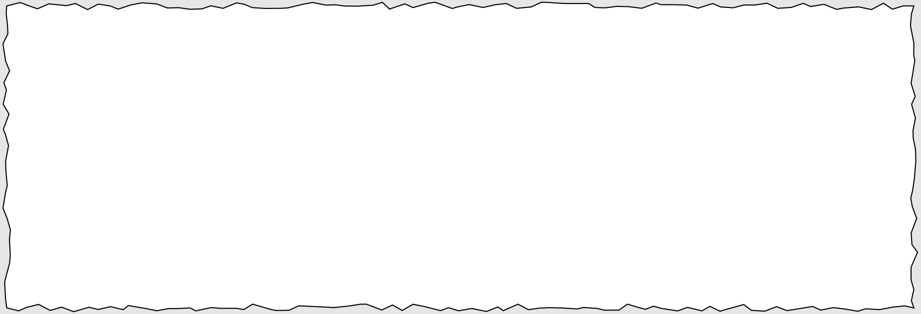
TATA69 Flervariabelanalys

Punkter, vektorer, baser, koordinatsystem

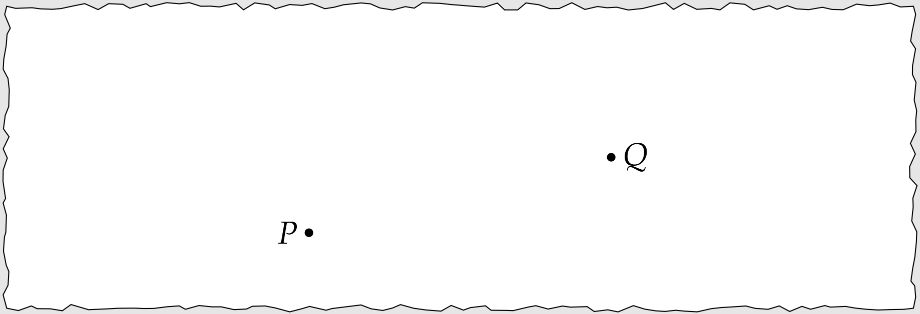
(samt exempel på variabelbyte i dubbelintegral)

Hans Lundmark, MAI, LiU

Tvådimensionell euklidisk geometri

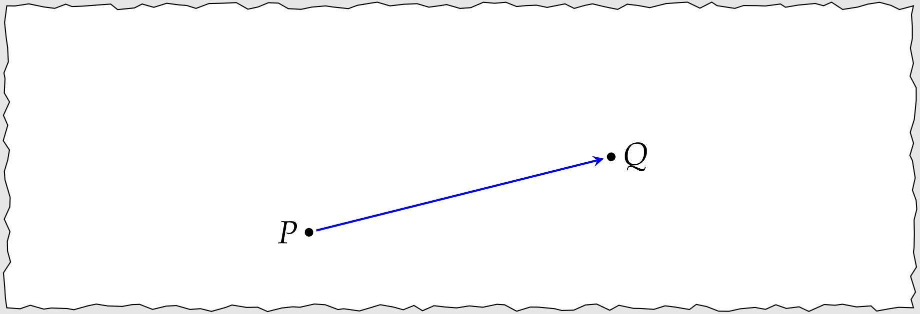


”Planet” – en abstrakt plan värld med oändlig utsträckning åt alla håll.

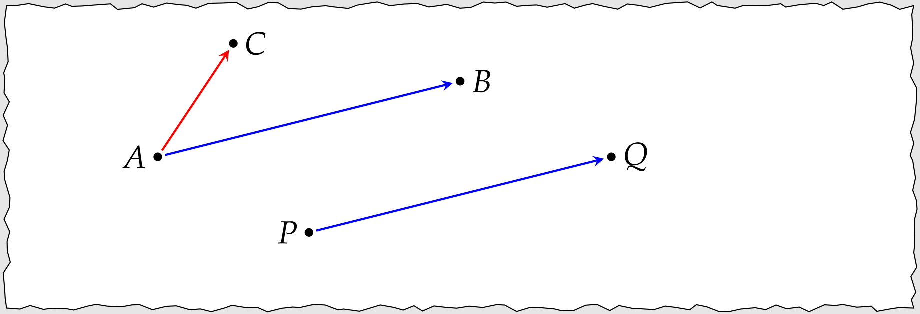


Alla punkter i planet ser likadana ut.

Ingen riktning är speciell heller.



Givet två punkter P och Q kan vi bilda **vektorn** $\overrightarrow{PQ}$, som representerar hur man förflyttar sig från P till Q.



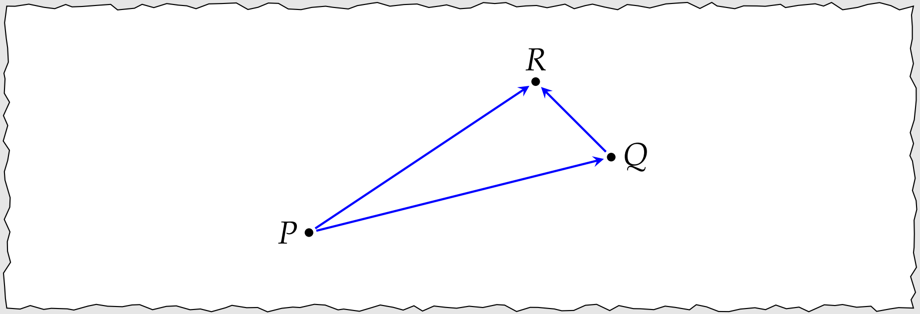
Förflyttningen från A till B är likadan som från P till Q:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$$

Men förflyttningen från A till C är annorlunda:

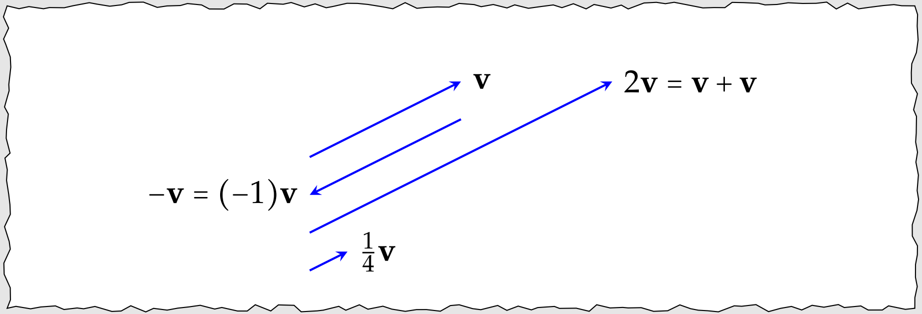
$$\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{PQ}$$

Vektorer **adderas** genom att förflyttningarna utförs efter varandra:



$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

Vektorer kan också **multipliceras med tal**:



Subtraktion av vektorer: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$

Linjärkombination av vektorer: $a_1\,\mathbf{v}_1 + a_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\,\mathbf{v}_n \quad (a_k \in \mathbf{R})$

Alla punkter ser likadana ut.

Ingen punkt är speciell.

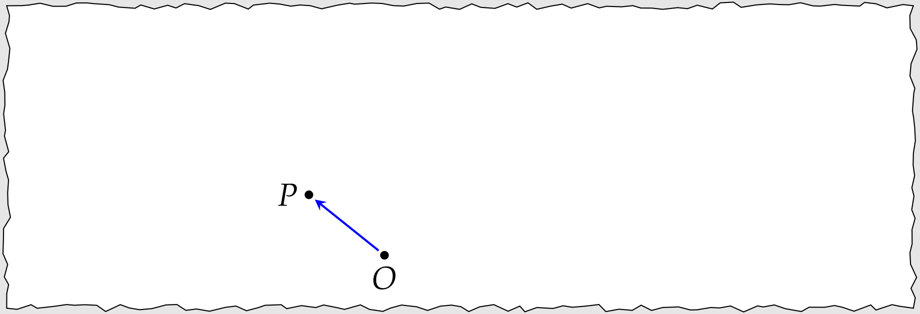
Men alla vektorer ser *inte* likadana ut!

Vektorer kan ha olika längd och olika riktning.

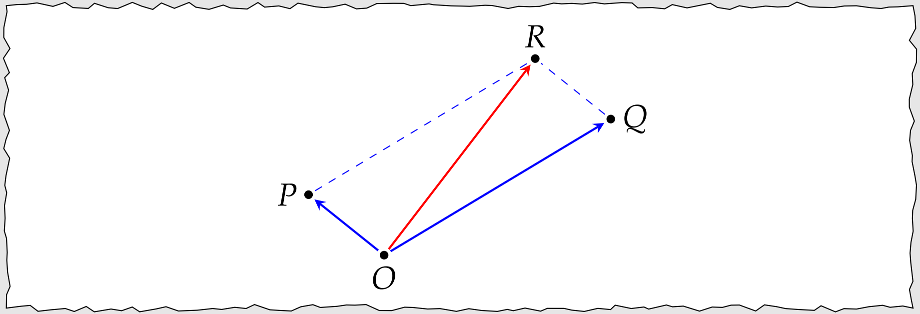
Nollvektorn, som representerar ”ingen förflyttning”, är speciell genom att ha längden noll och obestämd riktning.

$$\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

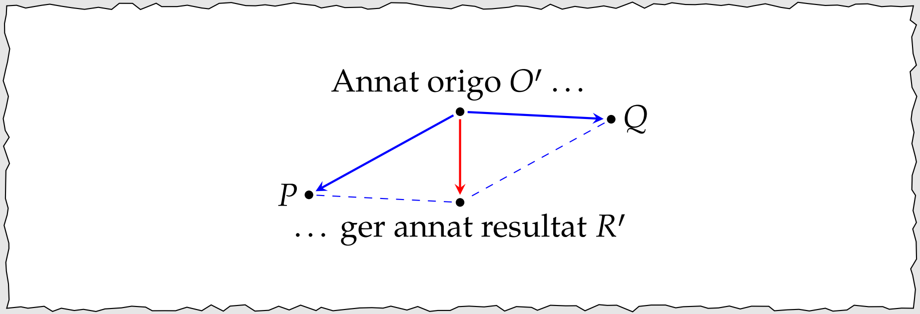


Om en punkt O utses till referenspunkt (**origo**) så kan varje punkt P associeras med sin **ortsvektor** (med avseende på den valda referenspunkten), dvs. vektorn $\overrightarrow{OP}$.



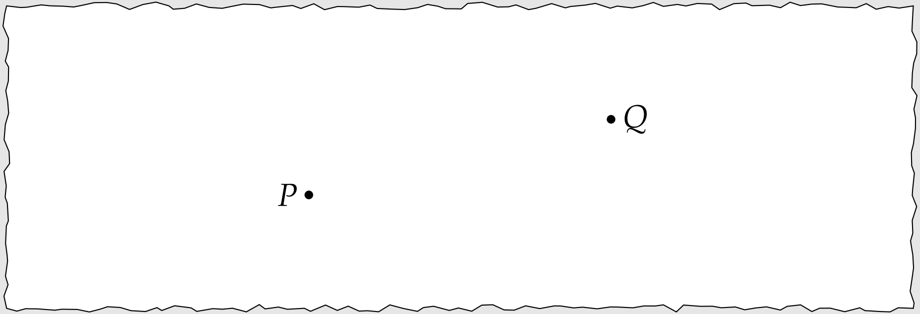
Givet två punkter P och Q kan deras ortsvektorer $\overrightarrow{OP}$ och $\overrightarrow{OQ}$ adderas, vilket ger ortsvektorn $\overrightarrow{OR}$ för en tredje punkt R.

Fråga: Är det meningsfullt att säga att $R = P + Q$?



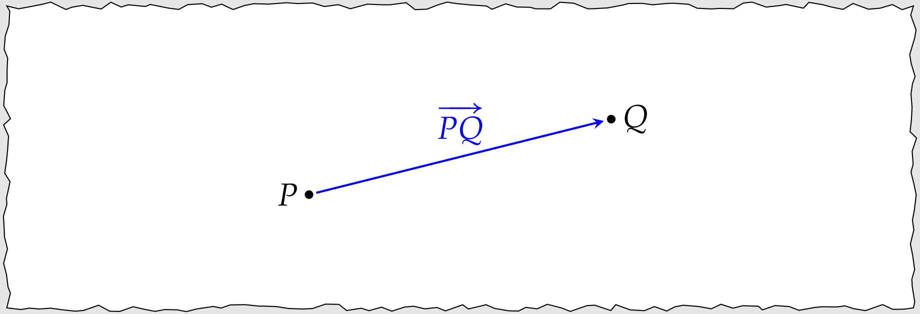
Svar: Nej!

Punkten R:s läge beror ju inte bara på P och Q, utan även på vilken referenspunkt vi hade valt.



Så ”punkt + punkt” är meningslöst.

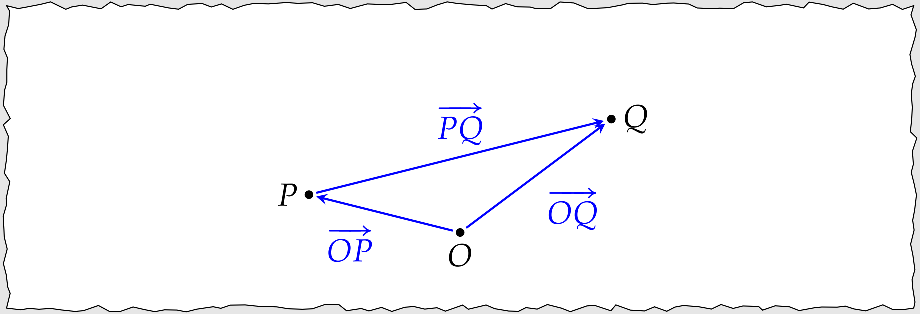
Likaså ”tal gånger punkt”.



Följande är däremot meningsfullt:

”punkt + vektor = punkt”　　　　”punkt − punkt = vektor”

$$P + \overrightarrow{PQ} = Q \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q - P = \overrightarrow{PQ}$$

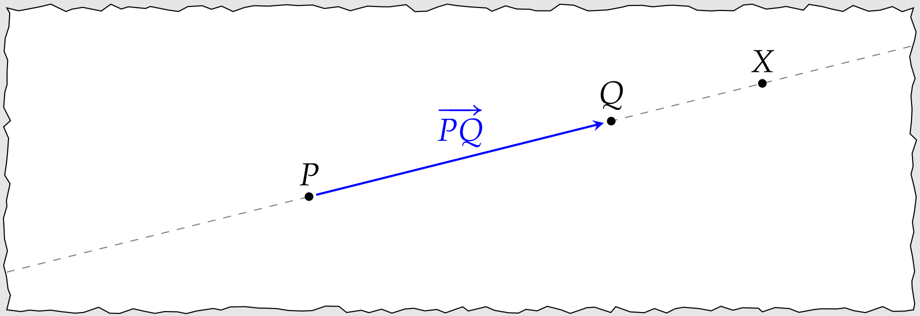


I linjär algebra-kurser räknar man vanligen inte så, utan enbart med vektorer.

Punkter hanteras med ortsvektorer, t.ex. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ istället för $\overrightarrow{PQ} = Q - P$.

I *denna* operation beror resultatet *inte* på vad O är, för med ett annat origo O' skulle man få samma resultat:

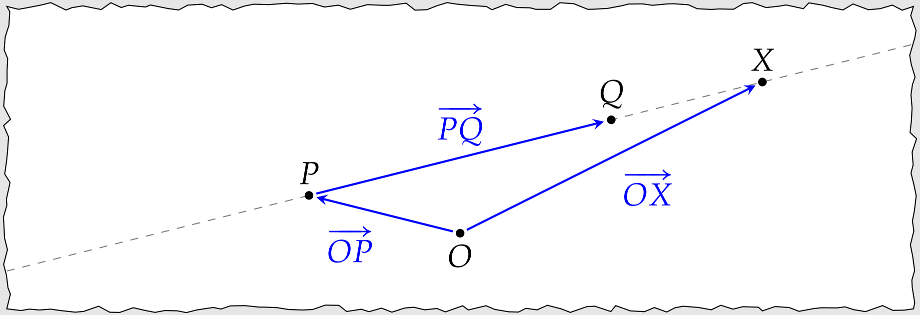
$$\overrightarrow{O'Q} - \overrightarrow{O'P} = (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OQ}) - (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PQ}.$$



Räta linjens ekvation på parameterform:

Punkten X ligger på linjen genom P och Q om och endast om

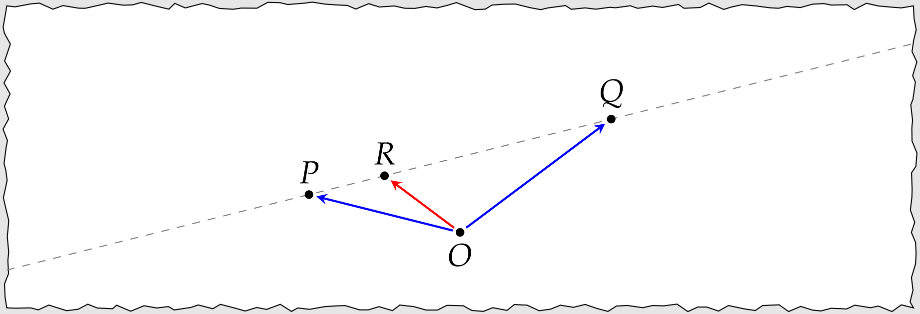
$$X = P + t\,\overrightarrow{PQ} \qquad \text{för något } t \in \mathbf{R}$$



Eller med ortsvektorer, som i de flesta linjär algebra-kurser:

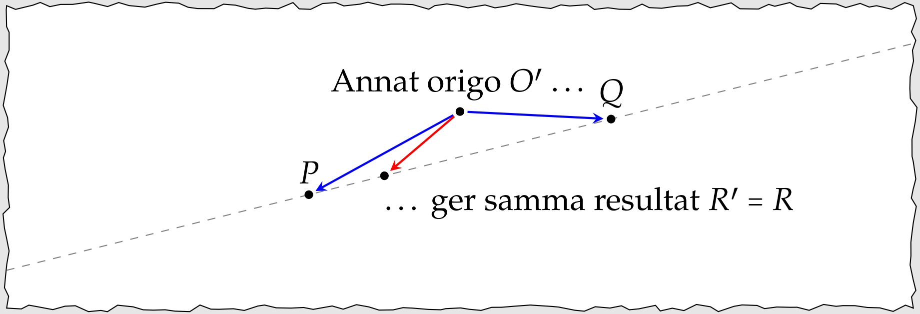
$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ} \qquad \text{för något } t \in \mathbf{R}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v}$$

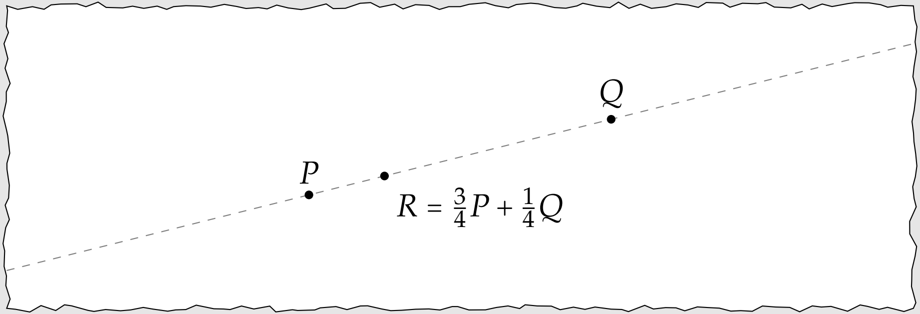


Betrakta operationen $R = P + \frac{1}{4}\overrightarrow{PQ}$. Med ortsvektorer:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + \frac{1}{4}\overrightarrow{PQ}\\ &= \overrightarrow{OP} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right)\\ &= \boxed{\frac{3}{4}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OQ}}\end{aligned}$$



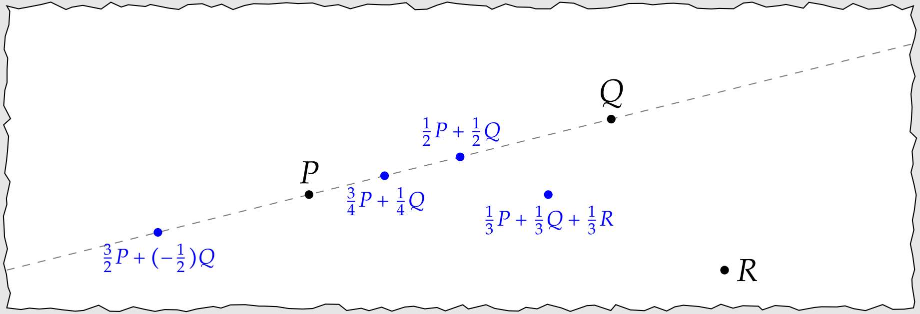
$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{O'R'} &= \tfrac{3}{4}\,\overrightarrow{O'P} + \tfrac{1}{4}\,\overrightarrow{O'Q} \\
&= \tfrac{3}{4}\big(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}\big) + \tfrac{1}{4}\big(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OQ}\big) \\
&= \big(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\big)\,\overrightarrow{O'O} + \big(\tfrac{3}{4}\,\overrightarrow{OP} + \tfrac{1}{4}\,\overrightarrow{OQ}\big) \\
&= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{O'R} \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad R' = R
\end{aligned}
$$



Så det är meningsfullt att skriva $R = \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}Q$, en **affin kombination** av P och Q.

Eller allmännare:

$$a_1P_1 + a_2P_2 + \cdots + a_nP_n \quad \text{där} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1.$$



Ex. $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$ är den punkt som ligger mitt emellan P och Q, deras "medelvärde".

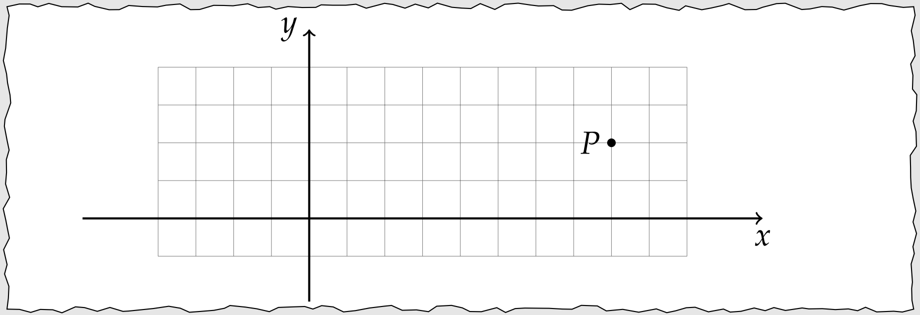
Ex. Om P_k är positionen för en partikel med massan m_k så är

$$\sum_k \frac{m_k}{M} P_k \qquad \left(\text{där} \quad M = \sum_{k=1}^{n} m_k\right)$$

positionen för partikelsystemets masscentrum, ett "viktat medelvärde".

Baser och koordinatsystem

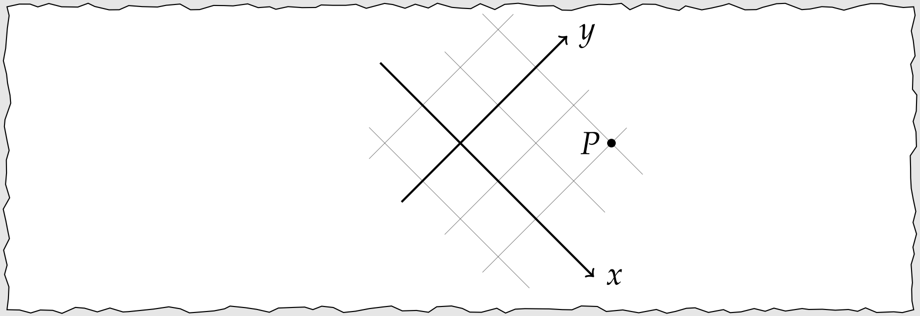
För att beskriva punkters läge med talpar (x, y) inför vi ett **koordinatsystem** i planet:



I just detta koordinatsystem får punkten P koordinaterna $(x, y) = (8, 2)$.

Men vi måste såklart inte lägga koordinatsystemet just sådär!

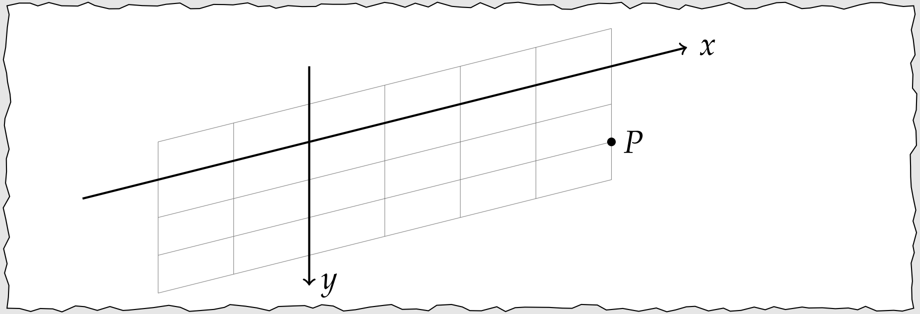
I nedanstående koordinatsystem får P koordinaterna $(x, y) = (2, 2)$ istället:



Samma punkt, annat talpar!

Vi måste inte ha vinkelräta axlar, eller samma skala på båda axlarna.

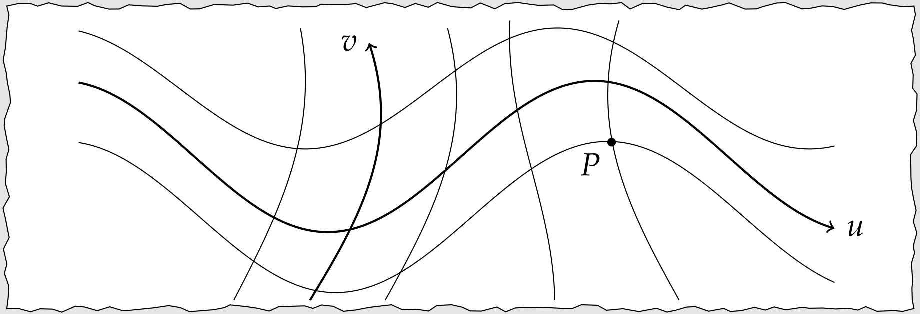
Koordinatsystemet måste inte heller vara högerorienterat.



Här får P koordinaterna $(x, y) = (4, 2)$.

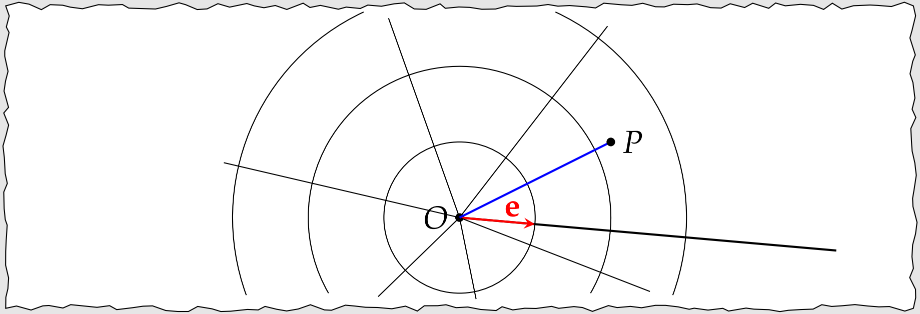
Rutnätet måste inte ens vara rätlinjigt.

I det här kroklinjiga koordinatsystemet har P koordinaterna $(u, v) = (3, -1)$:



Ett ofta använt kroklinjigt koordinatsystem är **polära koordinater** (ρ, φ).

(M.a.p. en referenspunkt O och en vektor $\mathbf{e}$ som anger referensriktning och skala.)



Här beskrivs P:s läge av talparet $(\rho, \varphi) \approx (2.24, 0.55)$, där ρ är avståndet från O till P, och φ är vinkeln (moturs, i radianer) från referensriktningen till sträckan OP.

Men åter till rätlinjiga koordinatsystem.

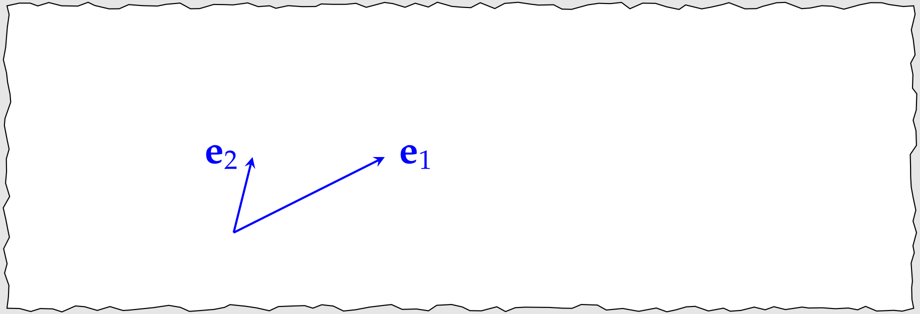
I linjär algebra används begreppet **bas** mer än **koordinatsystem**.

Anledning: Man talar där i första hand om koordinater för **vektorer**, inte koordinater för **punkter**.

En **bas** för planet består av ett (ordnat) vektorpar

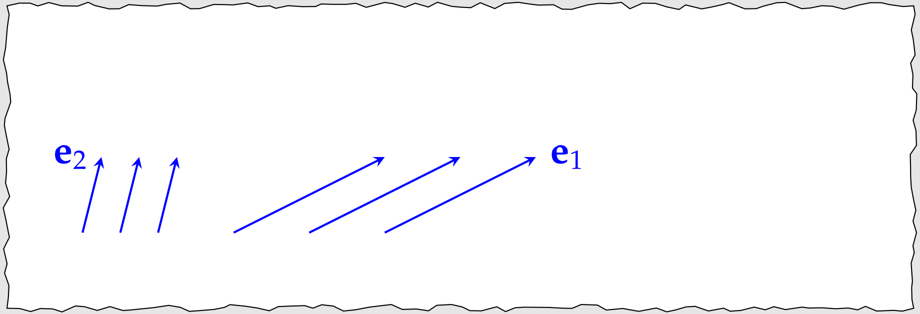
$$\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

som är **linjärt oberoende**, dvs. vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är ”olika riktade”, inte parallella.



Man måste inte tänka sig att basvektorerna utgår från samma punkt.

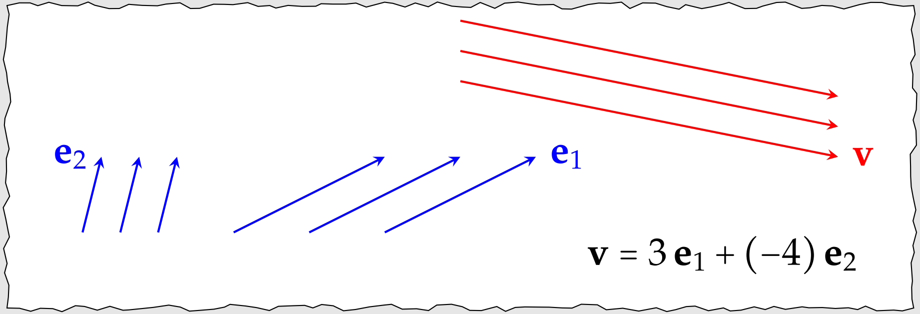
Tänk hellre bara att de motsvarar varsitt sätt att förflytta sig i planet:



Varje vektor i planet (dvs. varje förflyttning) kan då uttryckas som

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

på exakt ett sätt, och talparet (x, y) är $\mathbf{v}$:s koordinater i denna bas.



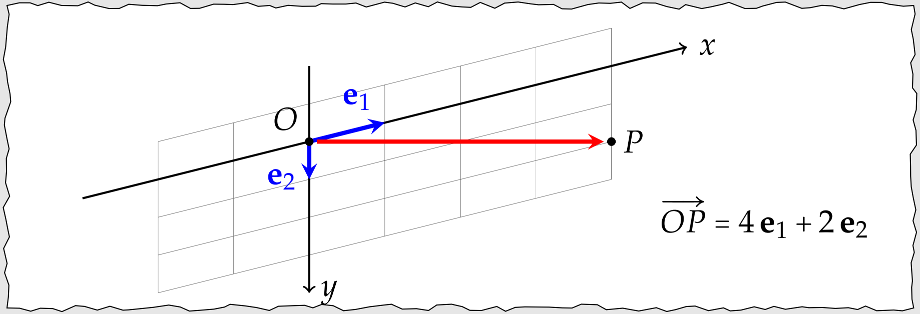
”Rätlinjigt koordinatsystem = origo + bas”

För att ange koordinater för en **vektor** behöver man alltså bara en bas.

Men för att ange (rätlinjiga) koordinater för en **punkt** behöver man en bas **och** en referenspunkt O att utgå ifrån:

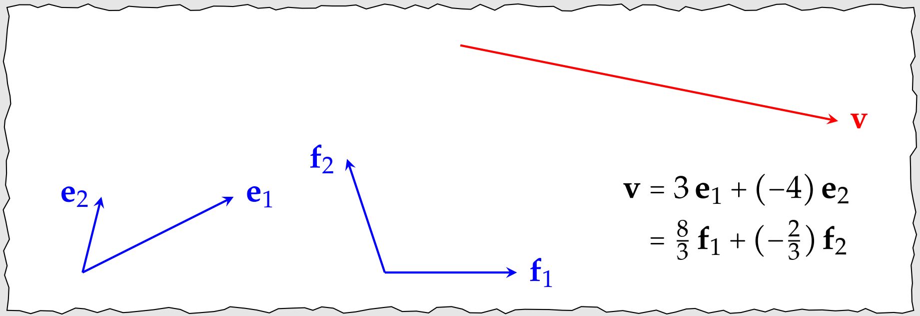
- Varje punkt P associeras med sin ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ m.a.p. den valda referenspunkten.
- Varje ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ har entydigt bestämda koordinater (x, y) m.a.p. den valda basen $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.
- Dessa koordinater (x, y) är då också punkten P:s koordinater, i det rätlinjiga koordinatsystem som definieras av punkten O och basen $\underline{\mathbf{e}}$.

Den första basvektorn $\mathbf{e}_1$ anger x-axelns riktning och skala, och den andra basvektorn $\mathbf{e}_2$ anger y-axelns riktning och skala:



Punkten P får koordinaterna $(x, y) = (4, 2)$ i detta koordinatsystem, eftersom dess ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ har koordinaterna $(4, 2)$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Basbyte



”Gammal” bas $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ och ”ny” bas $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$.

Samband mellan nya och gamla basen: $\mathbf{f}_1 = 1\,\mathbf{e}_1 + (-1)\,\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{f}_2 = (-\frac{1}{2})\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2$.

Givet att $\mathbf{v}$:s koordinater i basen $\underline{\mathbf{e}}$ är $(x_1, x_2) = (3, -4)$, hur räknar man ut att $\mathbf{v}$:s koordinater i basen $\underline{\mathbf{f}}$ är $(y_1, y_2) = (\frac{8}{3}, -\frac{2}{3})$?

Det är bara att lösa ett linjärt ekvationssystem:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= 3\,\mathbf{e}_1 + (-4)\,\mathbf{e}_2 \\
&= y_1\,\mathbf{f}_1 + y_2\,\mathbf{f}_2 \\
&= y_1\left(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\right) + y_2\left(-\tfrac{1}{2}\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2\right) \\
&= \left(y_1 - \tfrac{1}{2}y_2\right)\mathbf{e}_1 + \left(-y_1 + 2y_2\right)\mathbf{e}_2
\end{aligned}
\quad\iff\quad
\begin{cases} y_1 - \tfrac{1}{2}y_2 = 3 \\ -y_1 + 2y_2 = -4 \end{cases}
\quad\iff\quad
\begin{cases} y_1 = 8/3 \\ y_2 = -2/3 \end{cases}
$$

Man kan också göra det med matrisräkning.

Sambanden

$$\mathbf{f}_1 = 1\,\mathbf{e}_1 + (-1)\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{f}_2 = (-\tfrac{1}{2})\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} \\ 2\end{pmatrix}$$

kan skrivas som en enda matrisprodukt $\boxed{\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T}$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2\end{pmatrix}}_{\text{basbytesmatris } T}$$

Från $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}X = \underline{\mathbf{f}}Y$, där $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ är de gamla koordinaterna och $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ är de sökta nya koordinaterna, fås

$$\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}X = \underline{\mathbf{f}}Y = [\text{eftersom } \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T] = \underline{\mathbf{e}}TY,$$

dvs. $\boxed{X = TY}$.

Alltså, med hjälp av $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$:

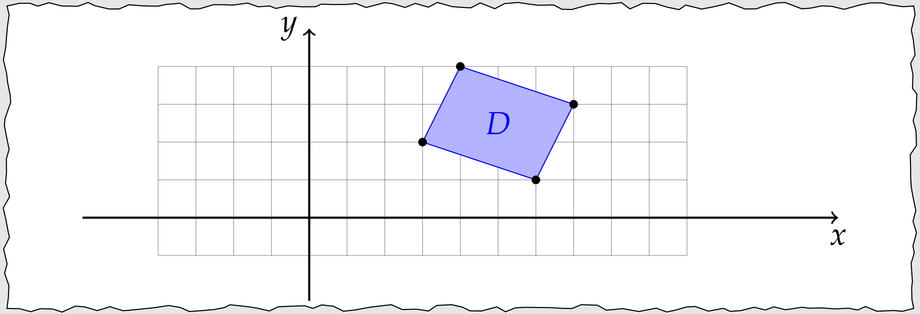
$$\begin{aligned} Y = T^{-1}X &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & -(-\frac{1}{2}) \\ -(-1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dvs. $(y_1, y_2) = (\frac{8}{3}, -\frac{2}{3})$.

Variabelbyte för att förenkla integrationsområde

I denna kurs kan dessa ideér bl.a. användas för att förenkla uträkningen av vissa multipelintegraler.

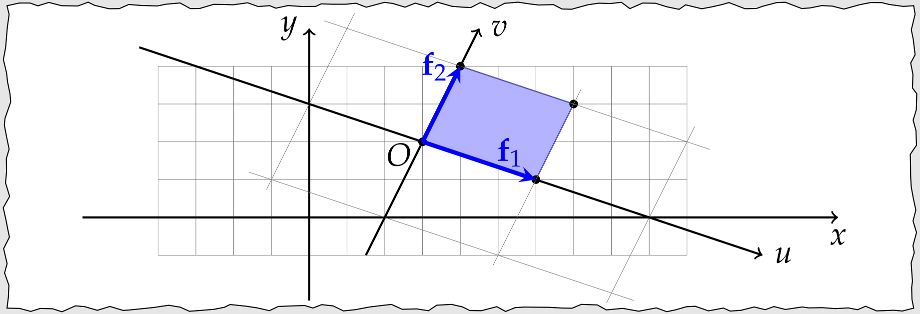
Exempel. Dubbelintegral $\iint_D x^2 \, dxdy$ över en parallellogram D enligt figur:



Låt oss byta till ett nytt koordinatsystem (u, v) där området beskrivs av olikheterna

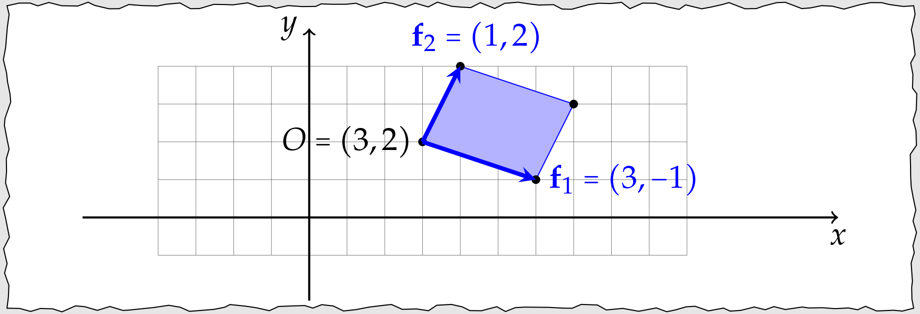
$$0 \le u \le 1, \qquad 0 \le v \le 1.$$

Såhär, med ett av hörnen som nytt origo O, och två av kantvektorerna som ny bas $\underline{\mathbf{f}}$:



Punkten P har koordinaterna $(u, v) \qquad \Longleftrightarrow \qquad P = O + u\,\mathbf{f}_1 + v\,\mathbf{f}_2$

Uttryckt i (x, y)-koordinaterna:



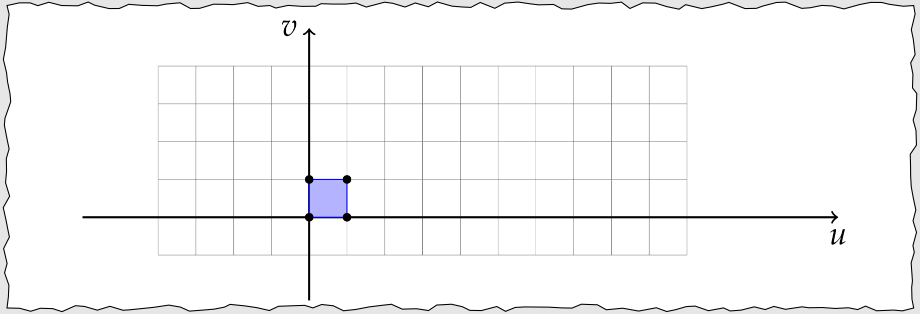
$$P = O + u\,\mathbf{f}_1 + v\,\mathbf{f}_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 3u + v \\ 2 - u + 2v \end{pmatrix}$$

Vi kan nu integrera över det mycket enklare området

$$E = \{(u, v) : 0 \le u \le 1,\ \ 0 \le v \le 1\},$$

som vi bör föreställa oss i uv-planet, såhär:



Mängden E **avbildas** via sambandet $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 3u + v \\ 2 - u + 2v \end{pmatrix}$ på mängden D i xy-planet.

Areaskalan för denna s.k. affina avbildning

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 3u + v \\ 2 - u + 2v \end{pmatrix}$$

är lika med **beloppet av funktionaldeterminanten**:

$$\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = |7| = 7.$$

Areor i xy-planet är alltså 7 gånger större än motsvarande areor i uv-planet:

$$dxdy = 7\,dudv.$$

Den integral vi ska beräkna är därmed

$$\iint_D x^2\,dxdy = \iint_E (3 + 3u + v)^2 \cdot 7\,dudv.$$

Uträkning:

$$
\begin{aligned}
\iint_D x^2\,dxdy &= \iint_E (3+3u+v)^2 \cdot 7\,dudv \\
&= 7\int_{u=0}^{1}\left(\int_{v=0}^{1}(3+3u+v)^2 dv\right)du \\
&= 7\int_{u=0}^{1}\left[\frac{(3+3u+v)^3}{3}\right]_{v=0}^{1} du \\
&= \frac{7}{3}\int_{u=0}^{1}\Big((3+3u+1)^3-(3+3u)^3\Big)du \\
&= \frac{7}{3\cdot 4\cdot 3}\Big[(3+3u+1)^4-(3+3u)^4\Big]_{u=0}^{1} \\
&= \frac{7}{36}\Big((7^4-6^4)-(4^4-3^4)\Big) = \frac{7}{36}\cdot 930 = \frac{1085}{6}
\end{aligned}
$$

Rimlighetskontroller

- Integranden $f(x,y) = x^2$ är positiv på D, så integralen $\iint_D x^2\,dxdy$ måste vara ett positivt tal.

  Okej, vårt svar $\frac{1085}{6}$ är positivt.

- Precisare uppskattning: Området D har arean 7. Och dess utsträckning i x-led är mellan $x = 3$ och $x = 7$, så att integranden x^2 ligger mellan $3^2 = 9$ och $7^2 = 49$ på D. Integralen måste därmed bli ett tal mellan $9 \cdot 7 = 63$ och $49 \cdot 7 = 343$.

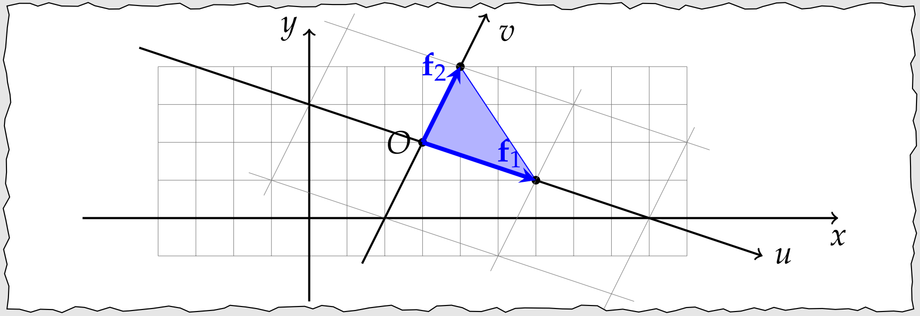
  Okej, vårt svar $\frac{1085}{6} = 180,8333\ldots$ ligger mellan 63 och 343.

- **Medelvärdet** av integranden x^2 över D är (enligt vår uträkning)

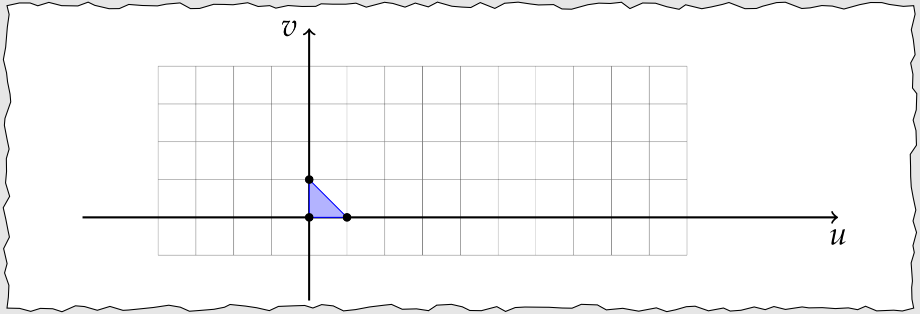
$$\frac{\iint_D x^2\,dxdy}{\text{Area}(D)} = \frac{1085/6}{7} = 25{,}83333\ldots$$

  Okej, lite över 5^2, det verkar rimligt.

Om D istället är en triangel i xy-planet så kan samma typ av variabelbyte användas för att få enklast tänkbara triangel E i uv-planet (nämligen halva enhetskvadraten):



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$\iint_D x^2\,dxdy = \iint_E (3+3u+v)^2 \cdot 7\,dudv = 7\int_{u=0}^{1}\left(\int_{v=0}^{1-u}(3+3u+v)^2 dv\right)du$$

$$= 7\int_{u=0}^{1}\left[\frac{(3+3u+v)^3}{3}\right]_{v=0}^{1-u} du = \frac{7}{3}\int_{u=0}^{1}\left((3+2u+1)^3-(3+3u)^3\right)du$$

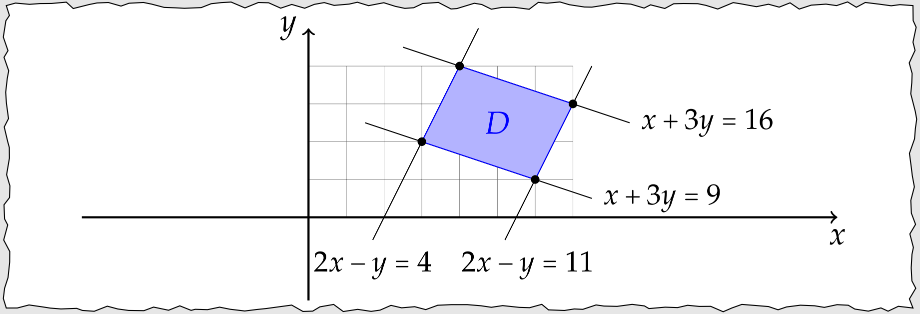
$$= \frac{7}{3\cdot 4}\left[\frac{(3+2u+1)^4}{2}-\frac{(3+3u)^4}{3}\right]_{u=0}^{1} = \cdots = \frac{805}{12}$$

Enligt detta är medelvärdet av x^2 över triangeln D lika med

$$\frac{\iint_D x^2\,dxdy}{\mathrm{Area}(D)} = \frac{805/12}{7/2} = 19{,}16666\ldots$$

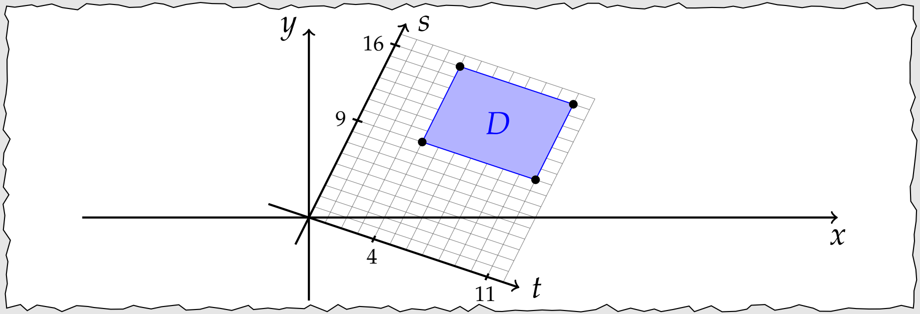
Mellan 4^2 och 5^2, verkar rimligt.

Alternativ metod: basera variabelbytet på kantlinjernas ekvationer.

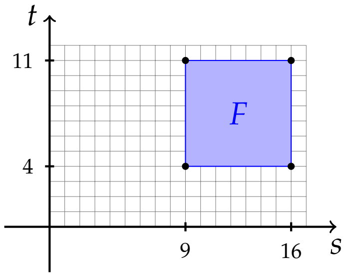


Ta vänsterleden $x + 3y$ och $2x - y$ som nya variabler, säg s och t.

Variabelbytet $s = x + 3y$ och $t = 2x - y$ ger följande koordinatsystem:



Vi får ett nytt integrationsområde $F = [9,16] \times [4,11]$ i st-planet:



$$9 \leq s \leq 16$$
$$4 \leq t \leq 11$$

Variabelbytet $\binom{s}{t} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \binom{x}{y}$ går här ”åt andra hållet”, med nya koordinater som funktioner av gamla, och definierar alltså en avbildning från xy-planet till st-planet, med $ds\,dt = 7\,dx\,dy$. (Rektangeln F i st-planet har 7 gånger större area än parallellogrammen D i xy-planet.)

$$\iint_D x^2\,dx\,dy = \iint_F \Big(x \text{ uttryckt i } s \;\&\; t\text{, vad det nu blir}\Big)^2 \tfrac{1}{7}\,ds\,dt = \cdots = \tfrac{1085}{6}$$