TATA69 Flervariabelanalys

Linjära och affina avbildningar (mest repetition)

Hans Lundmark, MAI, LiU

Linjär avbildning från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{cases} u_1 = a_1\, x_1 + b_1\, x_2 \\ u_2 = a_2\, x_1 + b_2\, x_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Affin avbildning från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$:

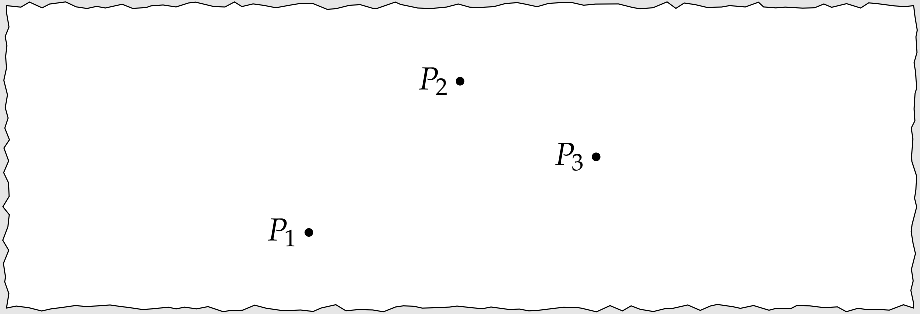
$$\begin{cases} u_1 = a_1\, x_1 + b_1\, x_2 + c_1 \\ u_2 = a_2\, x_1 + b_2\, x_2 + c_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Talparet $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ (indata) avbildas på talparet $(u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$ (utdata).

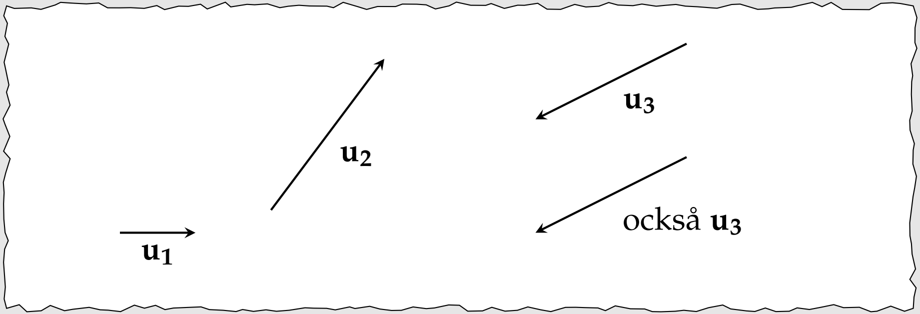
Koefficienterna a_k, b_k, c_k är rella tal (konstanter).

Geometriskt sett

- Talpar kan tolkas som koordinater för **punkter** eller för **vektorer** i planet.
- Linjära avbildningar är något man gör med **vektorer**.
- Affina avbildningar är något man gör med **punkter**.

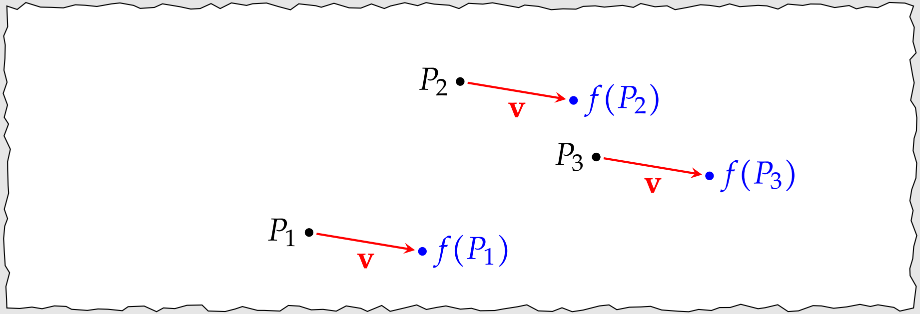


Punkter i planet.



Vektorer i planet.

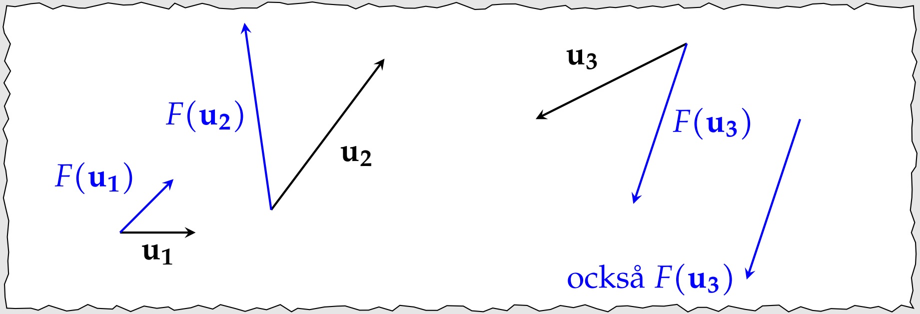
Translation (parallellförflyttning), en avbildning som transformerar **punkter**:



$$\boxed{f(P) = P + \mathbf{v}}$$

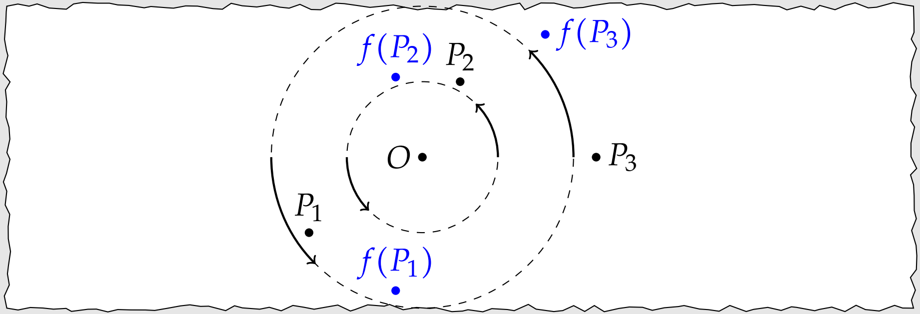
(där **v** är en given vektor)

Vridning 45 grader, en avbildning som transformerar **vektorer**:



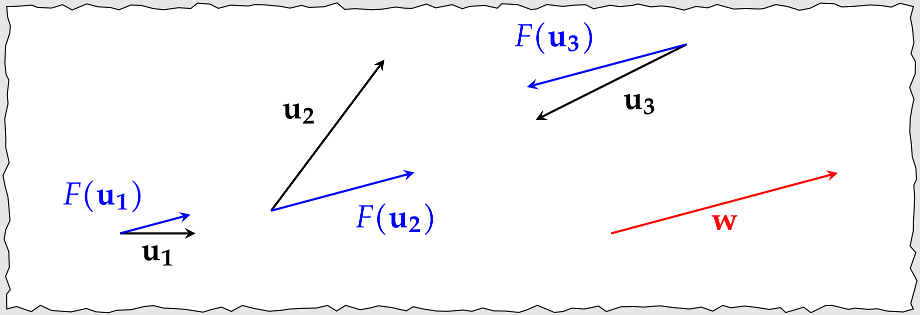
$F(\mathbf{v})$ = den vektor som fås genom att vrida $\mathbf{v}$ 45° i positiv led (moturs)

Vridning 45 grader kring given punkt, en avbildning som transformerar **punkter**:



$$f(P) = \text{den punkt där } P \text{ hamnar när planet vrids } 45^\circ \text{ moturs kring } O$$
$$= O + F(\overrightarrow{OP}), \quad \text{där } F \text{ är avbildningen som vrider } \textbf{vektorer } 45^\circ$$

Ortogonal projektion på given vektor $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, transformation av **vektorer**:

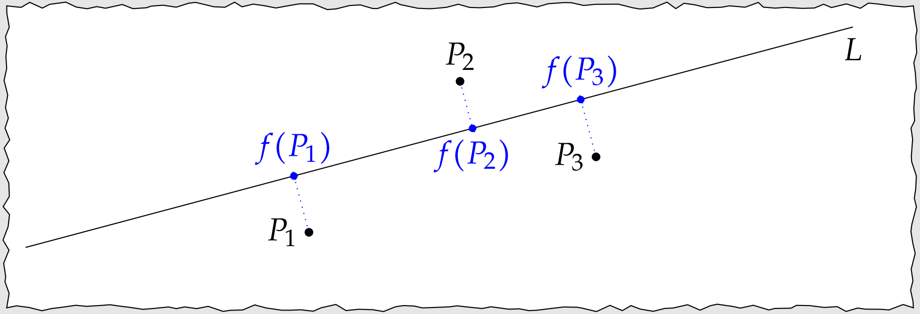


$$\boxed{F(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}}\,\mathbf{w}}$$ **(projektionsformeln)**

$\big[F(\mathbf{v}) = k\,\mathbf{w}$ där $\mathbf{v} - F(\mathbf{v}) \perp \mathbf{w}$, dvs. $(\mathbf{v} - k\,\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = 0$, dvs. $k = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})/(\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}).\big]$

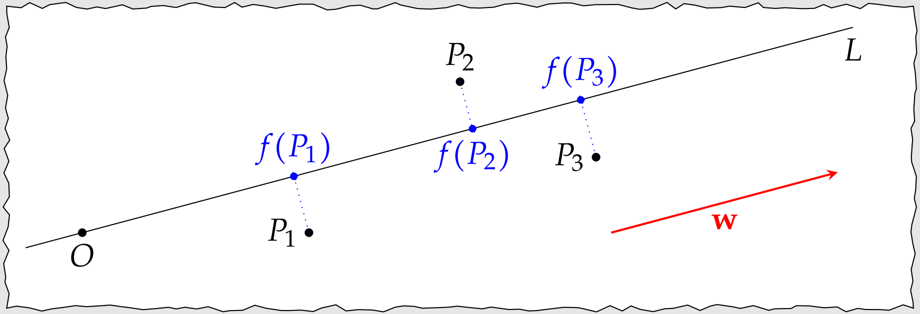
Resultatet beror bara på **w**:s riktning, inte på **w**:s längd.

Ortogonal projektion på given linje L, transformation av **punkter**:



$f(P)$ = den punkt på linjen L som ligger närmast P

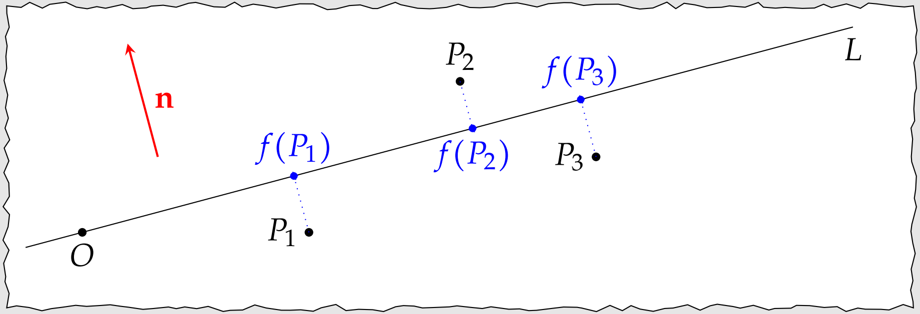
Om linjen ges på parameterform av $L = \{O + t\,\mathbf{w} : t \in \mathbf{R}\}$:



$$f(P) = O + F(\overrightarrow{OP}), \quad \text{där } F(\mathbf{v}) = \tfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}}\,\mathbf{w} \text{ är projektion (av } \textbf{vektorer}\text{) på } \mathbf{w}$$

O är en (godtycklig) punkt på linjen, $\mathbf{w}$ är en (godtycklig) riktningsvektor för linjen.

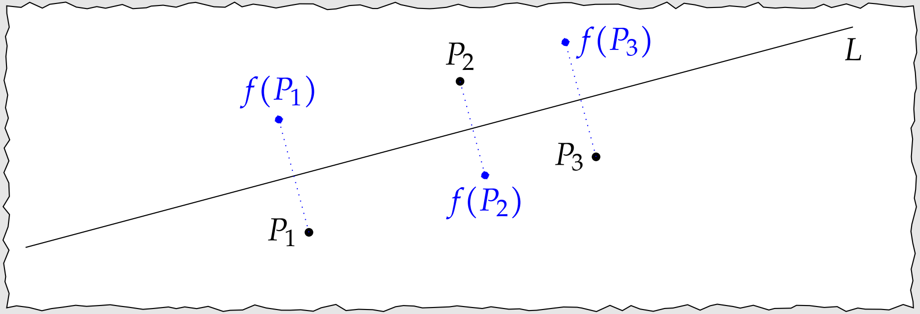
Eller om man känner till en normalvektor istället:



$$f(P) = P + G(\overrightarrow{PO}) = P - G(\overrightarrow{OP}), \quad \text{där } G(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n} \text{ är projektion (av } \textbf{vektorer}\text{) på } \mathbf{n}$$

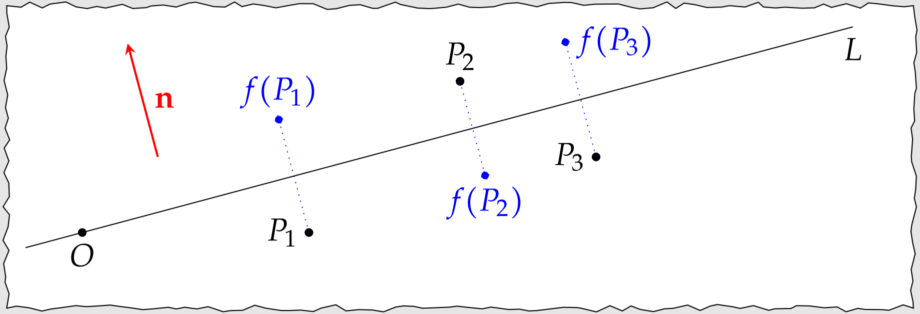
O är en (godtycklig) punkt på linjen, **n** är en (godtycklig) normalvektor till linjen.

Spegling med avseende på given linje L, transformation av **punkter**:



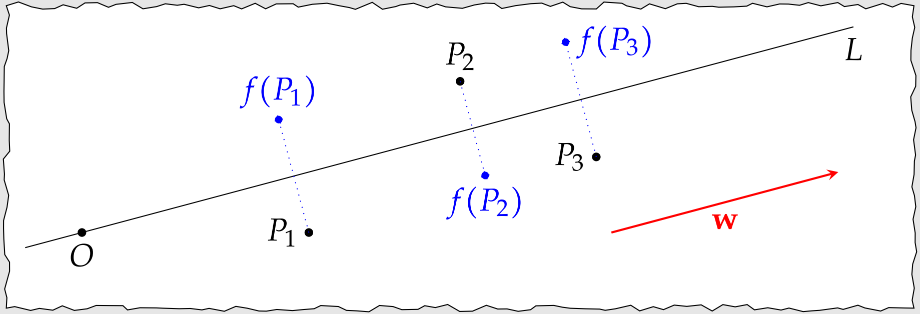
$f(P)$ = punkten som ligger rakt mittemot P, på andra sidan av L

Beräkning, om man har en normalvektor till linjen:



$$f(P) = P + 2\,G(\overrightarrow{PO}) = P - 2\,G(\overrightarrow{OP}), \quad \text{där } G(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n} \text{ är projektion på } \mathbf{n}$$

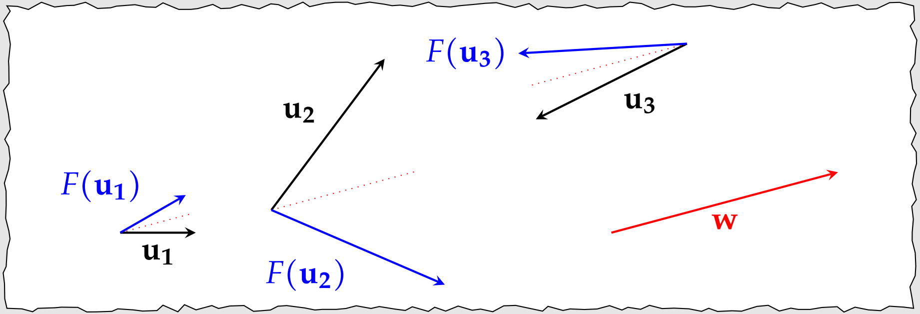
Eller om man har en riktningsvektor:



$$\boxed{f(P) = P - 2\left(\overrightarrow{OP} - F(\overrightarrow{OP})\right), \quad \text{där } F(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}}\,\mathbf{w} \text{ är projektion på } \mathbf{w}}$$

(Ty $\mathbf{v} = F(\mathbf{v}) + G(\mathbf{v})$ för alla $\mathbf{v}$, så att $G(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP} - F(\overrightarrow{OP}$.)

Spegling med avseende på given vektor $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, transformation av **vektorer**:



$$\boxed{F(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}}\,\mathbf{w}\right)}$$

Linjära avbildningar

En **linjär avbildning** är en avbildning F som transformerar **vektorer** och **bevarar linjärkombinationer**, dvs.

$$\boxed{F(\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v}) = \alpha\,F(\mathbf{u}) + \beta\,F(\mathbf{v})}$$

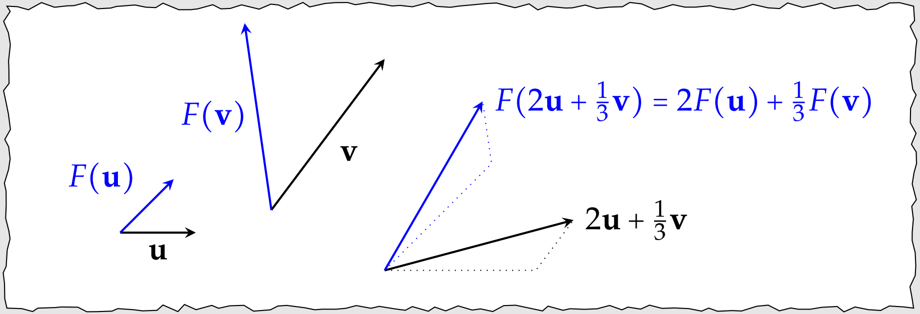
för alla vektorer **u** och **v** och alla reella tal α och β.

(Ekvivalent: F är **additiv** och **homogen (av grad 1)**, dvs.

$$\boxed{\begin{aligned} F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) \\ F(\alpha\,\mathbf{u}) &= \alpha\,F(\mathbf{u}) \end{aligned}}$$

för alla vektorer **u** och **v** och alla reella tal α.)

Exempel. De avbildningar ovan som avbildar vektorer är alla linjära. T.ex. vridning:



C.67 Fatta ändarna av en pekpinne mellan dina utsträckta armar och vrid dej själv v radianer kring din egen axel. Vad har du då bevisat? Testa samma manöver med pekpinnen i din högra hand, i rät linje med din sträckta arm. Visa för någon som aldrig läst Linjär Algebra. Tolka resultatet.

Peter Hackman, *Boken med kossan på. Läropamflett i linjär algebra* (1990)

Om $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ är en bas för planet så är en linjär avbildning F entydigt bestämd av **basvektorernas bilder** $F(\mathbf{e}_1)$ och $F(\mathbf{e}_2)$, eftersom

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2) = x_1\,F(\mathbf{e}_1) + x_2\,F(\mathbf{e}_2).$$

Om

$$F(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad F(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

så är alltså

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(denna matris kallas **avbildningsmatrisen** för F i basen $\underline{\mathbf{e}}$)

Ofta är basen underförstådd, och avbildningen

$$\mathbf{u} = F(\mathbf{x})$$

skrivs då som

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{cases} u_1 = a_1\, x_1 + b_1\, x_2 \\ u_2 = a_2\, x_1 + b_2\, x_2 \end{cases}$$

Affina avbildningar

En avbildning f som transformerar **punkter** sägs vara **affin** om den är lika med "**en linjär avbildning plus en translation**", dvs. om det finns en linjär avbildning F sådan att

$$f(P) = O + \underbrace{F(\overrightarrow{OP})}_{\text{linj. avb.}} + \underbrace{\big(f(O) - O\big)}_{\text{translation}} = f(O) + F(\overrightarrow{OP})$$

Valet av origo O är irrelevant här, eftersom

$$f(O) + F(\overrightarrow{OP}) = f(O) + F(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}) = f(O) + F(\overrightarrow{OO'}) + F(\overrightarrow{O'P}) = f(O') + F(\overrightarrow{O'P})$$

Så den linjära avbildningen F, den **linjära delen** av den affina avbildningen f, är entydigt bestämd och beror ej på O.

Sambandet $f(P) = f(O) + F(\overrightarrow{OP})$ uttryckt i koordinatsystemet $(O, \underline{\mathbf{e}})$, där $\underline{\mathbf{e}}$ är en bas:

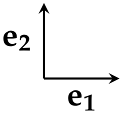
$$\begin{cases} u_1 = a_1\, x_1 + b_1\, x_2 + c_1 \\ u_2 = a_2\, x_1 + b_2\, x_2 + c_2 \end{cases}$$

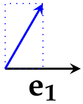
- (x_1, x_2) och (u_1, u_2) är koordinaterna för punkterna P resp. $f(P)$ i koordinatsystemet $(O, \underline{\mathbf{e}})$, alltså koordinaterna för deras ortsvektorer $\overrightarrow{OP} = P - O$ och $f(P) - O$ i basen $\underline{\mathbf{e}}$.
- $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ är avbildningsmatrisen för F i basen $\underline{\mathbf{e}}$. (Beror ej på valet av O.)
- (c_1, c_2) är koordinaterna för punkten $f(O)$ i koordinatsystemet $(O, \underline{\mathbf{e}})$, alltså koordinaterna för dess ortsvektor $f(O) - O$ i basen $\underline{\mathbf{e}}$.

Exempel. De avbildningar ovan som avbildar punkter är alla affina.

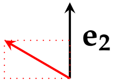
Linjärt exempel. Avbildningsmatris i höger-ON-bas $\underline{\mathbf{e}}$ för vridning vinkeln α moturs.

$$F(\mathbf{e}_1) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$





$$F(\mathbf{e}_2) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$$



$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

Affint exempel. Vridning $\pi/6$ moturs kring punkten $(5,2)$ (höger-ON-system).

Vridning kring punkten O, enligt vad vi såg tidigare:

$$f(P) = O + F(\overrightarrow{OP}), \quad \text{där } F \text{ är vridning av } \textbf{vektorer}.$$

Alltså, med F given av vridningsmatrisen från förra sidan:

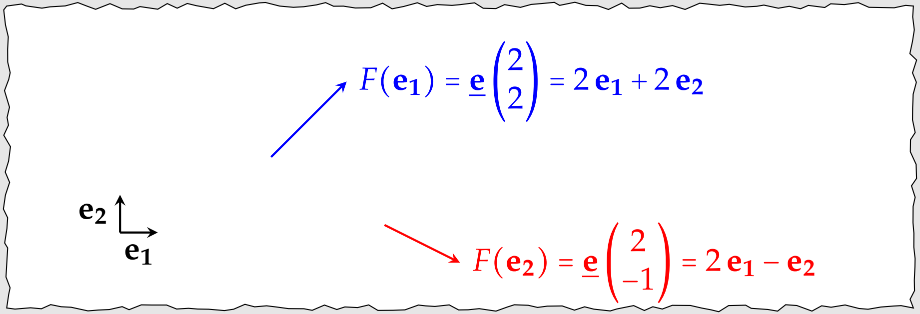
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(Så avbildningen är samma sak som att rotera $\pi/6$ moturs kring punkten $(0,0)$ och sedan translatera längs vektorn $\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) - \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.)

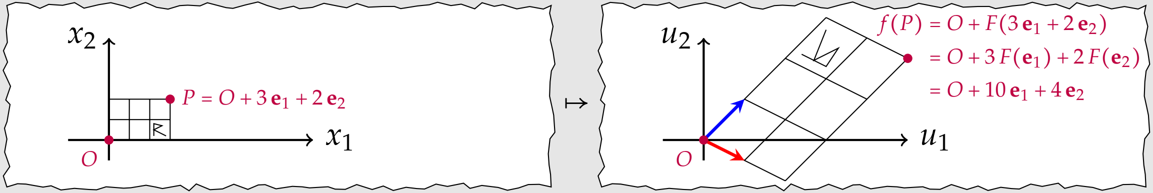
Varje linjär avbildning kan tolkas som en affin avbildning med $c_1 = c_2 = 0$, vilket kan underlätta visualisering. Geometriskt: inför ett origo O och sätt $f(P) = O + F(\overrightarrow{OP})$.

Exempel. Betrakta den linjära avbildning F som i en ON-bas $\underline{\mathbf{e}}$ ges av

$$\begin{cases} u_1 = 2\,x_1 + 2\,x_2 \\ u_2 = 2\,x_1 + (-1)\,x_2 \end{cases}$$



Tolkat som affin avbildning $f(P) = O + F(\overrightarrow{OP})$:



Avbildningsmatris för F i basen $\underline{\mathbf{e}}$: $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

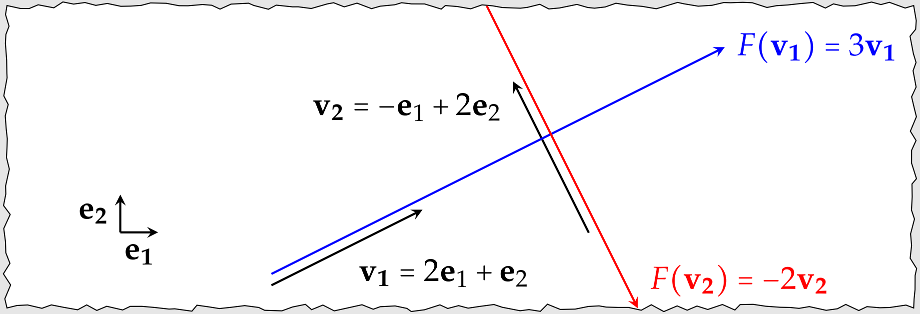
Om t.ex. punkten P har koordinaterna $(3,2)$ i koordinatsystemet $(O,\underline{\mathbf{e}})$ så har punkten $f(P)$ koordinaterna (10,4), eftersom

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

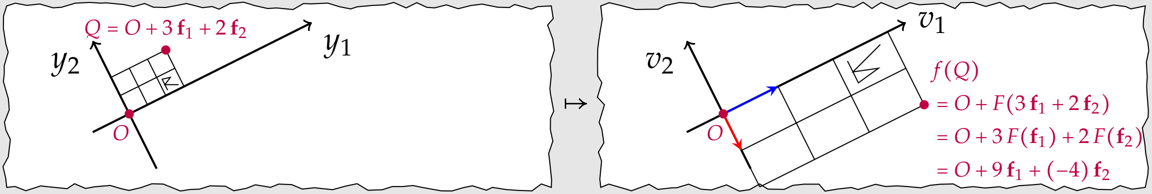
A:s determinant är $2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -6$, så areaskalan är 6 och orienteringen ändras.

Egenvektorer och egenvärden ($A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, hittas via $\det(A - \lambda I) = 0$ osv.):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\lambda_1\mathbf{v}_1} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{A\mathbf{v}_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \underbrace{-2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\lambda_2\mathbf{v}_2}$$



Samma avbildning beskriven i ett nytt koordinatsystem $(O, \underline{\mathbf{f}})$, där $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ är en ON-bas av egenvektorer ($\mathbf{f}_k = \mathbf{v}_k / |\mathbf{v}_k|$, så att $F(\mathbf{f}_1) = 3\,\mathbf{f}_1$ och $F(\mathbf{f}_2) = -2\,\mathbf{f}_2$):



Formlerna blir enklare i detta koordinatsystem:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{avbildningsmatrisen för } F \text{ i basen } \underline{\mathbf{f}}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} v_1 = 3\,y_1 \\ v_2 = -2\,y_2 \end{cases}$$

Och avbildningens geometriska innebörd är klarare, den är ”demaskerad”.

Basbyte och linjära avbildningar allmänt

Låt F vara en linjär avbildning med matrisen A_e i basen $\underline{\mathbf{e}}$:

$$\boxed{F(\underline{\mathbf{e}}X) = \underline{\mathbf{e}}A_eX}$$

Basbyte med **bassambandet**

$$\boxed{\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T}$$

ger $\underline{\mathbf{e}}X = \underline{\mathbf{f}}Y = \underline{\mathbf{e}}TY$, dvs. **koordinatsambandet** är

$$\boxed{X = TY}$$

och avbildningsmatrisen i den nya basen blir därmed såhär:

$$F(\underline{\mathbf{f}}Y) = F(\underline{\mathbf{e}}X) = \underline{\mathbf{e}}A_eX = (\underline{\mathbf{f}}T^{-1})A_e(TY) = \underline{\mathbf{f}}(T^{-1}A_eT)Y,$$

dvs.

$$\boxed{F(\underline{\mathbf{f}}Y) = \underline{\mathbf{f}}A_fY} \qquad \text{där} \qquad \boxed{A_f = T^{-1}A_eT}$$

Avbildningar som inte är linjära eller affina

Affina avbildningar

$$\begin{cases} u_1 = a_1\, x_1 + b_1\, x_2 + c_1 \\ u_2 = a_2\, x_1 + b_2\, x_2 + c_2 \end{cases}$$

är väldigt speciella; det krävs att man har förstagradspolynom i högerledet.

Vad som helst annars ger en icke-affin avbildning, t.ex.

$$\begin{cases} u_1 = \sin(x_1 + x_2) \\ u_2 = x_1 x_2 + x_2^3 \end{cases}$$

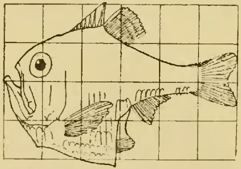


Fig. 373. *Argyropelecus Olfersi.*

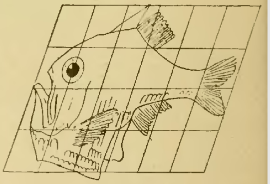


Fig. 374. *Sternoptyx diaphana.*

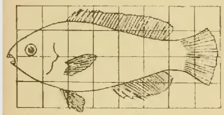


Fig. 375. *Scarus* sp.

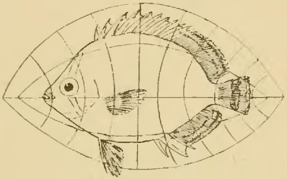


Fig. 376. *Pomacanthus.*

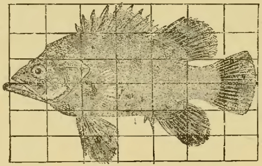


Fig. 377. *Polyprion.*

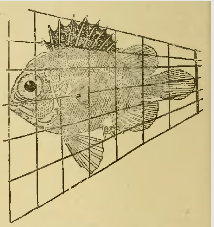


Fig. 378. *Pseudopriacanthus altus.*

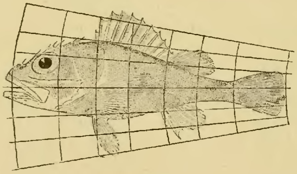


Fig. 379. *Scorpaena* sp.

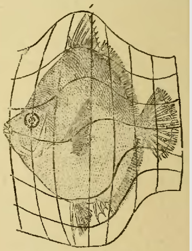


Fig. 380. *Antigonia capros.*

D'Arcy Wentworth Thompson, *On Growth and Form* (1917)

Affin approximation

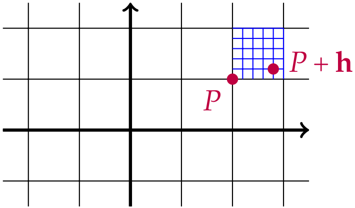
I flervariabelanalys kan vi **approximera** en godtycklig differentierbar avbildning f med en affin avbildning (**lokalt**, dvs. nära en given punkt P):

$$\boxed{f(P+\mathbf{h}) \approx f(P) + F(\mathbf{h}) \quad \text{för } \mathbf{h} \text{ nära } \mathbf{0}}$$

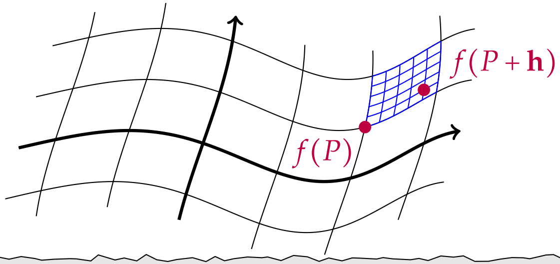
Här är F den linjära avbildning som i koordinater ges av f:s **funktionalmatris**, den matris som innehåller alla f:s partiella derivator (evaluerade i punkten P):

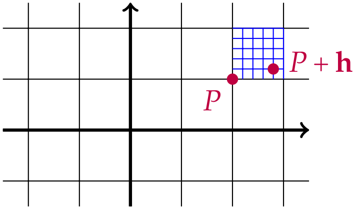
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

(Koordinaterna (u_1, u_2) för punkten $f(P)$ är funktioner av koordinaterna (x_1, x_2) för punkten P.)

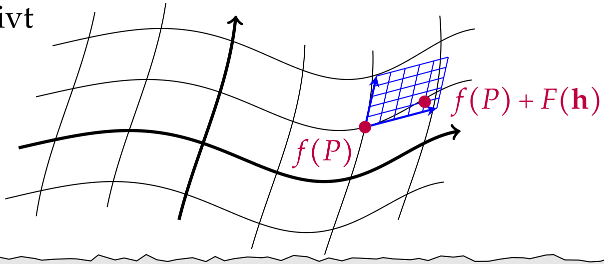


Exakt





Approximativt



Absolutbeloppet av F:s determinant är den **lokala areaskalan** för avbildningen f i punkten P.

Denna areaskala används vid **variabelbyte i dubbelintegraler**.

Samt i **inversa funktionssatsen**:

> Om avbildningen f är av klass C^1 och dess lokala areaskala i P är skild från noll (dvs. om den affina approximationen är inverterbar) så är f **lokalt inverterbar** nära P, dvs. det finns en omgivning U till P sådan att f:s restriktion till U är inverterbar (och denna invers är också av klass C^1).