TATA69 Flervariabelanalys

Kvadratiska former (mest repetition)

Hans Lundmark, MAI, LiU

Ordet ”form” har flera betydelser, både vardagliga och matematiska.

Matematisk specialbetydelse i detta sammanhang:

$$\boxed{\textbf{form}} = \boxed{\textbf{homogent polynom}}$$

- Ett **homogent polynom** är ett polynom där alla termer har samma grad.
- Oftast polynom i *flera* variabler; envariabelfallet är inte så intressant.

Linjära former har **grad ett**. Alltså såhär, i fallet med tre variabler:

$$L(x,y,z) = Ax + By + Cz.$$

Kvadratiska former har **grad två**:

$$Q(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz.$$

Kubiska former har **grad tre**:

$$K(x,y,z) = Ax^3 + By^3 + Cz^3 + Dx^2y + Ex^2z + Fxy^2 + Gy^2z + Hxz^2 + Iyz^2 + Jxyz.$$

Och så vidare.

Linjära former kan skrivas med hjälp av **matrisprodukt**:

$$L(x,y,z) = Ax + By + Cz = \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Likaså kvadratiska former:

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{pmatrix}}_{\textbf{symmetrisk}\text{ matris}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

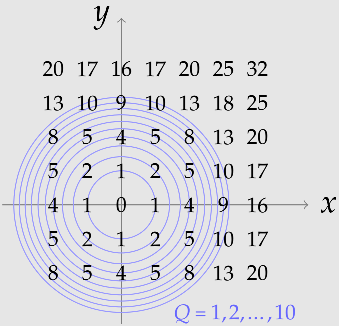
Låt oss verifiera detta:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ax + \frac{D}{2}y + \frac{E}{2}z \\ \frac{D}{2}x + By + \frac{F}{2}z \\ \frac{E}{2}x + \frac{F}{2}y + Cz \end{pmatrix} \\
&= x\left(Ax + \tfrac{D}{2}y + \tfrac{E}{2}z\right) + y\left(\tfrac{D}{2}x + By + \tfrac{F}{2}z\right) + z\left(\tfrac{E}{2}x + \tfrac{F}{2}y + Cz\right) \\
&= \left(Ax^2 + \tfrac{D}{2}xy + \tfrac{E}{2}xz\right) + \left(\tfrac{D}{2}xy + By^2 + \tfrac{F}{2}yz\right) + \left(\tfrac{E}{2}xz + \tfrac{F}{2}yz + Cz^2\right) \\
&= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \left(\tfrac{D}{2} + \tfrac{D}{2}\right)xy + \left(\tfrac{E}{2} + \tfrac{E}{2}\right)xz + \left(\tfrac{F}{2} + \tfrac{F}{2}\right)yz \\
&= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz
\end{aligned}
$$

OK, det stämmer!

Exempel (i två variabler)

$$Q(x,y) = x^2 + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

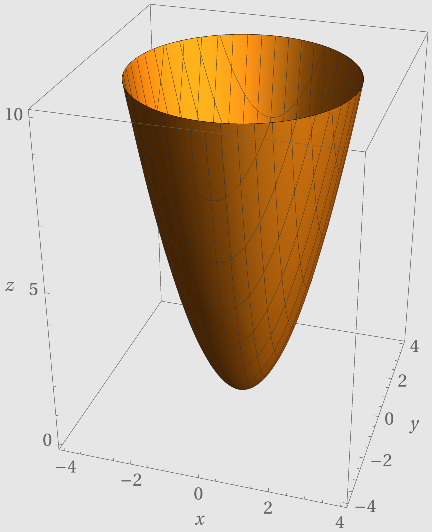


Nivåmängder: $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = C\}$

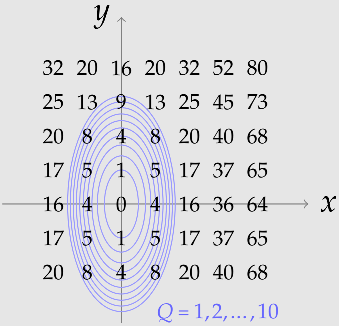
- Om $C > 0$: cirkel med radie $\sqrt{C}$.
- Om $C = 0$: punkten $(0,0)$ enbart.
- Om $C < 0$: tomma mängden.

Denna kvadratiska form är **positivt definit**.
(Antar bara positiva värden, förutom $Q(0,0) = 0$.)

Grafen $z = Q(x, y) = x^2 + y^2$ är en **rotationsparaboloid**:



$$\boxed{Q(x,y) = 4x^2 + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

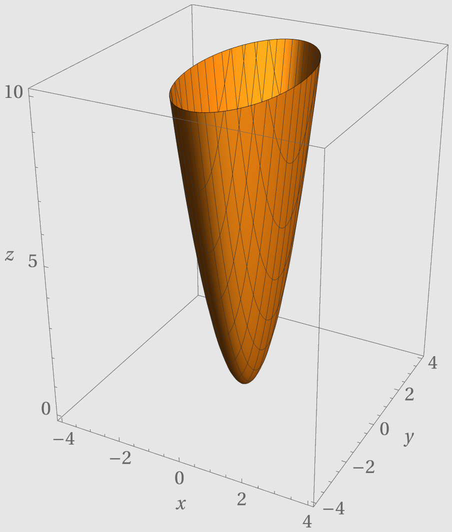


Nivåmängder: $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 4x^2 + y^2 = C\}$

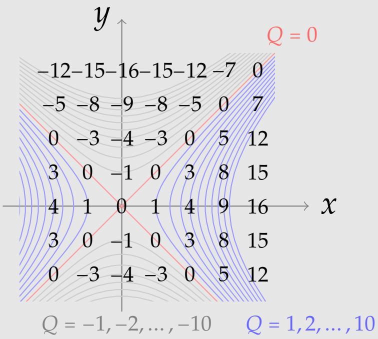
- Om $C > 0$: ellips med halvaxlar $\frac{1}{2}\sqrt{C}$ i x-led och $\sqrt{C}$ i y-led.
- Om $C = 0$: origo enbart.
- Om $C < 0$: tomma mängden.

Också **positivt definit**.

Grafen $z = Q(x, y) = 4x^2 + y^2$ är en **elliptisk paraboloid**:



$$Q(x,y) = x^2 - y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

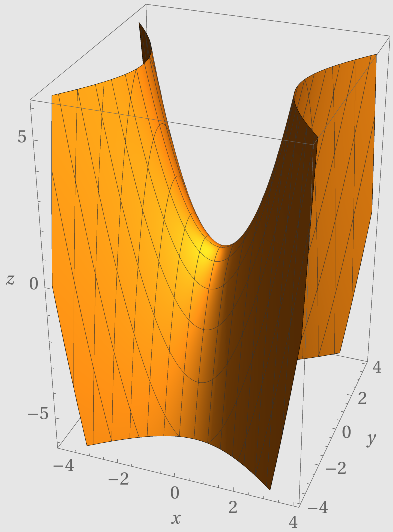


Nivåmängder: $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 - y^2 = C\}$

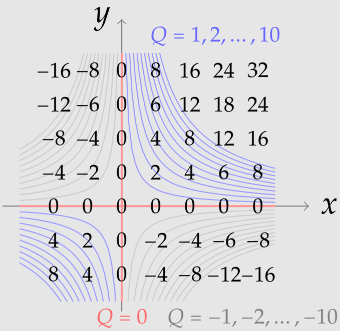
- Om $C = 0$: unionen av linjerna $y = x$ och $y = -x$.
- Om $C \neq 0$: hyperbel med linjerna $y = \pm x$ som asymptoter.

Denna kvadratiska form är **indefinit**.
(Antar både positiva och negativa värden.)

Grafen $z = Q(x, y) = x^2 - y^2$ är en **hyperbolisk paraboloid (sadelyta)**:



$$Q(x,y) = 2xy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

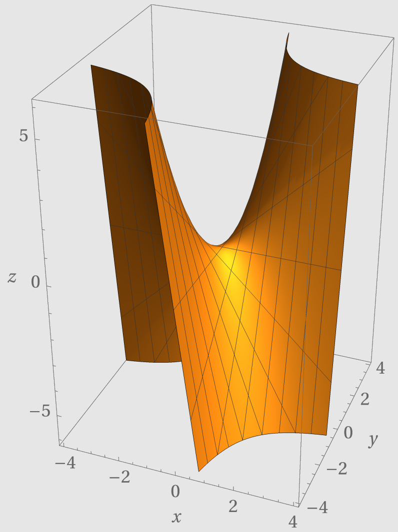


Nivåmängder: $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 2xy = C\}$

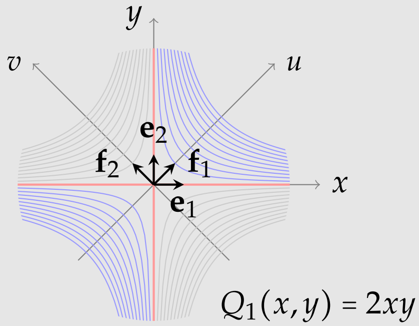
- Om $C = 0$: unionen av x- och y-axlarna.
- Om $C \neq 0$: hyperbel $y = \dfrac{C}{2x}$ med axlarna som asymptoter.

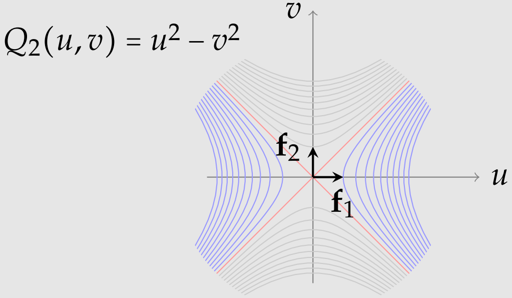
Också **indefinit**.

Grafen $z = Q(x, y) = 2xy$ är också en **sadelyta**:



Dessa två exempel är faktiskt ”samma”, skillnaden är bara 45 graders vridning av koordinatsystemet:

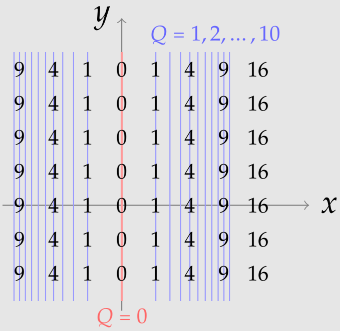




$$x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 = u\,\mathbf{f}_1 + v\,\mathbf{f}_2 = u\,\frac{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} + v\,\frac{-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} u-v \\ u+v \end{pmatrix}$$

$$\implies \boxed{Q_1(x,y) = 2xy = 2\cdot\frac{u-v}{\sqrt{2}}\cdot\frac{u+v}{\sqrt{2}} = u^2 - v^2 = Q_2(u,v)}$$

$$Q(x,y) = x^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

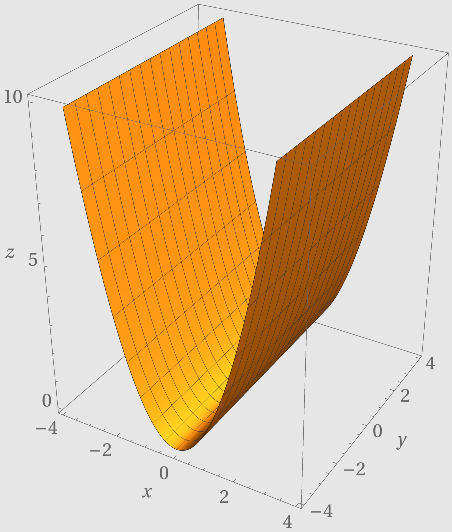


Nivåmängder: $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 = C\}$

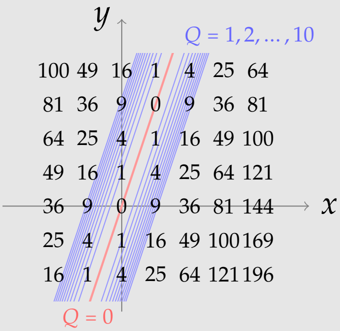
- Om $C > 0$: unionen av linjerna $x = \pm\sqrt{C}$.
- Om $C = 0$: linjen $x = 0$ (dvs. y-axeln).
- Om $C < 0$: tomma mängden.

Q är **positivt semidefinit**.
($Q \geq 0$ överallt, men $Q = 0$ inte bara i origo.)

Grafen $z = Q(x, y) = x^2$ är en parabelformad ”ränna”:



$$Q(x,y) = (3x-y)^2 = 9x^2 - 6xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

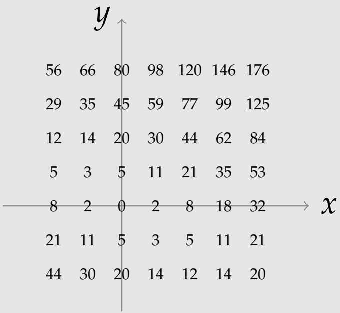


Nivåmängder: $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (3x-y)^2 = C\}$

- Om $C > 0$: unionen av linjerna $y = 3x \pm \sqrt{C}$.
- Om $C = 0$: linjen $y = 3x$.
- Om $C < 0$: tomma mängden.

Också **positivt semidefinit**.

$$Q(x,y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Q verkar vara **positivt definit**.

Men hur kan man veta det säkert?

Och hur ser **nivåmängderna** ut egentligen?

Teckenkaraktären kan avgöras med **kvadratkomplettering**:

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= 2x^2 + 4xy + 5y^2 \\ &= 2(x^2 + 2xy) + 5y^2 \\ &= 2\big((x+y)^2 - y^2\big) + 5y^2 \\ &= \underbrace{2(x+y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{3y^2}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Detta visar att $Q(x,y) \geq 0$ för alla (x,y). Och man ser även att $Q = 0$ **bara** i origo:

$$Q(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2(x+y)^2 = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Överallt annars är alltså $Q > 0$, dvs. det stämmer att Q är **positivt definit**.

Nivåmängdernas utseende då?

Använd **linjär algebra** för att hitta ett lämpligt **vridet koordinatsystem**:

$$Q(x,y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{=S} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Kalla den symmetriska matrisen för S. Den karaktäristiska ekvationen

$$0 = \det(S - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 2^2 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$$

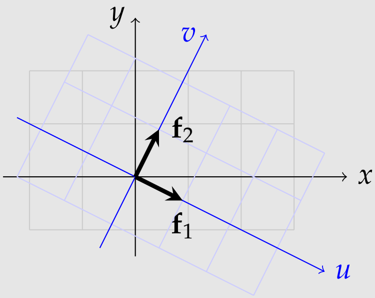
ger att egenvärdena för S är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 6$.

Tillhörande normerade egenvektorer: $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ resp. $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Variabelbytet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u\,\mathbf{f}_1 + v\,\mathbf{f}_2 = u\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{basbytesmatris } T \text{ med} \\ \mathbf{f}_1 \text{ \& } \mathbf{f}_2 \text{ som kolonner}}}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

ger ett nytt ON-koordinatsystem (u, v) med axlar i egenvektorernas riktningar:



Från $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ fås $x = \dfrac{2u+v}{\sqrt{5}}$ och $y = \dfrac{-u+2v}{\sqrt{5}}$.

Insättning av detta i uttrycket för $Q(x,y)$ ger

$$\begin{aligned}
Q(x,y) &= 2x^2 + 4xy + 5y^2 \\
&= 2\left(\frac{2u+v}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{2u+v}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-u+2v}{\sqrt{5}}\right) + 5\left(\frac{-u+2v}{\sqrt{5}}\right)^2 \\
&= \tfrac{2}{5}\left(4u^2 + 4uv + v^2\right) + \tfrac{4}{5}\left(-2u^2 + 3uv + 2v^2\right) + \tfrac{5}{5}\left(u^2 - 4uv + 4v^2\right) \\
&= \tfrac{8-8+5}{5}\, u^2 + \tfrac{8+12-20}{5}\, uv + \tfrac{2+8+20}{5}\, v^2 \\
&= 1\, u^2 + 0\, uv + 6\, v^2 \\
&= 1u^2 + 6v^2 \quad (= \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2) \quad \longleftarrow \text{uttryck för } Q \text{ i de nya koordinaterna}
\end{aligned}$$

Det är ingen slump att det blev så!

När man byter variabler på detta sätt fås **alltid** $Q = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$ i nya koordinater.

Bevis. Låt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ och $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, samt $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Variabelbytet är $X = TU$, där $T^t T = I$ eftersom båda koordinatsystemen är **ON-system**.

Och $ST = TD$, eftersom $S\mathbf{f}_1 = \lambda_1 \mathbf{f}_1$ och $S\mathbf{f}_2 = \lambda_2 \mathbf{f}_2$. ($T$:s kolonner $\mathbf{f}_1$ & $\mathbf{f}_2$ är ju **egenvektorer** till S.)

Alltså:

$$Q = X^t S X = (TU)^t S (TU) = U^t T^t S T U = U^t T^t T D U = U^t I D U = U^t D U,$$

vilket skulle visas. $\square$

Detta bevis med matrisräkning fungerar i godtycklig dimension, inte bara i tvåvariabelfallet. Eftersom S är **symmetrisk**, finns det en **ON-bas av egenvektorer**, och byte till denna ger alltså alltid $Q = U^t D U = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \cdots + \lambda_n u_n^2$ med enbart rena kvadrater, inga blandtermer.

Vi har nu alltså

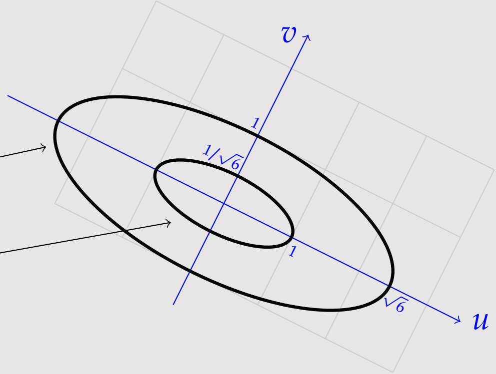
$$\boxed{Q = 2x^2 + 4xy + 5y^2 = u^2 + 6v^2}$$

Glöm nu (x, y)-koordinaterna för ett ögonblick. Från uttrycket $Q = u^2 + 6v^2$ är det lätt att rita Q:s nivåkurvor i (u, v)-koordinatsystemet:

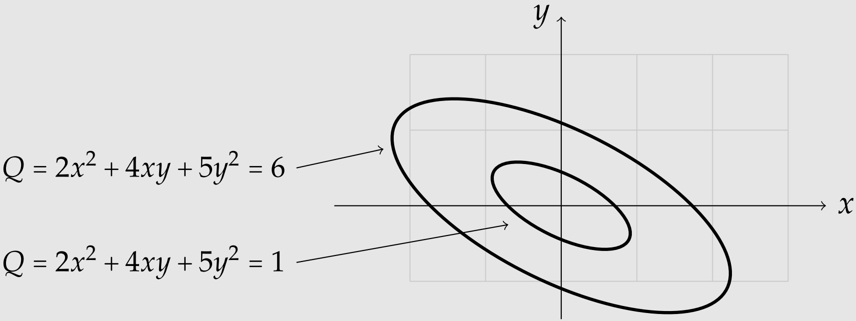
$Q = u^2 + 6v^2 = 6$

$Q = u^2 + 6v^2 = 1$

etc.

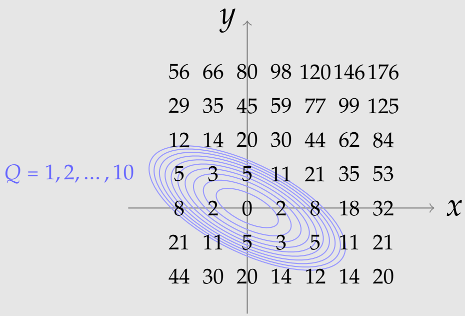


För att svara på den ursprungliga frågan om nivåkurvorna i xy-planet är det nu bara att låta ellipserna ligga, sudda ut u- och v-axlarna och rita dit (x, y)-koordinatsystemet igen:



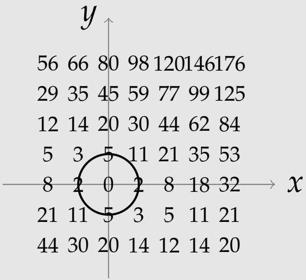
Såhär ser det ut tillsammans med värdetabellen:

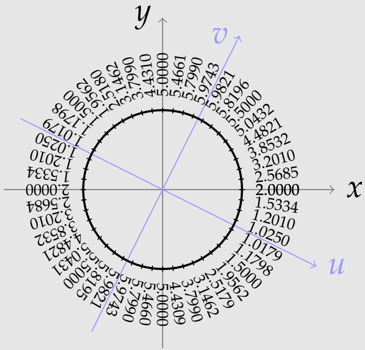
$$Q(x,y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Notera att värdena $Q = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = 1u^2 + 6v^2$ växer som **långsammast** i u-riktningen (nivåkurvorna kommer glest) och som **snabbast** i v-riktningen (nivåkurvorna kommer tätt).

Fokusera nu på de värden i värdetabellen som ligger på **enhetscirkeln**. Dessa värden bestämmer alla Q:s värden, eftersom $Q(cx, cy) = c^2 Q(x, y)$.





Enhetscirkeln beskrivs såklart av ekvationen $x^2 + y^2 = 1$ i (x, y)-systemet, men även av $u^2 + v^2 = 1$ i (u, v)-systemet, eftersom det också är ett ON-system.

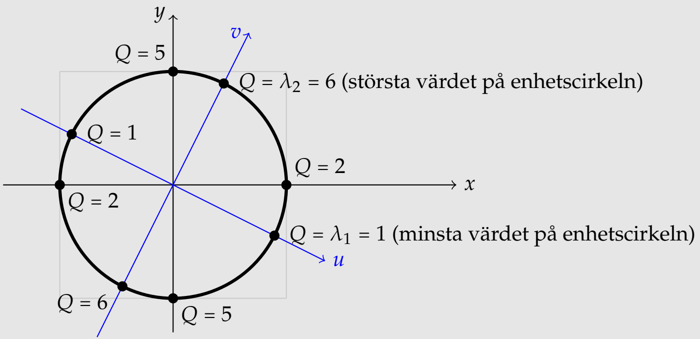
Det **minsta värdet** som den kvadratiska formen Q antar **på enhetscirkeln** $u^2+v^2=1$ är det **minsta egenvärdet** $\lambda_1=1$. Detta värde antas i punkterna $(u,v)=\pm(1,0)$, dvs. $(x,y)=\pm(2/\sqrt{5},-1/\sqrt{5})$.

Och Q:s **största värde på enhetscirkeln** är det **största egenvärdet** $\lambda_2=6$. Detta värde antas i punkterna $(u,v)=\pm(0,1)$, dvs. $(x,y)=\pm(1/\sqrt{5},2/\sqrt{5})$.

$$\boxed{Q=\lambda_1u^2+\lambda_2v^2=1u^2+6v^2}$$

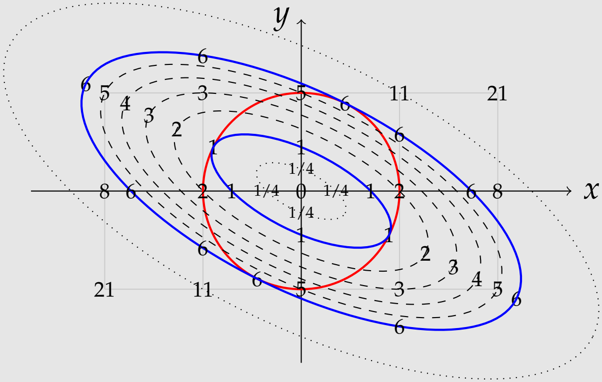
På enhetscirkeln gäller

$$\underbrace{1u^2+1v^2}_{=1}\le\underbrace{1u^2+6v^2}_{=Q}\le\underbrace{6u^2+6v^2}_{=6}$$



Nivåkurvorna $Q = \lambda_1 = 1$ och $Q = \lambda_2 = 6$ tangerar enhetscirkeln just i de punkter där f:s min/max på cirkeln inträffar.

Övriga punkter på cirkeln tillhör mellanliggande nivåkurvor $Q = C$ med $1 < C < 6$.



Kvadratiska former i tre variabler

$$Q = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$$
$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{pmatrix}}_{\text{symmetrisk matris } S} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Basbyte $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = u\mathbf{f}_1 + v\mathbf{f}_2 + w\mathbf{f}_3$ till ON-bas av egenvektorer för S ger

$$\boxed{Q = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2}$$

Som vanligt för trevariabelfunktioner kan vi ej rita någon graf, men vi kan visualisera värdetabell och nivåmängder i $\mathbf{R}^3$, samt avgöra Q:s teckenkaraktär.

Egenvärdenas tecken	Q:s teckenkaraktär	Nivåmängd $\{Q = C\}$
$+, +, +$	pos. def.	Ellipsoid för $C > 0$, origo för $C = 0$.
$+, +, 0$	pos. semidef.	Elliptisk cylinder för $C > 0$, linje för $C = 0$.
$+, 0, 0$	pos. semidef.	Två parallella plan för $C > 0$, ett plan för $C = 0$.
$-, -, -$	neg. def.	
$-, -, 0$	neg. semidef.	Vice versa ($C < 0$ istället för $C > 0$).
$-, 0, 0$	neg. semidef.	
$0, 0, 0$	pos. **och** neg. semidef.!	$\mathbf{R}^3$ för $C = 0$, annars $\varnothing$.
$+, +, -$	indef.	Kon för $C = 0$, enmantlad hyperboloid för $C > 0$, tvåmantlad hyperboloid för $C < 0$.
$+, -, -$	indef.	Vice versa.
$+, 0, -$	indef.	Två korsande plan för $C = 0$, annars hyperbolisk cylinder.

Q:s största och minsta värde på **enhetssfären** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (eller $u^2 + v^2 + w^2 = 1$) är lika med det största resp. minsta egenvärdet.

Att beräkna egenvärdena kräver att man löser en tredjegradsekvation (karaktäristiska polynomet har ju grad 3).

Vi behöver dock inte egenvärdena för att avgöra teckenkaraktären, utan kan istället använda **kvadratkomplettering**, som i de följande exemplen.

(Jag kallar där variablerna för (h, k, l), eftersom det är så de oftast kommer att heta när vi letar lokala extrempunkter i denna kurs.)

$$
\begin{aligned}
Q(h,k,l) &= h^2 + 8k^2 + 7l^2 - 4hk + 4hl + 4kl \\
&= (h^2 - 4hk + 4hl) + 8k^2 + 4kl + 7l^2 && \text{Samla (t.ex.) alla } h \text{ först.} \\
&= h^2 + h(-4k + 4l) + 8k^2 + 4kl + 7l^2 \\
&= \big(h + (-2k + 2l)\big)^2 - (-2k + 2l)^2 + 8k^2 + 4kl + 7l^2 && \text{Kv.kompl.} \\
&= (h - 2k + 2l)^2 - (4k^2 + 4l^2 - 8kl) + 8k^2 + 4kl + 7l^2 \\
&= (h - 2k + 2l)^2 + 4k^2 + 3l^2 + 12kl \\
&= (h - 2k + 2l)^2 + 4(k^2 + 3kl) + 3l^2 && \text{Samla (t.ex.) alla } k. \\
&= (h - 2k + 2l)^2 + 4\Big((k + \tfrac{3}{2}l)^2 - \tfrac{9}{4}l^2\Big) + 3l^2 && \text{Kv.kompl.} \\
&= (h - 2k + 2l)^2 + 4(k + \tfrac{3}{2}l)^2 - 6l^2
\end{aligned}
$$

Resultat av kvadratkompletteringen på förra sidan:

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= h^2 + 8k^2 + 7l^2 - 4hk + 4hl + 4kl \\ &= (h - 2k + 2l)^2 + 4(k + \tfrac{3}{2}l)^2 - 6l^2 \end{aligned}$$

Från detta ser vi att Q är **indefinit**, dvs. att Q antar såväl positiva som negativa värden. Motivering: exempelvis är

$$Q(1,0,0) = 1^2 + 4 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0^2 = 1 + 0 - 0 = 1 > 0$$

och

$$Q(-5, -\tfrac{3}{2}, 1) = 0^2 + 4 \cdot 0^2 - 6 \cdot 1^2 = 0 + 0 - 6 = -6 < 0.$$

(Dubbelkoll i det *ursprungliga* uttrycket för Q:

$$\begin{aligned} Q(-5, -\tfrac{3}{2}, 1) &= (-5)^2 + 8 \cdot (-\tfrac{3}{2})^2 + 7 \cdot 1^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-\tfrac{3}{2}) + 4 \cdot (-5) \cdot 1 + 4 \cdot (-\tfrac{3}{2}) \cdot 1 \\ &= 25 + 18 + 7 - 30 - 20 - 6 = -6, \quad \text{OK!}) \end{aligned}$$

Men om vi t.ex. hade haft $8l^2$ mer från början så hade vi fått $8l^2$ mer i slutet av samma uträkning, alltså

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= h^2 + 8k^2 + 15l^2 - 4hk + 4hl + 4kl \\ &= (h - 2k + 2l)^2 + 4(k + \tfrac{3}{2}l)^2 + 2l^2 \end{aligned}$$

I detta fall drar vi slutsatsen att Q är **positivt definit**, dvs. att $Q(h,k,l) > 0$ för alla $(h,k,l) \neq (0,0,0)$. Motivering: $Q(h,k,l) \geq 0$ för alla (h,k,l), eftersom Q är en summa av tre icke-negativa termer, och enda sättet för en sådan summa att bli noll är att alla tre termerna blir noll samtidigt, vilket bara inträffar i origo:

$$Q = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (h - 2k + 2l)^2 = 0 \\ 4(k + \frac{3}{2}l)^2 = 0 \\ 2l^2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} h - 2k + 2l = 0 \\ k + \frac{3}{2}l = 0 \\ l = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} h = 0 \\ k = 0 \\ l = 0 \end{cases}$$

Ännu en variant av samma exempel, men nu med $2l^2$ mindre:

$$
\begin{aligned}
Q(h,k,l) &= h^2 + 8k^2 + 13l^2 - 4hk + 4hl + 4kl \\
&= (h - 2k + 2l)^2 + 4(k + \tfrac{3}{2}l)^2 + 0l^2 \\
&= (h - 2k + 2l)^2 + 4(k + \tfrac{3}{2}l)^2
\end{aligned}
$$

Här blir Q **positivt semidefinit**, dvs. $Q(h,k,l) \geq 0$ för alla (h,k,l), men det är inte bara i origo som Q är lika med noll. Motivering: liksom på förra sidan är $Q(h,k,l) \geq 0$ för alla (h,k,l), eftersom Q är en summa av två icke-negativa termer, men i motsats till förra sidan kan Q här bli noll på flera sätt:

$$
Q = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (h - 2k + 2l)^2 = 0 \\ 4(k + \frac{3}{2}l)^2 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} h - 2k + 2l = 0 \\ k + \frac{3}{2}l = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} h = -5t \\ k = -\frac{3}{2}t \\ l = t \end{cases}
$$

där t är en godtycklig parameter; t.ex. är $Q(-5, -\frac{3}{2}, 1) = 0$.

Kvadratkomplettering på ovanstående **systematiska** sätt ger ett ”triangulärt” uttryck

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= A_1\,(h + C_1\,k + C_2\,l)^2 \\ &\quad + A_2\,(k + C_3\,l)^2 \\ &\quad + A_3\,l^2 \end{aligned}$$

(eller motsvarande med variablerna h, k och l omkastade). Resonemang som ovan visar att samma teckenregler gäller för koefficienterna A_i som för egenvärdena λ_i:

- Om alla $A_i > 0$ så är Q positivt definit.
- Om alla $A_i \geq 0$ och minst en $A_i = 0$ så är Q positivt semidefinit.
- Om det förekommer både positiva och negativa A_i så är Q indefinit.
- …

Ett undantagsfall inträffar om det saknas rena kvadrattermer i något steg, t.ex.

$$\begin{aligned}
Q(h,k,l) &= 9h^2 + 4k^2 + 25l^2 - 12hk + 30hl - 16kl \\
&= 9(h^2 - \tfrac{4}{3}hk + \tfrac{10}{3}hl) + 4k^2 + 25l^2 - 16kl \\
&= 9\Big(\big(h + (-\tfrac{2}{3}k + \tfrac{5}{3}l)\big)^2 - (-\tfrac{2}{3}k + \tfrac{5}{3}l)^2\Big) + 4k^2 + 25l^2 - 16kl \\
&= 9(h - \tfrac{2}{3}k + \tfrac{5}{3}l)^2 - 9(\tfrac{4}{9}k^2 + \tfrac{25}{9}l^2 - \tfrac{20}{9}kl) + 4k^2 + 25l^2 - 16kl \\
&= 9(h - \tfrac{2}{3}k + \tfrac{5}{3}l)^2 + 4kl
\end{aligned}$$

Här saknas både k^2 och l^2, så vi kan inte fortsätta kvadratkompletteringen. Men t.ex.

$$Q(-1,1,1) = 9 \cdot 0^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 > 0$$

och

$$Q(\tfrac{7}{3},1,-1) = 9 \cdot 0^2 + 4 \cdot 1 \cdot (-1) = -4 < 0$$

så Q är indefinit.

Avslutningsvis, ett fall där det är onödigt jobb att kvadratkomplettera:

En kvadratisk form där det finns **rena kvadrattermer med olika tecken framför**, t.ex.

$$Q(h,k,l) = \boxed{4h^2 + 3k^2 - 7l^2} + Dhk + Ehl + Fhk,$$

måste vara **indefinit**, vilket omedelbart visas av superenkla exempel i stil med

$$Q(1,0,0) = 4 > 0$$

och

$$Q(0,0,1) = -7 < 0.$$

(Men för att visa något annat än ”indefinit” räcker det såklart inte med bara exempel, utan då måste man komma med ett vattentätt resonemang, förslagsvis baserat på systematisk kvadratkomplettering.)