=F(x,y)} = 0.$$

Det typiska sättet för ett program (här *Mathematica*) att approximativt rita denna lösningsmängd är att beräkna $F(x, y)$ i många tätt liggande punkter och lokalisera var värdena växlar tecken.

Exempel 3.

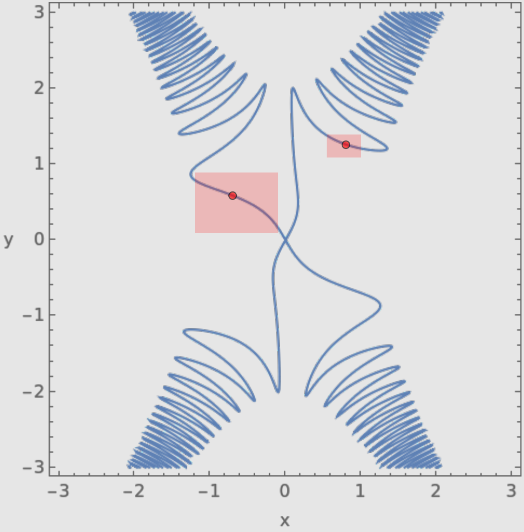


Lösningsmängden till ekvationen

$$\underbrace{3x^2 - y^2 + 4\sin(2xy^3)}_{=F(x,y)} = 0.$$

Flera y-värden för samma x-värde, så denna ekvation definierar **inte** y som funktion av x, globalt sett.

Exempel 3.



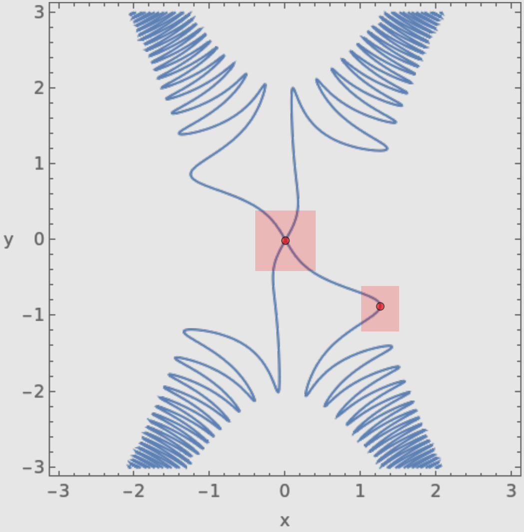
Lösningsmängden till ekvationen

$$\underbrace{3x^2 - y^2 + 4\sin(2xy^3)}_{=F(x,y)} = 0.$$

Men **lokalt** definierar ekvationen y som funktion av x, kring **vissa** punkter (a, b) där $F(a, b) = 0$.

(Det finns ett intervall U kring a och ett intervall V kring b sådana att skärningen mellan lösningsmängden och rektangeln $U \times V$ är en funktionsgraf $y = f(x)$.)

Exempel 3.



Lösningsmängden till ekvationen

$$\underbrace{3x^2 - y^2 + 4\sin(2xy^3)}_{=F(x,y)} = 0.$$

Men för vissa **andra** punkter (a, b) i lösningsmängden gäller inte detta.

(Oavsett hur små man gör intervallen U och V kring a resp. b kommer skärningen mellan lösningsmängden och rektangeln $U \times V$ inte att se ut som $y = f(x)$.)

Exempel 4.

Betrakta ekvationen

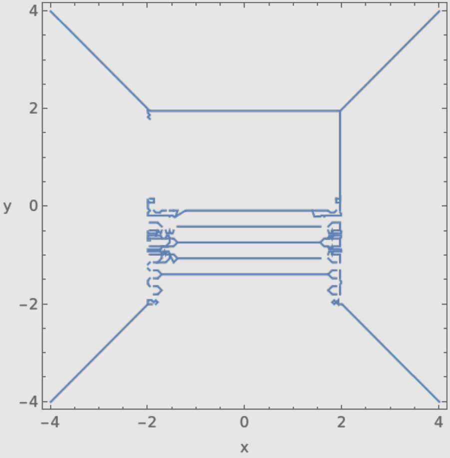
$$\underbrace{|x-2|+|x+2|-|y-2|-|y+2|}_{=F(x,y)}=0.$$

Hur ser lösningsmängden ut?

Bestämmer ekvationen implicit en funktion $y = f(x)$?

Exempel 4.

Mathematica ger följande:

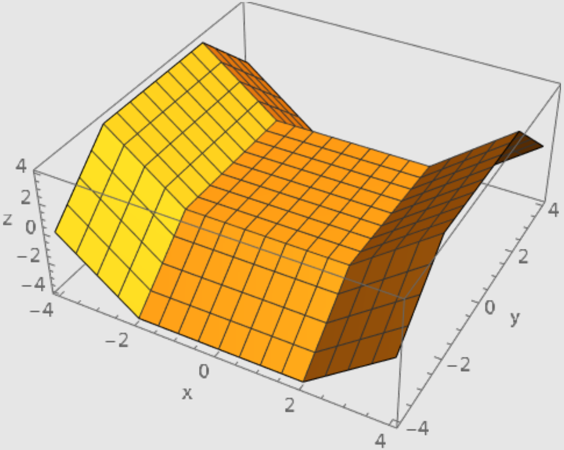


?!?

```
ContourPlot[Abs[x - 2] + Abs[x + 2] - Abs[y - 2] - Abs[y + 2] == 0,
            {x, -4, 4}, {y, -4, 4}, PlotPoints -> 50]
```

Exempel 4.

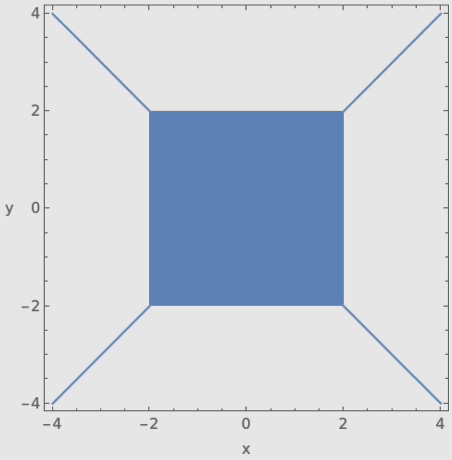
Såhär ser grafen $z = F(x, y)$ ut:



F är styckvis affin, och **konstant** (noll) i kvadraten $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Exempel 4.

Korrekt nivåmängd $F = 0$, alltså:



Låt M vara en **godtycklig delmängd** av $\mathbf{R}^2$ och sätt

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in M, \\ 1, & (x,y) \notin M. \end{cases}$$

Då är M en nivåmängd till F, eller hur?

Nivåmängder kan alltså i princip se ut **hur som helst**!

Om funktionen F är **kontinuerlig** måste dess nivåmängder vara **slutna**, men förutom detta finns inga restriktioner på hur nivåmängderna kan se ut.

(Om M är en **godtycklig icketom sluten delmängd** av $\mathbf{R}^2$ så är

$$F(x_1, x_2) = F(\mathbf{x}) = \operatorname{dist}\big(\mathbf{x}, M\big) = \min_{\mathbf{z} \in M} |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

en **kontinuerlig** funktion som är noll precis på M.)

Men om F är **kontinuerligt deriverbar** (alltså av klass C^1) måste nivåmängderna lokalt vara **kurvor**, förutom möjligen kring punkter där $\nabla F = (0, 0)$.

Men om F är **kontinuerligt deriverbar** (alltså av klass C^1) måste nivåmängderna lokalt vara **kurvor**, förutom möjligen kring punkter där $\nabla F = (0,0)$.

Om $\nabla F(a,b) \neq (0,0)$, och om M betecknar den nivåmängd som punkten (a,b) tillhör, så finns det en öppen rektangel $U \times V$ kring (a,b) sådan att snittmängden $M \cap (U \times V)$ är en kontinuerligt deriverbar kurva

$$(x,y) = (\alpha(t), \beta(t)), \qquad t_0 < t < t_1$$

som inte skär sig själv, och som har nollskild tangentvektor överallt:

$$(dx/dt, dy/dt) = (\alpha'(t), \beta'(t)) \neq (0,0), \qquad t_0 < t < t_1.$$

Men om F är **kontinuerligt deriverbar** (alltså av klass C^1) måste nivåmängderna lokalt vara **kurvor**, förutom möjligen kring punkter där $\nabla F = (0,0)$.

Om $\nabla F(a,b) \neq (0,0)$, och om M betecknar den nivåmängd som punkten (a,b) tillhör, så finns det en öppen rektangel $U \times V$ kring (a,b) sådan att snittmängden $M \cap (U \times V)$ är en kontinuerligt deriverbar kurva

$$(x,y) = (\alpha(t), \beta(t)), \qquad t_0 < t < t_1$$

som inte skär sig själv, och som har nollskild tangentvektor överallt:

$$(dx/dt, dy/dt) = (\alpha'(t), \beta'(t)) \neq (0,0), \qquad t_0 < t < t_1.$$

Som vi ska se är detta en följd av **implicita funktionssatsen**.

Med beteckningar som på förra sidan gäller att

$$F(\alpha(t), \beta(t)) = \text{konstant}, \qquad t_0 < t < t_1,$$

så derivering med avseende på t med kedjeregeln ger

$$F'_x(\alpha(t), \beta(t))\, \alpha'(t) + F'_y(\alpha(t), \beta(t))\, \beta'(t) = 0, \qquad t_0 < t < t_1.$$

Med beteckningar som på förra sidan gäller att

$$F(\alpha(t), \beta(t)) = \text{konstant}, \qquad t_0 < t < t_1,$$

så derivering med avseende på t med kedjeregeln ger

$$F_x'(\alpha(t), \beta(t))\,\alpha'(t) + F_y'(\alpha(t), \beta(t))\,\beta'(t) = 0, \qquad t_0 < t < t_1.$$

Med andra ord: Skalärprodukten mellan funktionens gradientvektor (F_x', F_y') och nivåkurvans tangentvektor (α', β') är lika med noll, i varje punkt på kurvan.

Med beteckningar som på förra sidan gäller att

$$F(\alpha(t), \beta(t)) = \text{konstant}, \qquad t_0 < t < t_1,$$

så derivering med avseende på t med kedjeregeln ger

$$F'_x(\alpha(t), \beta(t))\, \alpha'(t) + F'_y(\alpha(t), \beta(t))\, \beta'(t) = 0, \qquad t_0 < t < t_1.$$

Med andra ord: Skalärprodukten mellan funktionens gradientvektor (F'_x, F'_y) och nivåkurvans tangentvektor (α', β') är lika med noll, i varje punkt på kurvan.

Slutsats: I en punkt där $\nabla F \neq (0, 0)$ kommer ∇F att vara vinkelrät mot den nivåkurva till F som går genom just den punkten.

Implicita funktionssatsen, enklaste varianten

Låt M vara lösningsmängden till ekvationen $F(x,y) = C$, där F är en kontinuerligt deriverbar tvåvariabelfunktion och C är en konstant.

Implicita funktionssatsen, enklaste varianten

Låt M vara lösningsmängden till ekvationen $F(x,y) = C$, där F är en kontinuerligt deriverbar tvåvariabelfunktion och C är en konstant.

Antag att $(a,b) \in M$, dvs. att $F(a,b) = C$, och att dessutom villkoret

$$\boxed{F'_y(a,b) \neq 0}$$

är uppfyllt.

Implicita funktionssatsen, enklaste varianten

Låt M vara lösningsmängden till ekvationen $F(x,y) = C$, där F är en kontinuerligt deriverbar tvåvariabelfunktion och C är en konstant.

Antag att $(a,b) \in M$, dvs. att $F(a,b) = C$, och att dessutom villkoret

$$\boxed{F_y'(a,b) \neq 0}$$

är uppfyllt. Då finns det öppna intervall U och V kring a resp. b, sådana att mängden $M \cap (U \times V)$ utgör grafen $y = f(x)$ till en kontinuerligt deriverbar envariabelfunktion f med definitionsmängd U och derivata

$$f'(x) = -\frac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}, \qquad x \in U.$$

Bevisskiss

Enligt förutsättning är $F'_y(a, b) \neq 0$. Säg $F'_y(a, b) > 0$.

Bevisskiss

Enligt förutsättning är $F'_y(a,b) \neq 0$. Säg $F'_y(a,b) > 0$.

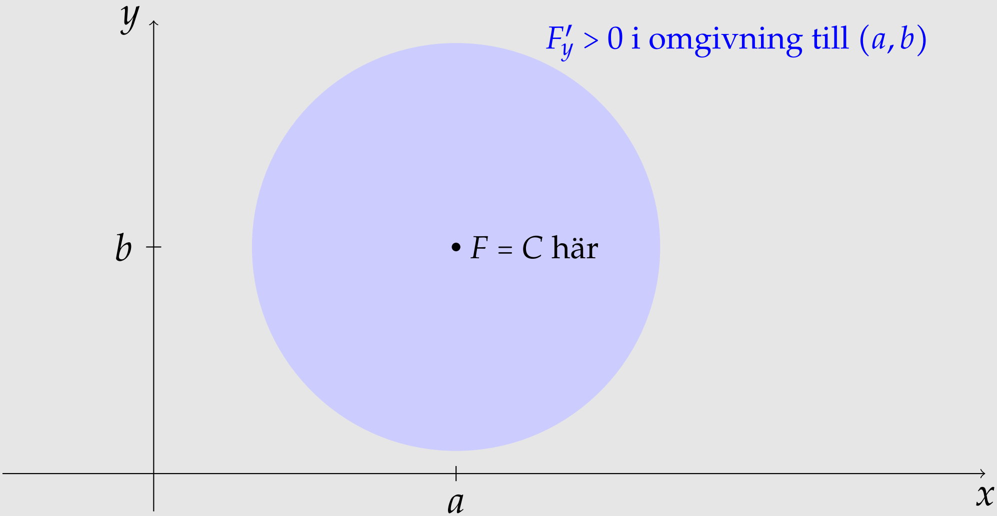
Och enligt förutsättning är F'_y en kontinuerlig funktion, så $F'_y(x,y) > 0$ för alla (x,y) i någon omgivning till (a,b) (säg en cirkelskiva).

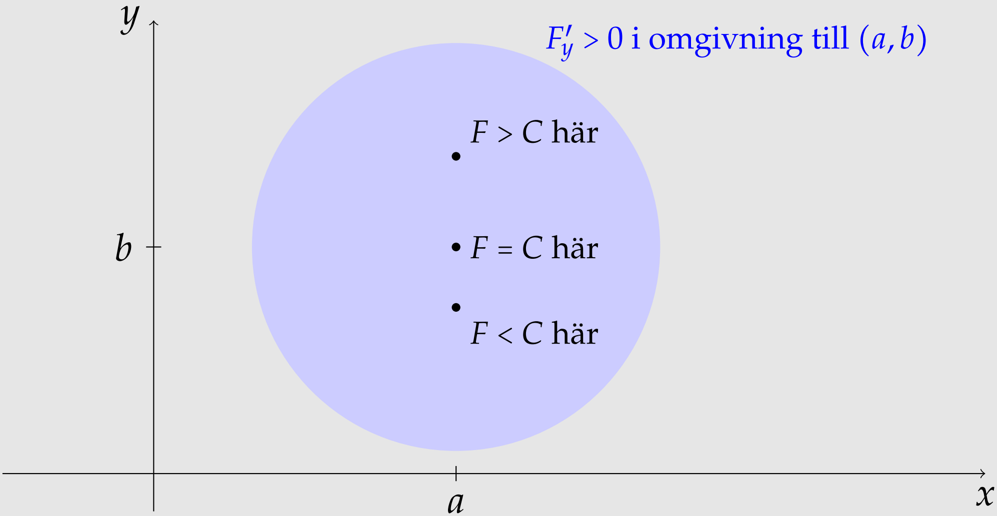
Bevisskiss

Enligt förutsättning är $F'_y(a,b) \neq 0$. Säg $F'_y(a,b) > 0$.

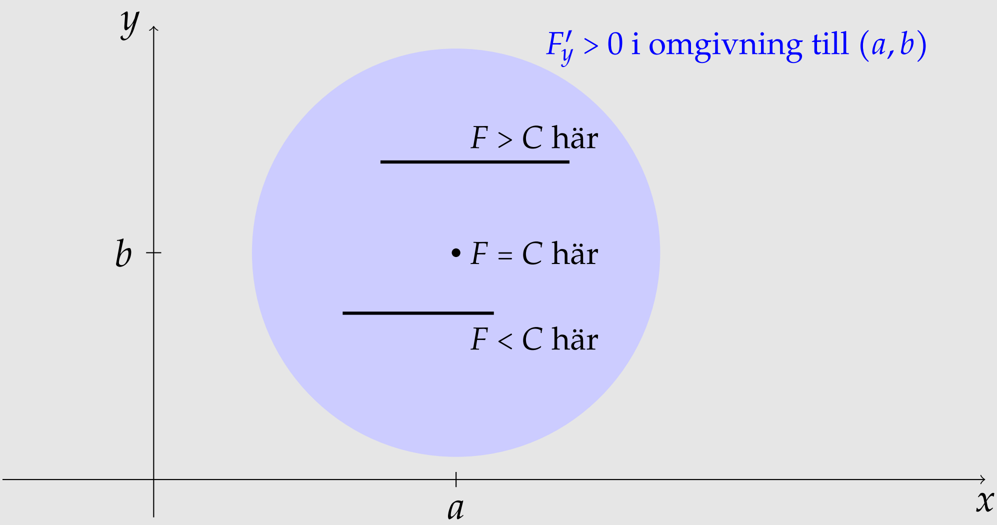
Och enligt förutsättning är F'_y en kontinuerlig funktion, så $F'_y(x,y) > 0$ för alla (x,y) i någon omgivning till (a,b) (säg en cirkelskiva).

I denna cirkelskiva är alltså $F(x_0,y)$ en strängt växande funktion av y, för varje fixt x_0.

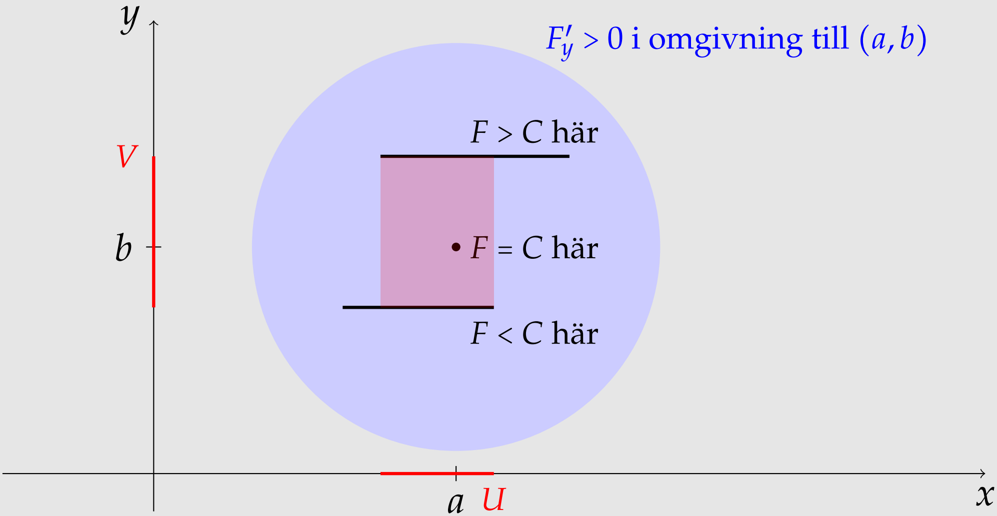

y
$F'_y > 0$ i omgivning till (a, b)
b
$F = C$ här
a
x

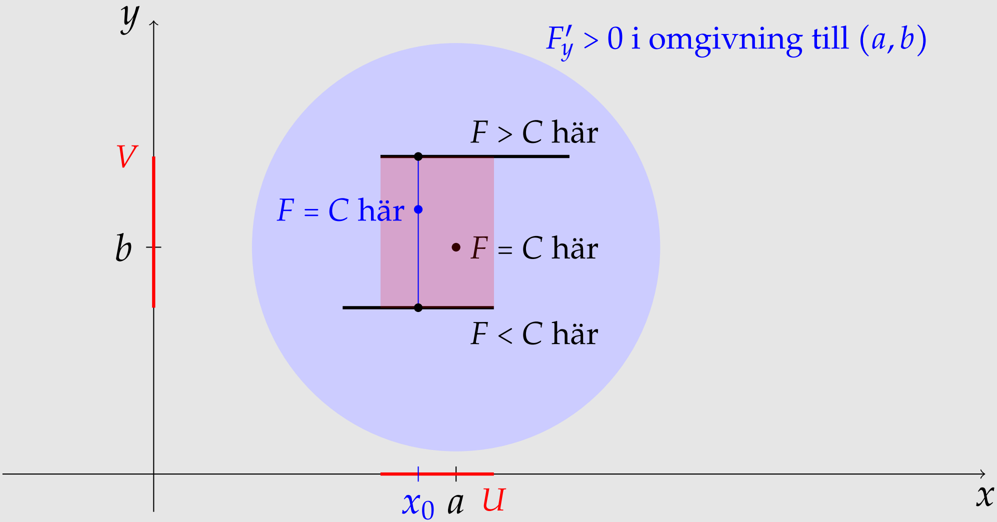


$F'_y > 0$ i omgivning till (a, b)
y
b
$F > C$ här
$F = C$ här
$F < C$ här
a
x



F är kontinuerlig enl. föruts. (ty $F \in C^1 \implies F \in C^0$)


$F'_y > 0$ i omgivning till (a, b)
$F > C$ här
$F = C$ här
$F < C$ här
y
V
b
a
U
x



Satsen om mellanliggande värde ger unikt $y = f(x_0)$ för varje $x_0 \in U$.

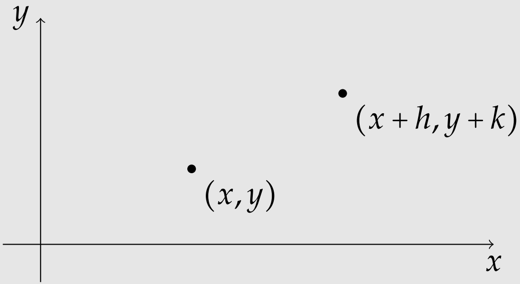
Ekvationen $F(x, y) = C$ definierar alltså implicit en funktion $y = f(x)$.

Ekvationen $F(x,y) = C$ definierar alltså implicit en funktion $y = f(x)$.

Att visa att f är kontinuerligt deriverbar är lite svårare.

Ekvationen $F(x, y) = C$ definierar alltså implicit en funktion $y = f(x)$.

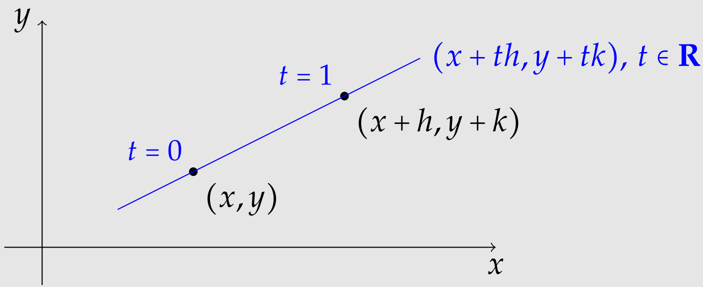
Att visa att f är kontinuerligt deriverbar är lite svårare.



$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = ?$$

Ekvationen $F(x, y) = C$ definierar alltså implicit en funktion $y = f(x)$.

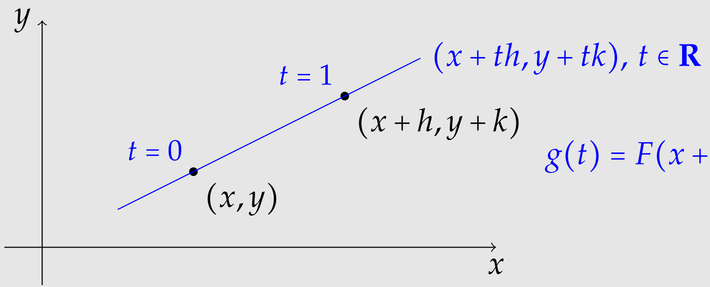
Att visa att f är kontinuerligt deriverbar är lite svårare.



$$F(x + h, y + k) - F(x, y) = ?$$

Ekvationen $F(x, y) = C$ definierar alltså implicit en funktion $y = f(x)$.

Att visa att f är kontinuerligt deriverbar är lite svårare.

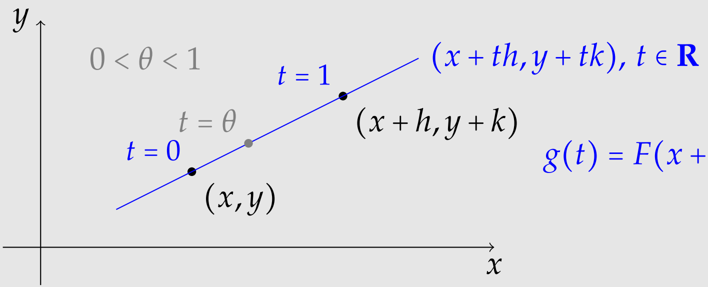


$$g(t) = F(x + th, y + tk)$$

$$F(x + h, y + k) - F(x, y) = g(1) - g(0)$$

Ekvationen $F(x,y) = C$ definierar alltså implicit en funktion $y = f(x)$.

Att visa att f är kontinuerligt deriverbar är lite svårare.

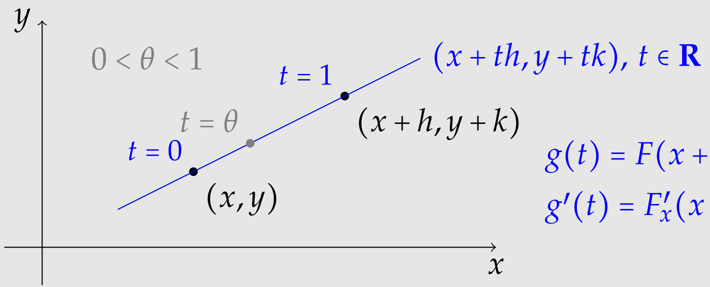


$$g(t) = F(x+th, y+tk)$$

$$F(x+h, y+k) - F(x,y) = g(1) - g(0) = g'(\theta)$$

Ekvationen $F(x, y) = C$ definierar alltså implicit en funktion $y = f(x)$.

Att visa att f är kontinuerligt deriverbar är lite svårare.



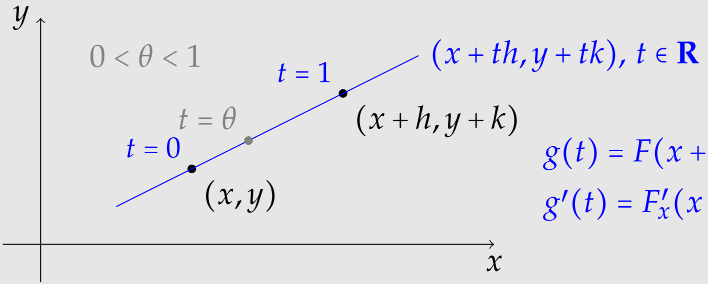
$$g(t) = F(x + th, y + tk)$$

$$g'(t) = F'_x(x + th, y + tk)\,h + F'_y(x + th, y + tk)\,k$$

$$F(x + h, y + k) - F(x, y) = g(1) - g(0) = g'(\theta)$$

Ekvationen $F(x,y) = C$ definierar alltså implicit en funktion $y = f(x)$.

Att visa att f är kontinuerligt deriverbar är lite svårare.



$$g(t) = F(x+th, y+tk)$$

$$g'(t) = F'_x(x+th, y+tk)\,h + F'_y(x+th, y+tk)\,k$$

$$\begin{aligned} F(x+h, y+k) - F(x,y) &= g(1) - g(0) = g'(\theta) \\ &= F'_x(x+\theta h, y+\theta k)\,h + F'_y(x+\theta h, y+\theta k)\,k \end{aligned}$$

Tillämpa sambandet

$$F(x+h,y+k)-F(x,y)=F'_x(x+\theta h,y+\theta k)\,h+F'_y(x+\theta h,y+\theta k)\,k$$

på punkterna $(x,y)=(x,f(x))$ och $(x+h,y+k)=(x+h,f(x+h))$, där $x\in U$ är givet, och h är litet nog så att $x+h\in U$ också.

Tillämpa sambandet

$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = F'_x(x+\theta h, y+\theta k)\, h + F'_y(x+\theta h, y+\theta k)\, k$$

på punkterna $(x, y) = (x, f(x))$ och $(x+h, y+k) = (x+h, f(x+h))$, där $x \in U$ är givet, och h är litet nog så att $x+h \in U$ också. Detta ger

$$0 = C - C = F'_x(x+\theta h, y+\theta k)\, h + F'_y(x+\theta h, y+\theta k)\, k,$$

där $y = f(x)$ och $k = k(h) = f(x+h) - f(x)$, för något $\theta \in \,]0, 1[$ som beror på h.

Tillämpa sambandet

$$F(x+h,y+k)-F(x,y)=F'_x(x+\theta h,y+\theta k)\,h+F'_y(x+\theta h,y+\theta k)\,k$$

på punkterna $(x,y)=(x,f(x))$ och $(x+h,y+k)=(x+h,f(x+h))$, där $x\in U$ är givet, och h är litet nog så att $x+h\in U$ också. Detta ger

$$0=C-C=F'_x(x+\theta h,y+\theta k)\,h+F'_y(x+\theta h,y+\theta k)\,k,$$

där $y=f(x)$ och $k=k(h)=f(x+h)-f(x)$, för något $\theta\in\,]0,1[$ som beror på h. Alltså:

$$k(h)=f(x+h)-f(x)=-\frac{F'_x(x+\theta h,f(x)+\theta\,k(h))}{F'_y(x+\theta h,f(x)+\theta\,k(h))}\,h$$

Tillämpa sambandet

$$F(x+h,y+k)-F(x,y)=F'_x(x+\theta h,y+\theta k)\,h+F'_y(x+\theta h,y+\theta k)\,k$$

på punkterna $(x,y)=(x,f(x))$ och $(x+h,y+k)=(x+h,f(x+h))$, där $x\in U$ är givet, och h är litet nog så att $x+h\in U$ också. Detta ger

$$0=C-C=F'_x(x+\theta h,y+\theta k)\,h+F'_y(x+\theta h,y+\theta k)\,k,$$

där $y=f(x)$ och $k=k(h)=f(x+h)-f(x)$, för något $\theta\in\,]0,1[$ som beror på h. Alltså:

$$k(h)=f(x+h)-f(x)=-\frac{F'_x(x+\theta h,f(x)+\theta\,k(h))}{F'_y(x+\theta h,f(x)+\theta\,k(h))}\,h$$

Funktionen $-F'_x(x,y)/F'_y(x,y)$ är kontinuerlig på $\overline{U\times V}$, alltså begränsad där.

Tillämpa sambandet

$$F(x+h,y+k)-F(x,y)=F'_x(x+\theta h,y+\theta k)\,h+F'_y(x+\theta h,y+\theta k)\,k$$

på punkterna $(x,y)=(x,f(x))$ och $(x+h,y+k)=(x+h,f(x+h))$, där $x\in U$ är givet, och h är litet nog så att $x+h\in U$ också. Detta ger

$$0=C-C=F'_x(x+\theta h,y+\theta k)\,h+F'_y(x+\theta h,y+\theta k)\,k,$$

där $y=f(x)$ och $k=k(h)=f(x+h)-f(x)$, för något $\theta\in\,]0,1[$ som beror på h. Alltså:

$$k(h)=f(x+h)-f(x)=-\frac{F'_x(x+\theta h,f(x)+\theta\,k(h))}{F'_y(x+\theta h,f(x)+\theta\,k(h))}\,h$$

Funktionen $-F'_x(x,y)/F'_y(x,y)$ är kontinuerlig på $\overline{U\times V}$, alltså begränsad där.

Låt $h\to 0$ för att visa att $k(h)\to 0$, dvs. $f(x+h)\to f(x)$, dvs. f är kontinuerlig i punkten $x\in U$.

Tillämpa sambandet

$$F(x+h,y+k)-F(x,y)=F'_x(x+\theta h,y+\theta k)\,h+F'_y(x+\theta h,y+\theta k)\,k$$

på punkterna $(x,y)=(x,f(x))$ och $(x+h,y+k)=(x+h,f(x+h))$, där $x\in U$ är givet, och h är litet nog så att $x+h\in U$ också. Detta ger

$$0=C-C=F'_x(x+\theta h,y+\theta k)\,h+F'_y(x+\theta h,y+\theta k)\,k,$$

där $y=f(x)$ och $k=k(h)=f(x+h)-f(x)$, för något $\theta\in\,]0,1[$ som beror på h. Alltså:

$$k(h)=f(x+h)-f(x)=-\frac{F'_x(x+\theta h,f(x)+\theta\,k(h))}{F'_y(x+\theta h,f(x)+\theta\,k(h))}\,h$$

Funktionen $-F'_x(x,y)/F'_y(x,y)$ är kontinuerlig på $\overline{U\times V}$, alltså begränsad där.

Låt $h\to 0$ för att visa att $k(h)\to 0$, dvs. $f(x+h)\to f(x)$, dvs. f är kontinuerlig i punkten $x\in U$.

Dela sedan med h och låt $h\to 0$ för att visa $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$ (kont.!).

Några anmärkningar

Om vi tar för givet att den implicit definierade funktionen f är deriverbar, så fås uttrycket för derivatan f' ur kedjeregeln:

$$
\begin{aligned}
& F(x, f(x)) = C \quad \text{för alla } x \in U \\
\implies \quad & 0 = \frac{d}{dx}\Big(F(x, f(x))\Big) \\
& \quad = F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x))\, f'(x) \quad \text{för alla } x \in U \\
\implies \quad & f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} \quad \text{för alla } x \in U.
\end{aligned}
$$

Varning för vanliga notationsfel:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\Big(F(x, f(x))\Big)} = F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x))\, f'(x)$$

är **inte** samma sak som

$$\boxed{\tfrac{dF}{dx}(x, f(x))}$$ (meningslöst uttryck)

eller

$$\boxed{\tfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}$$ (första termen i högerledet, ju!).

Nu kan vi visa det som påstods förut: **implicita funktionssatsen** ger att nivåmängder $F(x,y) = C$ typiskt sett verkligen är **kurvor**.

Nu kan vi visa det som påstods förut: **implicita funktionssatsen** ger att nivåmängder $F(x, y) = C$ typiskt sett verkligen är **kurvor**.

Antag att $F \in C^1$ och att $\nabla F(a, b) \neq (0, 0)$.

Nu kan vi visa det som påstods förut: **implicita funktionssatsen** ger att nivåmängder $F(x,y) = C$ typiskt sett verkligen är **kurvor**.

Antag att $F \in C^1$ och att $\nabla F(a,b) \neq (0,0)$.

Om $F'_y(a,b) \neq 0$ säger implicita funktionssatsen att nivåmängden genom (a,b) lokalt ser ut som en **kurva** $y = f(x)$ med f av klass C^1.

Nu kan vi visa det som påstods förut: **implicita funktionssatsen** ger att nivåmängder $F(x,y) = C$ typiskt sett verkligen är **kurvor**.

Antag att $F \in C^1$ och att $\nabla F(a,b) \neq (0,0)$.

Om $F'_y(a,b) \neq 0$ säger implicita funktionssatsen att nivåmängden genom (a,b) lokalt ser ut som en **kurva** $y = f(x)$ med f av klass C^1.

Om $F'_y(a,b) = 0$ så är $F'_x(a,b) \neq 0$, och då kan vi använda implicita funktionssatsen med variablerna i ombytta roller, och dra slutsatsen att nivåmängden genom (a,b) lokalt ser ut som $x = g(y)$ istället, alltså fortfarande en **kurva**.

Nu kan vi visa det som påstods förut: **implicita funktionssatsen** ger att nivåmängder $F(x,y) = C$ typiskt sett verkligen är **kurvor**.

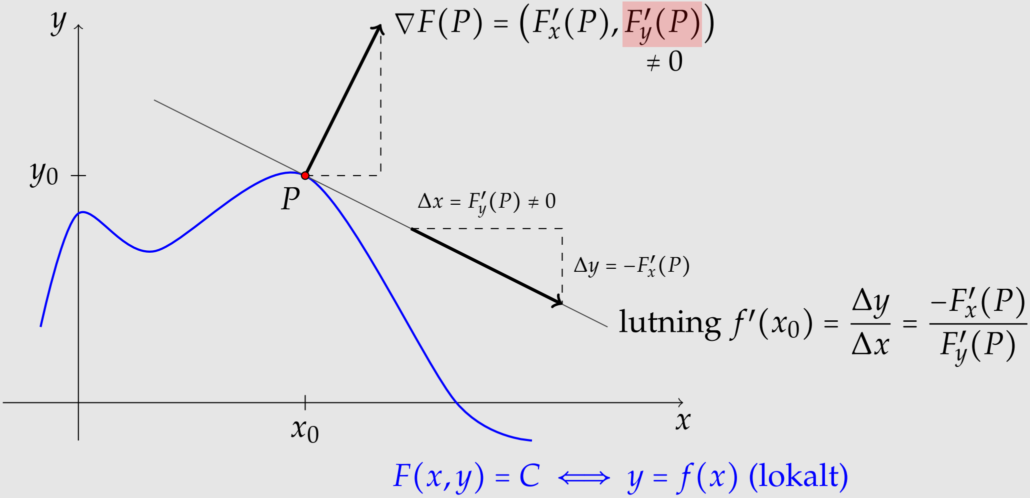
Antag att $F \in C^1$ och att $\nabla F(a,b) \neq (0,0)$.

Om $F'_y(a,b) \neq 0$ säger implicita funktionssatsen att nivåmängden genom (a,b) lokalt ser ut som en **kurva** $y = f(x)$ med f av klass C^1.

Om $F'_y(a,b) = 0$ så är $F'_x(a,b) \neq 0$, och då kan vi använda implicita funktionssatsen med variablerna i ombytta roller, och dra slutsatsen att nivåmängden genom (a,b) lokalt ser ut som $x = g(y)$ istället, alltså fortfarande en **kurva**.

Om man vill skriva kurvan på **parameterform** kan det göras som $(x,y) = (t, f(t))$ i första fallet och som $(x,y) = (g(t), t)$ i andra fallet.

Formeln för f' stämmer bra med att ∇F är vinkelrät mot nivåkurvan:



Specialfall: linjär ekvation $Ax + By = C$

$$F(x,y) = Ax + By \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} F'_x(x,y) = A = \text{konstant} \\ F'_y(x,y) = B = \text{konstant} \neq 0 \end{cases}$$

$$F(x,y) = Ax + By = C \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{C - Ax}{B} = \underbrace{-\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}}_{=f(x)}$$

$$f'(x) = -\frac{A}{B} = \text{konstant} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Om $F(x, y)$ är av klass C^k (med $k \geq 1$) så kommer den implicit definierade funktionen $f(x)$ också att vara av klass C^k.

Om $F(x, y)$ är av klass C^k (med $k \geq 1$) så kommer den implicit definerade funktionen $f(x)$ också att vara av klass C^k.

Man kan nämligen fortsätta att derivera uttrycket

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

med kvotregeln och kedjeregeln för att få fram ett uttryck för $f^{(k)} = \frac{d^k f}{dx^k}$ i termer av f och partiella derivator av F av ordning högst k.

Om $F(x, y)$ är av klass C^k (med $k \geq 1$) så kommer den implicit definerade funktionen $f(x)$ också att vara av klass C^k.

Man kan nämligen fortsätta att derivera uttrycket

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

med kvotregeln och kedjeregeln för att få fram ett uttryck för $f^{(k)} = \frac{d^k f}{dx^k}$ i termer av f och partiella derivator av F av ordning högst k.

Om F är av klass C^∞, dvs. om $F \in C^k$ för **alla** k, gäller följaktligen $f \in C^k$ för alla k, dvs. då är f också av klass C^∞.

Exempel 5. Visa att ekvationen $y + x^3 = xy^3 + 7$ definierar en C^∞-funktion $y = f(x)$ i en omgivning till $(x, y) = (2, 1)$. Beräkna $f(2)$, $f'(2)$ och $f''(2)$.

Exempel 5. Visa att ekvationen $y + x^3 = xy^3 + 7$ definierar en C^∞-funktion $y = f(x)$ i en omgivning till $(x, y) = (2, 1)$. Beräkna $f(2)$, $f'(2)$ och $f''(2)$.

Lösning. Skriv ekvationen som $F(x, y) = 7$, där $F(x, y) = y + x^3 - xy^3$. Det är uppenbart att F är av klass C^∞ (på hela $\mathbf{R}^2$).

Exempel 5. Visa att ekvationen $y + x^3 = xy^3 + 7$ definierar en C^∞-funktion $y = f(x)$ i en omgivning till $(x, y) = (2, 1)$. Beräkna $f(2)$, $f'(2)$ och $f''(2)$.

Lösning. Skriv ekvationen som $F(x, y) = 7$, där $F(x, y) = y + x^3 - xy^3$. Det är uppenbart att F är av klass C^∞ (på hela $\mathbf{R}^2$).

Den givna punkten uppfyller ekvationen: $F(2, 1) = 1 + 2^3 - 2 \cdot 1^3 = 7$.

Exempel 5. Visa att ekvationen $y + x^3 = xy^3 + 7$ definierar en C^∞-funktion $y = f(x)$ i en omgivning till $(x, y) = (2, 1)$. Beräkna $f(2)$, $f'(2)$ och $f''(2)$.

Lösning. Skriv ekvationen som $F(x, y) = 7$, där $F(x, y) = y + x^3 - xy^3$. Det är uppenbart att F är av klass C^∞ (på hela $\mathbf{R}^2$).

Den givna punkten uppfyller ekvationen: $F(2, 1) = 1 + 2^3 - 2 \cdot 1^3 = 7$.

(Säg inte ”punkten ligger på nivåkurvan”, för vi har ju inte visat än att det *är* en kurva!)

Exempel 5. Visa att ekvationen $y + x^3 = xy^3 + 7$ definierar en C^∞-funktion $y = f(x)$ i en omgivning till $(x, y) = (2, 1)$. Beräkna $f(2)$, $f'(2)$ och $f''(2)$.

Lösning. Skriv ekvationen som $F(x, y) = 7$, där $F(x, y) = y + x^3 - xy^3$. Det är uppenbart att F är av klass C^∞ (på hela $\mathbf{R}^2$).

Den givna punkten uppfyller ekvationen: $F(2, 1) = 1 + 2^3 - 2 \cdot 1^3 = 7$.

$$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y^3 \\ 1 - 3xy^2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \nabla F(2, 1) = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Villkoret $F'_y(2, 1) \neq 0$ är alltså uppfyllt.

Exempel 5. Visa att ekvationen $y + x^3 = xy^3 + 7$ definierar en C^∞-funktion $y = f(x)$ i en omgivning till $(x,y) = (2,1)$. Beräkna $f(2)$, $f'(2)$ och $f''(2)$.

Lösning. Skriv ekvationen som $F(x,y) = 7$, där $F(x,y) = y + x^3 - xy^3$. Det är uppenbart att F är av klass C^∞ (på hela $\mathbf{R}^2$).

Den givna punkten uppfyller ekvationen: $F(2,1) = 1 + 2^3 - 2 \cdot 1^3 = 7$.

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y^3 \\ 1 - 3xy^2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \nabla F(2,1) = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Villkoret $F'_y(2,1) \neq 0$ är alltså uppfyllt.

Enligt implicita funktionssatsen definierar ekvationen därmed en C^∞-funktion $y = f(x)$ i en omgivning till $(2,1)$, vilket skulle visas.

Sambandet $f(2) = 1$ gäller definitionsmässigt. (Eller hur?)

Sambandet $f(2) = 1$ gäller definitionsmässigt. (Eller hur?)

Derivatan kan tas fram med den kända formeln:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{3x^2 - f(x)^3}{1 - 3xf(x)^2} \quad \Longrightarrow \quad f'(2) = -\frac{F'_x(2,1)}{F'_y(2,1)} = -\frac{11}{-5} = \frac{11}{5}$$

Sambandet $f(2) = 1$ gäller definitionsmässigt. (Eller hur?)

Derivatan kan tas fram med den kända formeln:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{3x^2 - f(x)^3}{1 - 3xf(x)^2} \quad \Longrightarrow \quad f'(2) = -\frac{F'_x(2,1)}{F'_y(2,1)} = -\frac{11}{-5} = \frac{11}{5}$$

Eller genom att derivera såhär:

$$\begin{aligned}
& F(x, f(x)) = f(x) + x^3 - xf(x)^3 = 7 \\
\Longrightarrow \quad & 0 = \frac{d}{dx}\left(f(x) + x^3 - xf(x)^3\right) \\
& \quad = f'(x) + 3x^2 - \left(1 \cdot f(x)^3 + x \cdot 3f(x)^2 f'(x)\right) \\
& \quad = 3x^2 - f(x)^3 + \left(1 - 3xf(x)^2\right) f'(x) \\
\Longrightarrow \quad & f'(x) = -\frac{3x^2 - f(x)^3}{1 - 3xf(x)^2} \quad \text{osv.}
\end{aligned}$$

Ibland skrivs uträkningen såhär (**implicit derivering**, där y underförstått beror på x):

$$
\begin{aligned}
& & y + x^3 - xy^3 &= 7 \\
&\implies & 0 &= \tfrac{d}{dx}\left(y + x^3 - xy^3\right) \\
& & &= y' + 3x^2 - \left(1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 y'\right) \\
& & &= 3x^2 - y^3 + \left(1 - 3xy^2\right) y' \\
&\implies & y' &= -\frac{3x^2 - y^3}{1 - 3xy^2}.
\end{aligned}
$$

Låt oss beräkna andraderivatan $f''(2)$ med detta skrivsätt:

$$
\begin{aligned}
& 0 = 3x^2 - y^3 + \left(1 - 3xy^2\right) y' \\
\implies \quad & 0 = \tfrac{d}{dx}\left(3x^2 - y^3 + \left(1 - 3xy^2\right) y'\right) \\
& \quad = 6x - 3y^2y' + (0 - 3y^2 - 6xyy')y' + (1 - 3xy^2)y'' \\
& \quad = 6x - 6y^2y' - 6xy(y')^2 + (1 - 3xy^2)y''.
\end{aligned}
$$

Låt oss beräkna andraderivatan $f''(2)$ med detta skrivsätt:

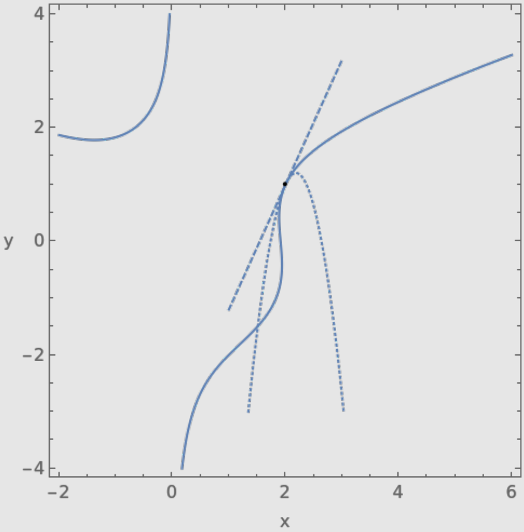
$$0 = 3x^2 - y^3 + \left(1 - 3xy^2\right) y'$$

$$\begin{aligned} \implies \qquad 0 &= \frac{d}{dx}\left(3x^2 - y^3 + \left(1 - 3xy^2\right) y'\right) \\ &= 6x - 3y^2y' + (0 - 3y^2 - 6xyy')y' + (1 - 3xy^2)y'' \\ &= 6x - 6y^2y' - 6xy(y')^2 + (1 - 3xy^2)y''. \end{aligned}$$

Sätt in $x = 2$ ihop med $y = f(2) = 1$ och $y' = f'(2) = \frac{11}{5}$ och $y'' = f''(2)$:

$$0 = 6 \cdot 2 - 6 \cdot 1^2 \cdot \tfrac{11}{5} - 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (\tfrac{11}{5})^2 + (1 - 3 \cdot 2 \cdot 1^2) \cdot f''(2) = -\tfrac{1482}{25} - 5\, f''(2).$$

Alltså $f''(2) = -1482/125$.



Datorritad bild av kurvan

$$F(x, y) = y + x^3 - xy^3 = 7$$

och även första och andra ordningens Taylor-polynom till den implicita funktionen $y = f(x)$ i punkten $(x, y) = (2, 1)$:

$$\begin{aligned} y &= \boxed{f(2)} + \boxed{f'(2)}(x-2) \\ &= 1 + \tfrac{11}{5}(x-2) \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} y &= \boxed{f(2)} + \boxed{f'(2)}(x-2) + \tfrac{1}{2!}\boxed{f''(2)}(x-2)^2 \\ &= 1 + \tfrac{11}{5}(x-2) - \tfrac{741}{125}(x-2)^2 \end{aligned}$$

Exempel 2, fortsättning.

Vi såg förut "för hand" att ekvationen $y^5 + y = 3x^3 - 5x^2 + 2$ globalt definierar en implicit funktion $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Exempel 2, fortsättning.

Vi såg förut ”för hand” att ekvationen $y^5 + y = 3x^3 - 5x^2 + 2$ globalt definierar en implicit funktion $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Implicita funktionssatsen kan användas för att visa att f är av klass C^∞.

Exempel 2, fortsättning.

Vi såg förut "för hand" att ekvationen $y^5 + y = 3x^3 - 5x^2 + 2$ globalt definierar en implicit funktion $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Implicita funktionssatsen kan användas för att visa att f är av klass C^∞.

Såhär: Låt $x_0 \in \mathbf{R}$ vara godtyckligt. $F(x, y) = y^5 + y - (3x^3 - 5x^2 + 2)$ är av klass C^∞ och uppfyller $F'_y(x, y) = 5y^4 + 1 \neq 0$ överallt, speciellt i punkten $(x_0, f(x_0))$, så enligt implicita funktionssatsen finns det en omgivning U till x_0 och en implicit definierad C^∞-funktion $y = g(x)$ på U som löser ekvationen $F(x, y) = 0$.

Exempel 2, fortsättning.

Vi såg förut ”för hand” att ekvationen $y^5 + y = 3x^3 - 5x^2 + 2$ globalt definierar en implicit funktion $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Implicita funktionssatsen kan användas för att visa att f är av klass C^∞.

Såhär: Låt $x_0 \in \mathbf{R}$ vara godtyckligt. $F(x, y) = y^5 + y - (3x^3 - 5x^2 + 2)$ är av klass C^∞ och uppfyller $F'_y(x, y) = 5y^4 + 1 \neq 0$ överallt, speciellt i punkten $(x_0, f(x_0))$, så enligt implicita funktionssatsen finns det en omgivning U till x_0 och en implicit definierad C^∞-funktion $y = g(x)$ på U som löser ekvationen $F(x, y) = 0$.

Funktionen g överensstämmer naturligtvis med vår tidigare implicita funktion f! Så $f \in C^\infty(U)$, och därmed $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, då x_0 var godtyckligt.

Ekvationer med fler än två variabler

Med ett väldigt likartat bevis kan man visa att en ekvation av formen

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = C$$

implicit definierar en C^1-funktion

$$x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

(lokalt, kring en given punkt som löser ekvationen) ifall F är av klass C^1 och

$$\boxed{F'_{x_n} \neq 0}$$

i punkten ifråga. Se nästa sida för precis formulering i fallet $n = 3$.

Implicita funktionssatsen, näst enklaste varianten

Låt M vara lösningsmängden till ekvationen $F(x,y,z) = C$, där F är en kontinuerligt deriverbar trevariabelfunktion och C är en konstant.

Antag att $(a,b,c) \in M$, dvs. att $F(a,b,c) = C$, och att dessutom villkoret

$$\boxed{F'_z(a,b,c) \neq 0}$$

är uppfyllt. Då finns det en omgivning U till (a,b) i $\mathbf{R}^2$ och ett intervall V kring c i $\mathbf{R}$, sådana att mängden $M \cap (U \times V)$ utgör grafen $z = f(x,y)$ till en kontinuerligt deriverbar tvåvariabelfunktion f med definitionsmängd U och gradient

$$\begin{pmatrix} f'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) \end{pmatrix} = \frac{-1}{F'_z(x,y,f(x,y))} \begin{pmatrix} F'_x(x,y,f(x,y)) \\ F'_y(x,y,f(x,y)) \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in U.$$

Formeln för f'_x härleds genom att derivera såhär:

$$F(x,y,f(x,y)) = C \quad \text{för alla } (x,y) \in U$$

$$\begin{aligned}
\implies \quad 0 &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(F(x,y,f(x,y))\Big) \\
&= F'_x(x,y,f(x,y)) + F'_z(x,y,f(x,y))\, f'_x(x,y) \quad \text{för alla } (x,y) \in U
\end{aligned}$$

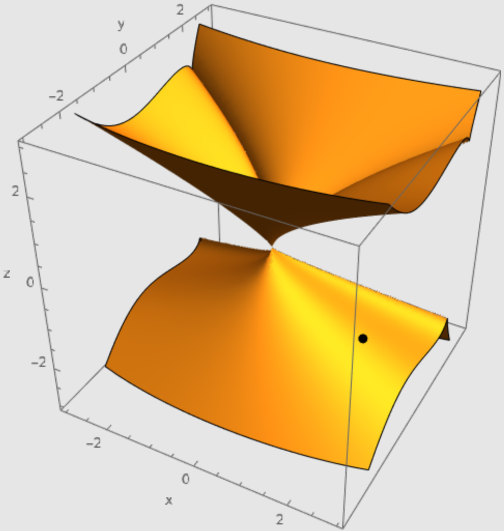
$$\implies \quad f'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,f(x,y))}{F'_z(x,y,f(x,y))} \quad \text{för alla } (x,y) \in U.$$

Och formeln för f'_y fås på samma sätt, med $\partial/\partial y$ istället för $\partial/\partial x$.

Satsen visar att nivåmängderna till en trevariabelfunktion F av klass C^1 måste vara **ytor**, åtminstone lokalt kring punkter där **gradienten** ∇F **inte är nollvektorn**.

Minst ett av följande tre fall måste ju inträffa i en sådan punkt P:

- Om $F'_z(P) \neq 0$ så ser nivåmängden genom P lokalt ut som $z = f(x, y)$.
- Om $F'_y(P) \neq 0$ så ser nivåmängden genom P lokalt ut som $y = g(x, z)$.
- Om $F'_x(P) \neq 0$ så ser nivåmängden genom P lokalt ut som $x = h(y, z)$.



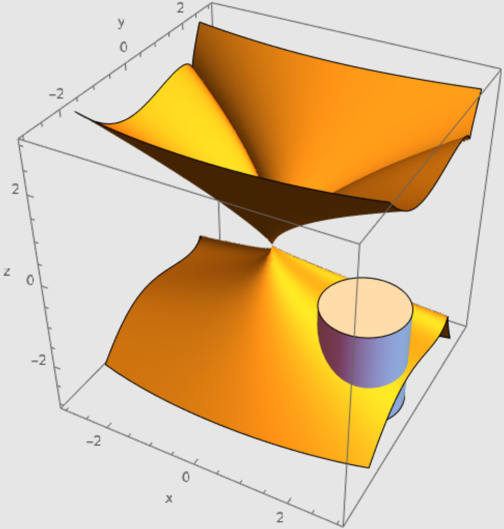
$$F(x,y,z) = (x^2 - y^3)^2 + (y^2 - z^2)^3 = 0$$

$$(a,b,c) = (2, 0, -4^{1/3})$$

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x(x^2 - y^3) \\ -6y^2(x^2 - y^3) + 6y(y^2 - z^2)^2 \\ -6z(y^2 - z^2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla F(a,b,c) = \begin{pmatrix} 32 \\ 0 \\ 48 \cdot 2^{1/3} \end{pmatrix}$$

$$F'_z(a,b,c) \neq 0$$



$$F(x,y,z) = (x^2 - y^3)^2 + (y^2 - z^2)^3 = 0$$

$$(a,b,c) = (2, 0, -4^{1/3})$$

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x(x^2 - y^3) \\ -6y^2(x^2 - y^3) + 6y(y^2 - z^2)^2 \\ -6z(y^2 - z^2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla F(a,b,c) = \begin{pmatrix} 32 \\ 0 \\ 48 \cdot 2^{1/3} \end{pmatrix}$$

$$F'_z(a,b,c) \neq 0$$

Underbestämda ekvationssystem

Den allmänna implicita funktionssatsen handlar om **ekvationssystem med "för få ekvationer"**, alltså färre ekvationer än obekanta.

Underbestämda ekvationssystem

Den allmänna implicita funktionssatsen handlar om **ekvationssystem med "för få ekvationer"**, alltså färre ekvationer än obekanta.

$F(x,y) = C$	1 ekvation, 2 obekanta. Implicit funktion $y = f(x)$. 1-parameterlösning $(x,y) = (t, f(t))$.

Underbestämda ekvationssystem

Den allmänna implicita funktionssatsen handlar om **ekvationssystem med "för få ekvationer"**, alltså färre ekvationer än obekanta.

$F(x,y) = C$	1 ekvation, 2 obekanta. Implicit funktion $y = f(x)$. 1-parameterlösning $(x,y) = (t, f(t))$.
$F(x,y,z) = C$	1 ekvation, 3 obekanta. Implicit funktion $z = f(x,y)$. 2-parameterlösning $(x,y,z) = (s,t,f(s,t))$.

Underbestämda ekvationssystem

Den allmänna implicita funktionssatsen handlar om **ekvationssystem med "för få ekvationer"**, alltså färre ekvationer än obekanta.

$F(x,y) = C$

1 ekvation, 2 obekanta.
Implicit funktion $y = f(x)$.
1-parameterlösning $(x,y) = (t, f(t))$.

$F(x,y,z) = C$

1 ekvation, 3 obekanta.
Implicit funktion $z = f(x,y)$.
2-parameterlösning $(x,y,z) = (s,t,f(s,t))$.

$$\begin{cases} F(x,y,z) = C \\ G(x,y,z) = D \end{cases}$$

2 ekvationer, 3 obekanta.
Implicita funktioner $y = f(x)$, $z = g(x)$.
1-parameterlösning $(x,y,z) = (t, f(t), g(t))$.

Underbestämda ekvationssystem

Den allmänna implicita funktionssatsen handlar om **ekvationssystem med "för få ekvationer"**, alltså färre ekvationer än obekanta.

$F(x,y) = C$	1 ekvation, 2 obekanta. Implicit funktion $y = f(x)$. 1-parameterlösning $(x,y) = (t, f(t))$.
$F(x,y,z) = C$	1 ekvation, 3 obekanta. Implicit funktion $z = f(x,y)$. 2-parameterlösning $(x,y,z) = (s,t,f(s,t))$.
$\begin{cases} F(x,y,z) = C \\ G(x,y,z) = D \end{cases}$	2 ekvationer, 3 obekanta. Implicita funktioner $y = f(x)$, $z = g(x)$. 1-parameterlösning $(x,y,z) = (t, f(t), g(t))$.

Och så vidare…

Implicita funktionssatsen, 2 ekvationer & 3 obekanta

Låt M vara lösningsmängden till ekvationssystemet $F(x,y,z) = C$, $G(x,y,z) = D$, där F och G är kontinuerligt deriverbara trevariabelfunktioner och C och D är konstanter.

Antag att $(a,b,c) \in M$, dvs. att $F(a,b,c) = C$ och $G(a,b,c) = D$, och att dessutom villkoret

$$\boxed{\frac{d(F,G)}{d(y,z)} = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} = F'_y G'_z - G'_y F'_z \neq 0}$$

är uppfyllt i punkten (a,b,c). Då finns det ett intervall U kring a i $\mathbf{R}$ och en omgivning V till (b,c) i $\mathbf{R}^2$, sådana att mängden $M \cap (U \times V)$ utgör en kurva parametriserad av kontinuerligt deriverbara funktioner $y = f(x)$, $z = g(x)$ med definitionsmängd U och derivator

$$\begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F'_x \\ G'_x \end{pmatrix}, \quad \text{där} \quad x \in U, \quad y = f(x), \quad z = g(x).$$

Bevisidé

$$\begin{cases} F(x,y,z) = C \\ G(x,y,z) = D \end{cases}$$

Bevisidé

$$\begin{cases} F(x,y,z) = C \\ G(x,y,z) = D \end{cases} \quad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} F(x,y,z) = C \\ \qquad\qquad z = h(x,y) \quad \text{(åtm. lokalt)} \end{cases}$$

Bevisidé

$$\begin{cases} F(x,y,z) = C \\ G(x,y,z) = D \end{cases} \overset{?}{\iff} \begin{cases} F(x,y,z) = C \\ \qquad\qquad z = h(x,y) \end{cases} \quad \text{(åtm. lokalt)}$$

$$\iff \begin{cases} F(x,y,h(x,y)) = C \\ \qquad\qquad\qquad z = h(x,y) \end{cases}$$

Bevisidé

$$\begin{cases} F(x,y,z) = C \\ G(x,y,z) = D \end{cases} \overset{?}{\iff} \begin{cases} F(x,y,z) = C \\ \qquad z = h(x,y) \quad \text{(åtm. lokalt)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F(x,y,h(x,y)) = C \\ \qquad z = h(x,y) \end{cases} \overset{\text{döp om}}{\iff} \begin{cases} H(x,y) = C \\ \qquad z = h(x,y) \end{cases}$$

Bevisidé

$$\begin{cases} F(x,y,z) = C \\ G(x,y,z) = D \end{cases} \overset{?}{\iff} \begin{cases} F(x,y,z) = C \\ z = h(x,y) \quad \text{(åtm. lokalt)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F(x,y,h(x,y)) = C \\ z = h(x,y) \end{cases} \overset{\text{döp om}}{\iff} \begin{cases} H(x,y) = C \\ z = h(x,y) \end{cases}$$

$$\overset{?}{\iff} \begin{cases} y = f(x) \quad \text{(åtm. lokalt)} \\ z = h(x,y) \end{cases}$$

Bevisidé

$$\begin{cases} F(x,y,z) = C \\ G(x,y,z) = D \end{cases} \overset{?}{\iff} \begin{cases} F(x,y,z) = C \\ \qquad z = h(x,y) \quad \text{(åtm. lokalt)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F(x,y,h(x,y)) = C \\ \qquad z = h(x,y) \end{cases} \overset{\text{döp om}}{\iff} \begin{cases} H(x,y) = C \\ \qquad z = h(x,y) \end{cases}$$

$$\overset{?}{\iff} \begin{cases} y = f(x) \quad \text{(åtm. lokalt)} \\ z = h(x,y) \end{cases} \iff \begin{cases} y = f(x) \\ z = h(x,f(x)) \end{cases}$$

Bevisidé

$$\begin{cases} F(x,y,z) = C \\ G(x,y,z) = D \end{cases} \overset{?}{\iff} \begin{cases} F(x,y,z) = C \\ \qquad z = h(x,y) \quad \text{(åtm. lokalt)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F(x,y,h(x,y)) = C \\ \qquad z = h(x,y) \end{cases} \overset{\text{döp om}}{\iff} \begin{cases} H(x,y) = C \\ \qquad z = h(x,y) \end{cases}$$

$$\overset{?}{\iff} \begin{cases} y = f(x) \quad \text{(åtm. lokalt)} \\ z = h(x,y) \end{cases} \iff \begin{cases} y = f(x) \\ z = h(x,f(x)) \end{cases}$$

$$\overset{\text{döp om}}{\iff} \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$$

Bevisidé

$$\begin{cases} F(x,y,z) = C \\ G(x,y,z) = D \end{cases} \overset{?}{\iff} \begin{cases} F(x,y,z) = C \\ \qquad z = h(x,y) \quad \text{(åtm. lokalt)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F(x,y,h(x,y)) = C \\ \qquad z = h(x,y) \end{cases} \overset{\text{döp om}}{\iff} \begin{cases} H(x,y) = C \\ \qquad z = h(x,y) \end{cases}$$

$$\overset{?}{\iff} \begin{cases} y = f(x) \quad \text{(åtm. lokalt)} \\ z = h(x,y) \end{cases} \iff \begin{cases} y = f(x) \\ z = h(x,f(x)) \end{cases}$$

$$\overset{\text{döp om}}{\iff} \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$$

Vi vill visa att detta (el. dyl.) i princip är genomförbart ifall $F'_y G'_z - F'_z G'_y \neq 0$.

Bevis

Eftersom $F'_y G'_z - G'_y F'_z \neq 0$ i punkten (a, b, c) (enligt förutsättning) kan inte $F'_y G'_z$ och $G'_y F'_z$ båda vara noll där. Säg att $F'_y G'_z \neq 0$ (det andra fallet behandlas på liknande sätt).

Bevis

Eftersom $F'_y G'_z - G'_y F'_z \neq 0$ i punkten (a, b, c) (enligt förutsättning) kan inte $F'_y G'_z$ och $G'_y F'_z$ båda vara noll där. Säg att $F'_y G'_z \neq 0$ (det andra fallet behandlas på liknande sätt).

Då är $G'_z(a, b, c) \neq 0$, så implicita funktionssatsen tillämpad på $G(x, y, z) = D$ säger att det finns en C^1-funktion $z = h(x, y)$, definierad i någon omgivning till (a, b), sådan att

$$G(x, y, h(x, y)) = D, \qquad h(a, b) = c, \qquad h'_y(a, b) = -\frac{G'_y(a, b, c)}{G'_z(a, b, c)}.$$

Bevis

Eftersom $F'_y G'_z - G'_y F'_z \neq 0$ i punkten (a,b,c) (enligt förutsättning) kan inte $F'_y G'_z$ och $G'_y F'_z$ båda vara noll där. Säg att $F'_y G'_z \neq 0$ (det andra fallet behandlas på liknande sätt).

Då är $G'_z(a,b,c) \neq 0$, så implicita funktionssatsen tillämpad på $G(x,y,z) = D$ säger att det finns en C^1-funktion $z = h(x,y)$, definierad i någon omgivning till (a,b), sådan att

$$G(x,y,h(x,y)) = D, \qquad h(a,b) = c, \qquad h'_y(a,b) = -\frac{G'_y(a,b,c)}{G'_z(a,b,c)}.$$

Låt $H(x,y) = F(x,y,h(x,y))$. Då är $H(a,b) = F(a,b,c) = C$, och dessutom

$$H'_y(x,y) = F'_y(x,y,h(x,y)) + F'_z(x,y,h(x,y))\, h'_y(x,y)$$

$$\Longrightarrow \quad H'_y(a,b) = F'_y(a,b,c) + F'_z(a,b,c)\,\frac{-G'_y(a,b,c)}{G'_z(a,b,c)} = \left.\frac{F'_y G'_z - F'_z G'_y}{G'_z}\right|_{(a,b,c)} \neq 0.$$

Implicita funktionssatsen tillämpad på ekvationen $H(x,y) = C$ säger att det finns en C^1-funktion $y = f(x)$, definierad i ett intervall kring a, sådan att $f(a) = b$ och

$$C = H(x, f(x)) = F\Big(x, f(x), \underbrace{h\big((x, f(x))\big)}_{=g(x)}\Big) = F\big(x, f(x), g(x)\big).$$

Implicita funktionssatsen tillämpad på ekvationen $H(x,y) = C$ säger att det finns en C^1-funktion $y = f(x)$, definierad i ett intervall kring a, sådan att $f(a) = b$ och

$$C = H(x,f(x)) = F\Big(x,f(x),\underbrace{h\big((x,f(x))\big)}_{=g(x)}\Big) = F\big(x,f(x),g(x)\big).$$

Och insättning av $y = f(x)$ i $G(x,y,h(x,y)) = D$ ger

$$D = G\Big(x,f(x),h\big((x,f(x))\big)\Big) = G\big(x,f(x),g(x)\big).$$

Implicita funktionssatsen tillämpad på ekvationen $H(x,y) = C$ säger att det finns en C^1-funktion $y = f(x)$, definierad i ett intervall kring a, sådan att $f(a) = b$ och

$$C = H(x,f(x)) = F\Big(x,f(x),\underbrace{h\big((x,f(x))\big)}_{=g(x)}\Big) = F\big(x,f(x),g(x)\big).$$

Och insättning av $y = f(x)$ i $G(x,y,h(x,y)) = D$ ger

$$D = G\Big(x,f(x),h\big((x,f(x))\big)\Big) = G\big(x,f(x),g(x)\big).$$

Derivatorna $f'(x)$ och $g'(x)$ löses ut ur följande linjära 2×2-system:

$$\begin{cases} 0 = \frac{d}{dx}\Big(F\big(x,f(x),g(x)\big)\Big) = F'_x + F'_y\, \boxed{f'} + F'_z\, \boxed{g'} \\ 0 = \frac{d}{dx}\Big(G\big(x,f(x),g(x)\big)\Big) = G'_x + G'_y\, \boxed{f'} + G'_z\, \boxed{g'} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix}} = -\begin{pmatrix} F'_x \\ G'_x \end{pmatrix}$$

Annat bevis (med inversa funktionssatsen)

Definiera en C^1-avbildning från $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ till $(u, v, w) \in \mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} u &= E(x, y, z) = x, \\ v &= F(x, y, z), \\ w &= G(x, y, z). \end{aligned}$$

Punkten $(x, y, z) = (a, b, c)$ avbildas på $(u, v, w) = (a, C, D)$.

Annat bevis (med inversa funktionssatsen)

Definiera en C^1-avbildning från $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ till $(u,v,w) \in \mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} u &= E(x,y,z) = x, \\ v &= F(x,y,z), \\ w &= G(x,y,z). \end{aligned}$$

Punkten $(x,y,z) = (a,b,c)$ avbildas på $(u,v,w) = (a,C,D)$.

Avbildningens funktionaldeterminant är

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix},$$

vilket enligt förutsättning är $\neq 0$ i punkten (a,b,c).

Alltså är avbilningen lokalt C^1-inverterbar, enligt inversa funktionssatsen:

$$x = \alpha(u, v, w) = u,$$
$$y = \beta(u, v, w),$$
$$z = \gamma(u, v, w).$$

Alltså är avbilningen lokalt C^1-inverterbar, enligt inversa funktionssatsen:

$$\begin{aligned} x &= \alpha(u,v,w) = u, \\ y &= \beta(u,v,w), \\ z &= \gamma(u,v,w). \end{aligned}$$

Inversen avbildar punkten $(u,v,w) = (t,C,D)$ på $(x,y,z) = (t,\beta(x,C,D),\gamma(x,C,D))$ för alla t nära a, så den ursprungliga avbildningen gör tvärtom:

$$\begin{aligned} u &= E(t,\beta(t,C,D),\gamma(t,C,D)) = t, \\ v &= \boxed{F}(t, \boxed{\beta(t,C,D)}, \boxed{\gamma(t,C,D)}) = \boxed{C}, \\ w &= \boxed{G}(t, \boxed{\beta(t,C,D)}, \boxed{\gamma(t,C,D)}) = \boxed{D}. \end{aligned}$$

Alltså är avbilningen lokalt C^1-inverterbar, enligt inversa funktionssatsen:

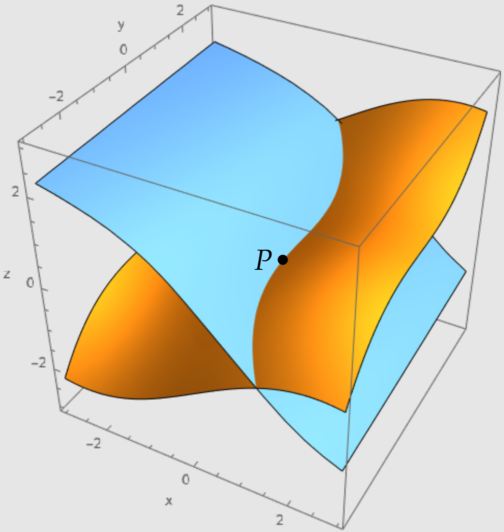
$$\begin{aligned} x &= \alpha(u,v,w) = u, \\ y &= \beta(u,v,w), \\ z &= \gamma(u,v,w). \end{aligned}$$

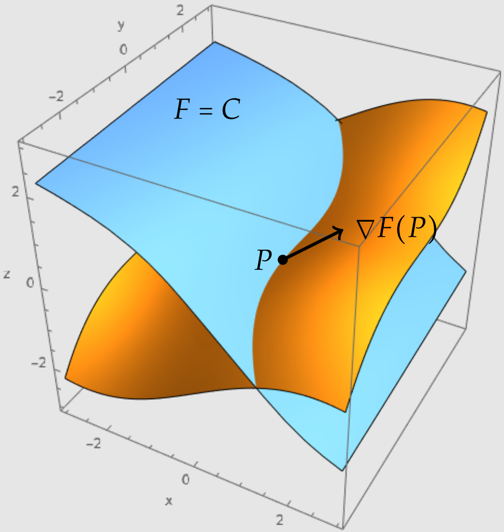
Inversen avbildar punkten $(u,v,w) = (t,C,D)$ på $(x,y,z) = (t,\beta(x,C,D),\gamma(x,C,D))$ för alla t nära a, så den ursprungliga avbildningen gör tvärtom:

$$\begin{aligned} u &= E(t,\beta(t,C,D),\gamma(t,C,D)) = t, \\ v &= F(t,\beta(t,C,D),\gamma(t,C,D)) = C, \\ w &= G(t,\beta(t,C,D),\gamma(t,C,D)) = D. \end{aligned}$$

Så $(x,y,z) = (t,f(t),g(t))$ löser vårt ekvationssystem, där $f(t) = \beta(t,C,D)$ och $g(t) = \gamma(t,C,D)$.

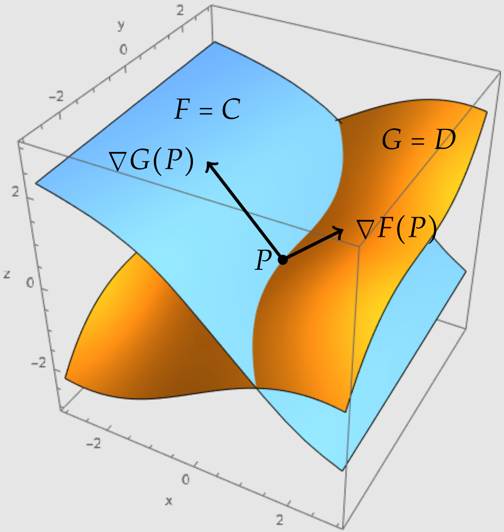
Geometrisk tolkning





Geometrisk tolkning

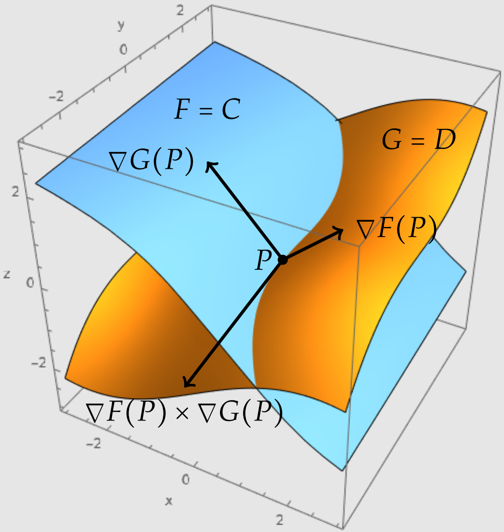
$\nabla F(P)$ är normalvektor till nivåytan $F = C$.



Geometrisk tolkning

$\nabla F(P)$ är normalvektor till nivåytan $F = C$.

$\nabla G(P)$ är normalvektor till nivåytan $G = D$.

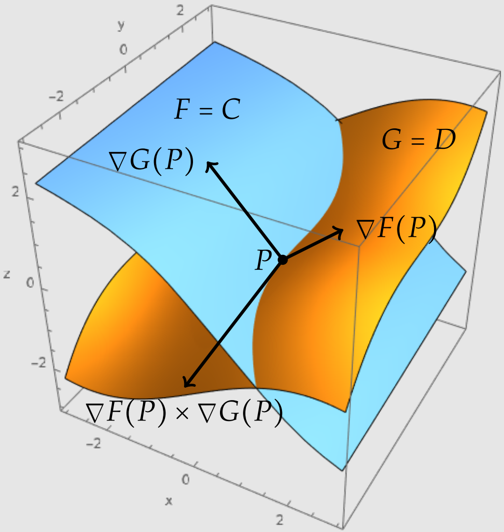


Geometrisk tolkning

$\nabla F(P)$ är normalvektor till nivåytan $F = C$.

$\nabla G(P)$ är normalvektor till nivåytan $G = D$.

$\nabla F(P) \times \nabla G(P)$ är vinkelrät mot båda dessa normalvektorer, alltså tangentiell till båda ytorna, alltså även till skärningskurvan.



Geometrisk tolkning

$\nabla F(P)$ är normalvektor till nivåytan $F = C$.

$\nabla G(P)$ är normalvektor till nivåytan $G = D$.

$\nabla F(P) \times \nabla G(P)$ är vinkelrät mot båda dessa normalvektorer, alltså tangentiell till båda ytorna, alltså även till skärningskurvan.

Om x-komponenten i denna tangentvektor är nollskild kan x användas som parameter för kurvan nära P: $(x, y, z) = \big(t, f(t), g(t)\big)$.

$$\nabla F \times \nabla G = \begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} G'_x \\ G'_y \\ G'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'_y G'_z - F'_z G'_y \\ F'_z G'_x - F'_x G'_z \\ F'_x G'_y - F'_y G'_x \end{pmatrix}$$

Implicita funktionssatsen, allmänna fallet

(med n ekvationer och $n + k$ obekanta)

Implicita funktionssatsen, allmänna fallet

(med n ekvationer och $n+k$ obekanta)

Låt M vara lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\boxed{\begin{aligned} F_1(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n) &= c_1 \\ &\vdots \\ F_n(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n) &= c_n \end{aligned}}$$

där $F_1, \dots, F_n$ är C^1-funktioner av $n+k$ variabler och $c_1, \dots, c_n$ är konstanter.

Implicita funktionssatsen, allmänna fallet

(med n ekvationer och $n+k$ obekanta)

Låt M vara lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\boxed{\begin{aligned} F_1(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n) &= c_1 \\ &\vdots \\ F_n(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n) &= c_n \end{aligned}}$$

där $F_1, \dots, F_n$ är C^1-funktioner av $n+k$ variabler och $c_1, \dots, c_n$ är konstanter.

Kortare skrivsätt: $\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{c}}$ med

$$\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^{n+k} \to \mathbf{R}^n, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^k, \qquad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n, \qquad \mathbf{c} \in \mathbf{R}^n.$$

Antag att $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in M$, dvs. att $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{c}$, och att dessutom villkoret

$$\boxed{\frac{d(F_1, \dots, F_n)}{d(y_1, \dots, y_n)} = \det\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right) \neq 0}$$

är uppfyllt i punkten $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Antag att $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in M$, dvs. att $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{c}$, och att dessutom villkoret

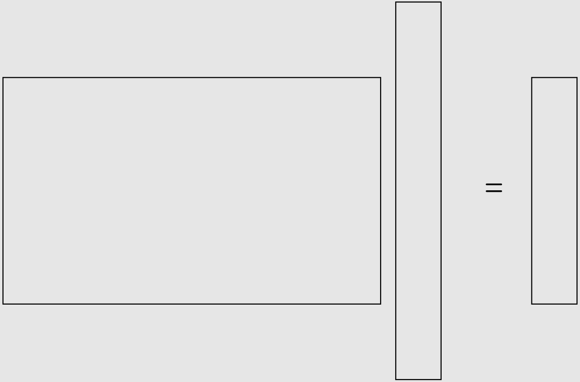
$$\boxed{\frac{d(F_1, \dots, F_n)}{d(y_1, \dots, y_n)} = \det\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right) \neq 0}$$

är uppfyllt i punkten $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

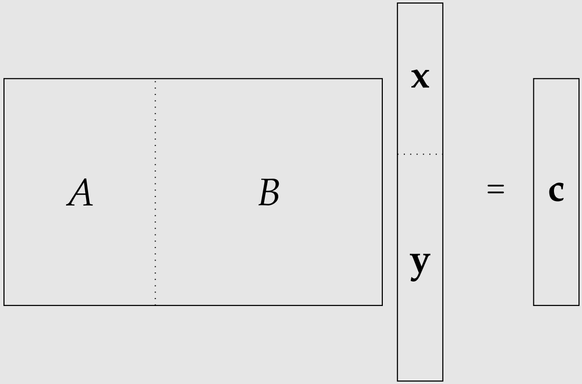
Då finns det en omgivning U till $\mathbf{a}$ i $\mathbf{R}^k$ och en omgivning V till $\mathbf{b}$ i $\mathbf{R}^n$, sådana att mängden $M \cap (U \times V)$ utgör grafen till en C^1-avbildning $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ från U till V, med funktionalmatrisen

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = -\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\big(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\big)\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\big(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\big), \quad \mathbf{x} \in U.$$

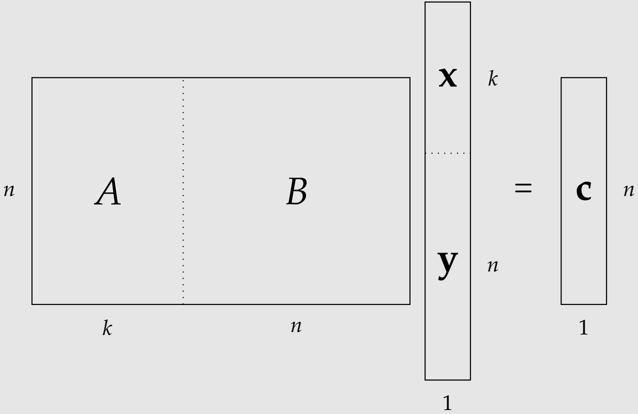
Specialfall: underbestämt linjärt ekvationssystem



Specialfall: underbestämt linjärt ekvationssystem



Specialfall: underbestämt linjärt ekvationssystem



$$A\mathbf{x} + B\mathbf{y} = \mathbf{c}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + B\mathbf{y} \implies \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = A = \text{konstant } n \times k\text{-matris} \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = B = \text{konstant } n \times n\text{-matris (inv.bar)} \end{cases}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + B\mathbf{y} = \mathbf{c} \iff \mathbf{y} = B^{-1}(\mathbf{c} - A\mathbf{x}) = \underbrace{-B^{-1}A\mathbf{x} + B^{-1}\mathbf{c}}_{=\mathbf{f}(\mathbf{x})}$$

k-parameterlösning $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{t},\mathbf{f}(\mathbf{t}))$, där $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^k$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = -B^{-1}A = -\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}.$$

Till sist, notera att implicita funktionssatsen ger **tillräckliga** villkor för att ett ekvationssystem ska definiera vissa variabler som funktioner av de övriga, men dessa villkor är **inte nödvändiga**.

Till sist, notera att implicita funktionssatsen ger **tillräckliga** villkor för att ett ekvationssystem ska definiera vissa variabler som funktioner av de övriga, men dessa villkor är **inte nödvändiga**.

Exempel. $F(x,y) = y - |x|$ är ej av klass C^1, men ekvationen $F(x,y) = 0$ definierar ändå en funktion $y = f(x) = |x|$ (dock ej av klass C^1).

Till sist, notera att implicita funktionssatsen ger **tillräckliga** villkor för att ett ekvationssystem ska definiera vissa variabler som funktioner av de övriga, men dessa villkor är **inte nödvändiga**.

Exempel. $F(x,y) = y - |x|$ är ej av klass C^1, men ekvationen $F(x,y) = 0$ definierar ändå en funktion $y = f(x) = |x|$ (dock ej av klass C^1).

Exempel. $F(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ med $F(0,0) = 0$ är inte ens kontinuerlig i origo, men ekvationen $F(x,y) = 0$ definierar ändå en funktion $y = f(x) = 0$ (av klass C^∞).

Till sist, notera att implicita funktionssatsen ger **tillräckliga** villkor för att ett ekvationssystem ska definiera vissa variabler som funktioner av de övriga, men dessa villkor är **inte nödvändiga**.

Exempel. $F(x,y) = y - |x|$ är ej av klass C^1, men ekvationen $F(x,y) = 0$ definierar ändå en funktion $y = f(x) = |x|$ (dock ej av klass C^1).

Exempel. $F(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ med $F(0,0) = 0$ är inte ens kontinuerlig i origo, men ekvationen $F(x,y) = 0$ definierar ändå en funktion $y = f(x) = 0$ (av klass C^∞).

Exempel. $F(x,y) = (y - x^2)^2$ har $\nabla F = (0,0)$ i alla punkter där $F = 0$, men ekvationen $F(x,y) = 0$ definierar ändå en funktion $y = f(x) = x^2$ (av klass C^∞).