LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Hans Lundmark

Tentamen i TATA09, Analys B för KeBi
2004–04–22 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. De uppgifter som får 2 eller 3 poäng räknas som godkända. För godkänt betyg på tentamen krävs sammanlagt minst 8 poäng och 3 godkända uppgifter.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~halun/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = 3x+y-x^3y$ på området $D = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\big\}$.

2. Bestäm konstanterna A och B så att ekvationen
$$\nabla f = \begin{pmatrix} y + Ax^2z \\ x + z^2 \\ Byz + x^3 \end{pmatrix}$$
blir lösbar, och bestäm lösningen $f(x,y,z)$.

3. Beräkna $\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy$, där $D = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ x+y \ge 1\big\}$.

4. Beräkna följande summor. (1 poäng per deluppgift.)
$$\text{(a)}\ \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{2^{3k}}{3^{2k}} \qquad \text{(b)}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \text{(c)}\ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

5. Visa att kurvan $(x(t), y(t)) = (e^t, e^{-t})$ $(t \in \mathbf{R})$ skär nivåkurvorna till $f(x,y) = x^2 - y^2$ i rät vinkel.

6. Beräkna volymen av området
$$D = \big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge |xy|\big\}.$$

7. Bestäm de lösningar till Laplaces ekvation $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$ som har formen $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ för någon funktion g av en variabel.

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2004–04–22

1. Kontinuerlig funktion på kompakt område, så max och min existerar. Stationär punkt i området: $f(1,1) = 3$. I kvadratens hörn är $f = 0$, 6, 2 resp. -8. Lokalt max på randen: $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2) = 2 + \sqrt{2}$.

   Svar: Maximum $f(2,0) = 6$, minimum $f(2,2) = -8$.

2. A bestäms av $f''_{xz} = f''_{zx}$ och B av $f''_{yz} = f''_{zy}$.

   Svar: $A = 3$, $B = 2$ och $f(x,y,z) = xy + yz^2 + x^3 z + \text{konstant}$.

3. Det finns flera sätt. Enklast är nog $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx \right) dy$.

   Svar: $1/6$.

4. (a) Geometrisk serie $a/(1-q)$ med kvot $q = 2^3/3^2 = 8/9 < 1$ och första term $a = 9/8$. **Svar**: $81/8$.

   (b) $x = 1$ insatt i standardutvecklingen för $\arctan x$. **Svar**: $\pi/4$.

   (c) Standardutvecklingen för e^x, förutom att de tre första termerna ($k = 0, 1, 2$) saknas. **Svar**: $e^x - (1 + x + x^2/2)$.

5. I en godtycklig punkt $(x(t), y(t)) = (e^t, e^{-t})$ på den givna kurvan så är tangentvektorn $(x'(t), y'(t)) = (e^t, -e^{-t})$ parallell med vektorn $\nabla f = (2x, -2y) = 2(e^t, -e^{-t})$, vilken som bekant är vinkelrät mot f:s nivåkurva genom punkten.

6. Området är symmetriskt kring $x = 0$. Betrakta ett plant tvärsnitt $x = c \in [0,1]$. Tvärsnittsarean ges av att kilen $z \geq c|y|$ skär ut en sektor med vinkeln $\pi - 2\arctan c$ ur cirkelskivan $y^2 + z^2 \leq 1 - c^2$. Arean av en cirkelsektor är $\frac{1}{2}(\text{vinkeln})(\text{radien})^2$, så den sökta volymen blir $\displaystyle 2\int_0^1 \tfrac{1}{2}(\pi - 2\arctan c)(1 - c^2)dc$.

   Alternativ metod: $\displaystyle 4\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2} - xy \right) dy \right) dx$.

   Svar: $\dfrac{\pi - 1 + 4\ln 2}{3}$.

7. Låt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ som vanligt, så att $f(x,y) = g(r)$. Kedjeregeln ger $f'_x = g'(r) r'_x = g'(r)\frac{x}{r}$ etc, och ekvationen blir efter lite räknande $g''(r) + g'(r)/r = 0$. Integrerande faktor är $e^{\ln r} = r$, alltså får vi $(rg'(r))' = 0$, och två steg senare $g(r) = A\ln r + B$, $r > 0$.

   Svar: $f(x,y) = A\ln\sqrt{x^2 + y^2} + B$, $(x,y) \neq (0,0)$, där A och B är godtyckliga konstanter.