

TATA69, Flervariabelanalys, 6 hp

Kursprogram för M/DPU/EMM, ht 2022

Hans Lundmark, MAI, LiU, 2022-08-24

Allmänt

Denna kurs är obligatorisk på programmen M, DPU och EMM, och ges för dessa program i period ht1 med Hans Lundmark som kursansvarig. Även programmen I och Ii läser TATA69, men i period vt2, med Tomas Sjödin som kursansvarig.

Lisam används för närvarande inte, utan all information ligger öppet tillgänglig på **kurshemsidan**:

courses.mai.liu.se/GU/TATA69/

Litteratur

- Den primära kurslitteraturen utgörs av de två kompendierna **Flervariabelanalys: Teori** och **Flervariabelanalys: Exempel** av **Tomas Sjödin**, MAI. Dessa finns att ladda ner i pdf-format på kurshemsidan, och säljs även i pappersform av Tryckakademin (Kårallen, LiU).
- **Flervariabelanalys Problemsamling, december 2013**. Utgiven av MAI.
Finns som pdf på kurshemsidan, eller i pappersform på Tryckakademin.
- **Kompletterande övningar för TATA69 ht 2022**.
Pdf på kurshemsidan.
- **Detta kursprogram**.
Pdf på kurshemsidan. Några moment (t.ex. polära koordinater) förklaras utförligare här än i kompendierna.

Observera att Sjödens kompendier är ganska kortfattade, och ursprungligen skrivna som komplement till hans föreläsningar för I- & Ii-programmen. Det kan därför vara en god idé att också införskaffa litteratur som går lite mer på djupet, t.ex. någon av de böcker som tidigare använts som huvudlitteratur i denna kurs:

- **Matematisk analys: Flera variabler** av **Mats Neymark**, andra uppl., Liber, 2017.
- **Analys i flera variabler** av **Arne Persson** och **Lars-Christer Böiers**, tredje uppl., Studentlitteratur, 2005.

Examination

Examinator för M, DPU och EMM är Hans Lundmark, MAI. Kursen examineras genom en skriftlig tentamen (TEN1) med 5 timmars skrivtid och 6 uppgifter. Varje uppgift bedöms som godkänd (vilket ger 2 eller 3 poäng) eller underkänd (0 eller 1 poäng). För att få betyg 3/4/5 behövs 3/4/5 stycken godkända uppgifter och dessutom sammanlagt 8/11/14 poäng. Gamla tentor och mer detaljer om bedömningsnormerna finns på kurshemsidan.

Undervisning och hemarbete

Den schemalagda undervisningstiden består av **15 föreläsningar** och **15 lektioner**. På lektionerna kan du få hjälp med övningarna. Till de flesta lektionerna finns det betydligt fler uppgifter på programmet än vad man hinner räkna på två timmar, så för att utnyttja lektionstiden på bästa sätt bör du försöka **räkna så många lektionsuppgifter som möjligt i förväg**, i den mån schemat tillåter. (Vissa lektioner har behövt läggas direkt efter motsvarande föreläsning, eftersom det är svårt att på annat sätt anpassa undervisningen till det schemablock som kursen ligger i.) Kursens storlek är 6 hp, vilket motsvarar 160 timmars arbete, och eftersom den schemalagda tiden är 60 timmar så blir den rekommenderade självstudietiden 100 timmar.

Videor

På kurshemsidan finns videor inspelade av Tomas Sjödin och Hans Lundmark, med genomgångar av både teori och exempel. (De flesta av dessa spelades in av Tomas som en del av ett pedagogiskt projekt om digitalisering av undervisningen, redan innan det blev aktuellt med distansläge på LiU våren 2020.) Det finns även några länkar till videor från andra källor.

Förkunskaper

Kurserna i **envariabelanalys (TATA41+42)** och **linjär algebra (TATA67)** anges som förkunskapskrav i kursplanen, och du kommer verkligen att behöva kunna en hel del material därifrån: gränsvärdesdefinitionen, standardgränsvärden, begreppen kontinuitet och deriverbarhet, standardderivator, kedjeregeln, produktregeln, kvotregeln, derivata av invers funktion, standardprimitiver, partiell integration, variabelbyte i integraler, generaliserade integraler, rotationsvolym, Taylorutveckling, differentialekvationer av olika slag, linjära ekvationssystem, vektorgeometri, skalärprodukt, kryssprodukt, linjer i planet, linjer i rummet, plan i rummet, andragskurvor i planet, andragsytor i rummet, matrisräkning, linjära avbildningar, basbyte, uträkning av determinanter, determinantkriteriet för entydig lösbarhet, tolkning av determinant som area-/volymkala, kvadratiska former (diagonalisering, nivåängder, max/min på enhetssfären, teckenkaraktär), och så vidare. Det är underförstått att du även behöver behärska **grundkursen (TATB01/TATM79)**, som ju är förkunskapskrav för envariabelanalysen.

Föreläsnings- och lektionsplan

Föreläsning 1. Funktioner av flera variabler. Graf, nivå mängder, partiella derivator, gradient.	4
Lektion 1	6
Föreläsning 2. Topologiska begrepp. Polära koordinater.	6
Lektion 2	17
Föreläsning 3. Dubbelintegraler.	17
Lektion 3	20
Föreläsning 4. Gränsvärden och kontinuitet.	20
Lektion 4	25
Föreläsning 5. Tangentplan till funktionsyta $z = f(x, y)$. Differentierbarhet. Klassen C^1.	25
Lektion 5	31
Föreläsning 6. Kurvor och ytor på parameterform. Funktionalmatris. Kedjeregeln.	32
Lektion 6	35
Föreläsning 7. Riktningsderivata. Tolkning av gradient. Tangentlinje till nivåkurva $f(x, y) = C$. Tangentplan till nivåyta $f(x, y, z) = C$.	35
Lektion 7	36
Föreläsning 8. Klassen C^k. Potential till vektorfält. Variabelbyte i PDE med hjälp av kedjeregeln.	37
Lektion 8	42
Föreläsning 9. Avbildningar $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Geometrisk tolkning av funktionalmatris och funktionaldeterminant. Inversa funktionssatsen.	42
Lektion 9	43
Föreläsning 10. Variabelbyte i dubbelintegraler.	43
Lektion 10	46
Föreläsning 11. Taylors formel. Lokala extrempunkter.	46
Lektion 11	49
Föreläsning 12. Implicita funktionssatsen. Implicit derivering.	49
Lektion 12	53
Föreläsning 13. Trippelintegraler.	53
Lektion 13	56
Föreläsning 14. Trippelintegraler, fler exempel.	56
Lektion 14	62
Föreläsning 15. Generaliserade multipelintegraler.	62
Lektion 15	63
Alla uppgifter på en sida	64

Till varje föreläsning finns läsanvisningar till kurslitteraturen, samt diverse kommentarer. Det rör sig inte om regelrätta föreläsningsanteckningar, utan det är en blandning av mer eller mindre detaljerade sammanfattningar av vad som kommer att tas upp, figurer som är bättre än vad man kan rita för hand på tavlan, några saker som **inte** kommer att hinnas tas upp men som kan vara bra att ha på papper ändå (repetition, extra exempel, alternativa förklaringar), anmärkningar om olika skrivsätt och konventioner, med mera.

Föreläsning 1. Funktioner av flera variabler. Graf, nivå mängder, partiella derivator, gradient.

- Sjödin: Avsnitt 1.2, 1.4, 1.5, samt definitionen av partiell derivata i avsnitt 3.1.
Neymark: Kapitel 1, partiell derivata i avsnitt 3.1.
Persson & Böiers: Avsnitt 1.1–1.4, partiell derivata i avsnitt 2.1.
(Gradient nämns ej i dessa avsnitt, men detta ämne tas bara upp mycket ytligt på denna föreläsning. Se läsanvisningarna för Fö 7, där det går igenom grundligare.)
- Läsanvisningarna till Sjödin syftar på teorikompendiet. Exempelkompendiet får ni använda själva för att kolla upp saker efter behov.
- Böckerna av Neymark och Persson & Böiers har tidigare använts som kurslitteratur i denna kurs, och jag har tagit med de gamla läsanvisningarna till dessa böcker här i kursprogrammet också, ifall någon är intresserad. (T.ex. kan det ju finnas gamla studenter som följer kursen på nytt och har någon av dessa böcker redan.)

Funktioner av flera variabler

- Allmän introduktion till funktioner $f(x_1, \dots, x_n)$ som beror på flera (reella) variabler.
Att bero på n stycken reella variabler $x_1 \in \mathbf{R}, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ är samma sak som att bero på en reell n -tupel

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

så man skulle lika gärna kunna säga att en flervariabelfunktion beror på en variabel \mathbf{x} , men att den variabeln står för en punkt/vektor i \mathbf{R}^n . Kanske av den anledningen föredrar somliga att kalla ämnet för *flerdimensionell analys* snarare än *flervariabelanalys*. Beteckningarna

$$f(\mathbf{x}) \quad \text{och} \quad f(x_1, \dots, x_n)$$

betraktas som synonyma; det är rätt sällan man ser någon skriva $f(\mathbf{x}) = f((x_1, \dots, x_n))$ med ett extra par av parenteser.

- Element i \mathbf{R}^n skrivs ofta med **fetstil** i tryck, som $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i ovanstående stycke. Sjödens kompendier använder dock istället **vektorstreck**, så som man brukar göra när man skriver för hand, alltså \vec{x} istället för \mathbf{x} :

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

- Skrivsättet

$$f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

betyder att f är en funktion vars indata är en punkt/vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ och vars utdata är ett reellt tal $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}$.

(En sådan funktion, med *reella värden*, kallas för en **reellvärd funktion**. Vi kommer senare även att se **vektorstörda funktioner** $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ där utdata är element i \mathbf{R}^m för $m \geq 2$.)

Ifall $f(\mathbf{x})$ inte är definierat för varje $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ utan bara för $\mathbf{x} \in D_f$, där D_f är en delmängd av \mathbf{R}^n , så skriver man

$$f: D_f \rightarrow \mathbf{R}.$$

Med andra ord: D_f är funktionens **definitionsområde**. Observera att indexet f här är namnet på funktionen, så om funktionen t.ex. istället heter g betecknas definitionsområdet D_g :

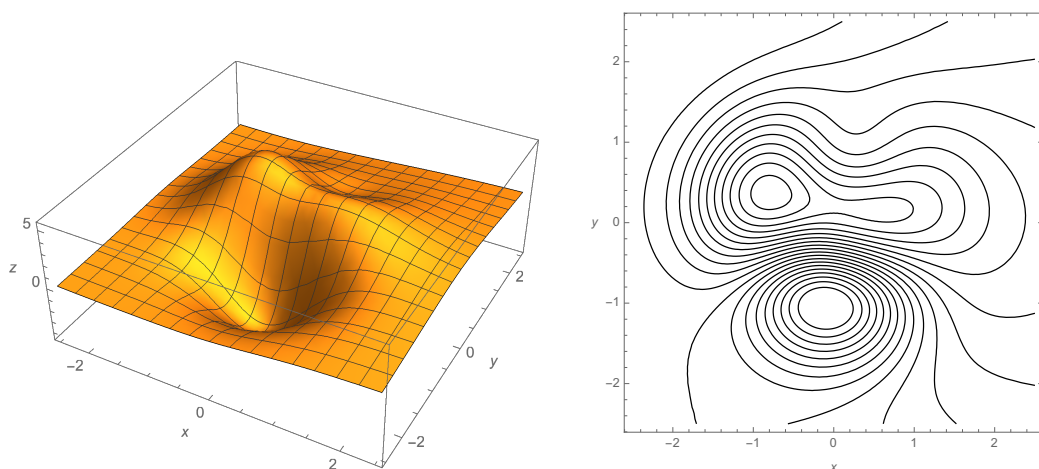
$$g: D_g \rightarrow \mathbf{R}.$$

- Till att börja med tittar vi mest på funktioner $f(x_1, x_2)$ som beror på **två** reella variabler x_1 och x_2 . Oftast kallar vi då variablerna för x och y istället, och skriver funktionen som $f(x, y)$.

Grafen till en sådan funktion $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ är mängden av punkter $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ som uppfyller sambandet $z = f(x, y)$. Grafen till en någorlunda snäll tvåvariabelfunktion f är en *yta* i rummet \mathbf{R}^3 , och kallas därför ibland för f :s **funktionsyta**.

En **nivåmängd** för en funktion $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ är mängden av punkter $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sådana att $f(x, y) = C$ för en given konstant C . En nivåmängd är ofta en *kurva* i planet \mathbf{R}^2 , då kallad **nivåkurva**, men kan i princip se ut lite hur som helst.

Om grafen visar "terrängens utseende i verkligheten" så motsvarar nivåkurvorna "höjdkurvorna på en orienteringskarta". (Här är det underförstått att z -axeln pekar "uppåt".)



- Partiella derivator** f'_x och f'_y ("terrängens lutning i x - resp. y -led") i punkten (a, b) :

$$f'_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}, \quad f'_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}.$$

Dvs. bara derivera som vanligt med avseende på den valda variabeln, och behandla övriga variabler som konstanter under tiden.

I mer avancerad litteratur skrivs de partiella derivatorna oftast bara f_x och f_y utan prim-symbol. Ett annat vanligt skrivsätt är $\partial f / \partial x$ och $\partial f / \partial y$, med "svängt d" för att markera att det är partiell derivata, till skillnad från den "ordinära" derivatan df/dx från envariabelanalysen. Även andra skrivsätt för partiell derivata förekommer, t.ex. $\partial_x f$ och $\partial_y f$.

Man kan också stöta på f'_1 och f'_2 (eller $\partial_1 f$ och $\partial_2 f$, eller liknande), vilket indikerar derivata med avseende på funktionens *första* resp. *andra* argument; detta skrivsätt är lite ovanligare, men kanske bättre egentligen, eftersom det inte beror på vad variablerna råkar heta.

- För en funktion av **tre** variabler, $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, är grafen $w = f(x, y, z)$ en tredimensionell "hyperyta" i det fyrdimensionella $xyzw$ -rummet \mathbf{R}^4 , och alltså svår att göra sig en vettig mental bild av. Däremot kan man försöka visualisera nivåmängderna $f(x, y, z) = C$, som ju är delmängder av \mathbf{R}^3 ; ofta är de tvådimensionella *ytor* i \mathbf{R}^3 , och kallas då **nivåytor**, men i princip kan de se ut lite hur som helst.
- Gradienten** för f fås genom att samla de partiella förstaderivatorna i en vektor:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (f'_{x_1}(\mathbf{x}), \dots, f'_{x_n}(\mathbf{x})) \in \mathbf{R}^n.$$

Ibland kan det vara mera praktiskt att skriva denna vektor som en kolonnmatris:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f'_{x_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f'_{x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Vi kommer inte i denna kurs att vara så petnoga med om punkter/vektorer skrivs som rad- eller kolonnmatriser, förutom ifall vi ska utföra matrisoperationer, för då är det såklart av största vikt att matrisernas dimensioner matchar; t.ex. kan en $m \times n$ -matris multipliceras från höger med en kolonnmatris ($n \times 1$) och från vänster med en radmatris ($1 \times m$), men inte tvärtom.

Gradienten är ett naturligt exempel på en vektorvärd funktion från \mathbf{R}^n till \mathbf{R}^n . I detta fall bör man tänka på indata $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ som en punkt och utdata $\nabla f(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$ som en vektor, som "sitter fast" i punkten \mathbf{x} . Gradienten ∇f tolkas sålunda som ett **vektorfält i \mathbf{R}^n** .

Det kommer att visas senare i kursen att om f är en "tillräckligt snäll" funktion och gradienten ∇f i en viss punkt inte är nollvektorn så är ∇f **vinkelrät mot den nivå mängd för f som går genom den punkten**, alltså en nivåkurva om vi är i \mathbf{R}^2 , en nivåyta i \mathbf{R}^3 .

Lektion 1

- Uppgifter märkta med "K" syftar på de kompletterande problemen som finns i en separat fil på kurshemsidan. Övriga uppgifter finns i problemsamlingen. De stjärnmarkerade uppgifterna riktar sig till dig som vill ha lite mer utmanande problem att bita i.
- K-uppgifterna här i början av kursen är utformade för att utmana dig till att komma igång att tänka själv, och för att uppmuntra till diskussioner med lärare och kurskamrater. Låt dig inte avskräckas ifall du tycker att dessa uppgifter känns lite "flummiga" och annorlunda. Uppgifterna i problemsamlingen kommer antagligen att kännas mer som vad du är van vid.
- Uträkning av partiella derivator: 2.1, 2.2ab, 2.3.
- Blandade uppvärmningsövningar (värdetabell, graf, nivåkurvor, etc. för funktioner av två variabler): K0, K1, K2, K3abcde, K3fg*.
- Rotationssymmetri m.m.: K5.
- Funktioner av tre variabler: K7.
- Smakprov inför avsnittet om gränsvärden: K4*, K6*.
- Uträkning av gradient: 2.42.
- Gradient och nivåkurvor: K9*.

Föreläsning 2. Topologiska begrepp. Polära koordinater.

- Sjödin: Avsnitt 1.1, 1.8. Men det är ganska kortfattat, särskilt avsnittet om polära koordinater. Se kommentarerna nedan för utförligare förklaringar.
Neymark: Avsnitt 1.5, 1.6.
Persson & Böiers: Avsnitt 1.3, 1.4.6.

Topologi

- Ämnet **topologi** kan sägas handla om sådana geometriska egenskaper som inte ändras när man deformerar objekt på ett kontinuerligt sätt. Ett par grundläggande topologiska begrepp är **öppen mängd** och **sluten mängd**. Ett annat viktigt begrepp är **kontinuerlig funktion**, som vi kommer till lite senare (Fö 4).
- I envariabelanalysen har du förmodligen redan sett ett specialfall av begreppen öppen och sluten mängd, nämligen för **intervall** i \mathbf{R} . Låt oss repetera!

Ett intervall sägs vara **slutet** om alla dess ändpunkter tillhör intervallet, och **öppet** om ingen av dess ändpunkter tillhör intervallet.

– **Öppna** intervall:

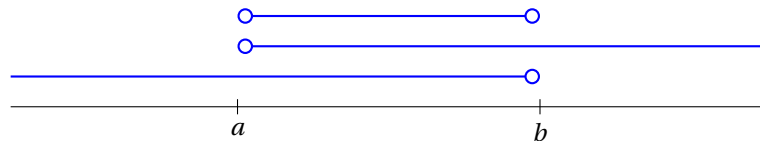
$$a < x < b \quad (\text{där } a < b), \quad a < x, \quad x < b.$$

Eller såhär, om vi ska vara lite noggrannare med notationen:

$$\{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}, \quad \{x \in \mathbf{R} : a < x\}, \quad \{x \in \mathbf{R} : x < b\}.$$

Det begränsade intervallet $a < x < b$ har två ändpunkter (nämligen a och b), men ingen av dessa tillhör intervallet, eftersom båda olikheterna är av typen "strängt mindre än".

Det obegränsade intervallet $a < x$ har bara en ändpunkt (nämligen a), och den tillhör inte intervallet, eftersom det är sträng olikhet i villkoret. Likadant för $x < b$.

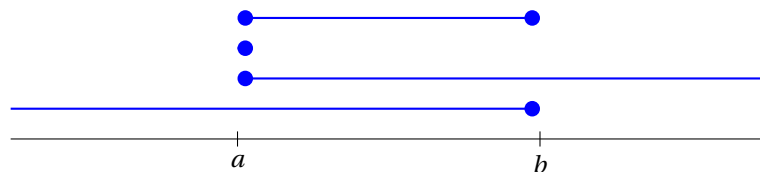


– **Slutna** intervall:

$$a \leq x \leq b \quad (\text{där } a < b), \quad a \leq x \leq a, \quad a \leq x, \quad x \leq b.$$

Intervallet $a \leq x \leq b$ har två ändpunkter (a och b), och båda två tillhör intervallet, eftersom båda olikheterna är av typen "mindre än eller lika med".

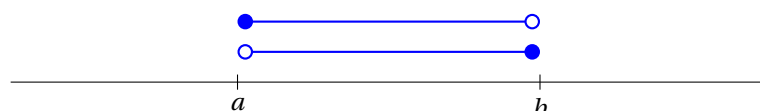
Det urartade enpunktsintervallet $a \leq x \leq a$ och de obegränsade intervallen $a \leq x$ och $x \leq b$ har en ändpunkt vardera, och i samliga fall tillhör den intervallet.



– Intervall som **varken** är öppna eller slutna:

$$a \leq x < b \quad (\text{där } a < b), \quad a < x \leq b \quad (\text{där } a < b).$$

Dessa intervall har två ändpunkter (a och b), varav den ena tillhör intervallet, medan den andra inte gör det. Därmed är det falskt att alla ändpunkter tillhör intervallet, och det är också falskt att ingen ändpunkt tillhör intervallet.



- Intervall som **både** är öppna och slutna:

$$\emptyset, \quad \mathbf{R}.$$

Tomma mängden \emptyset (som brukar räknas som ett urartat intervall) och hela tallinjen $\mathbf{R} =]-\infty, \infty[$ är de enda intervallen som **saknar ändpunkter**, och i detta fall blir det lite speciellt. Villkoret för att vara ett öppet intervall är uppenbart uppfyllt: ingen ändpunkt tillhör intervall-
et. Och villkoret för att vara ett slutet intervall är faktiskt också uppfyllt, enligt logikens regler för hur man ska tolka "för alla x "-villkor ifall det inte finns några x – sådana villkor räknas då som "tomt sanna" (*vacuously true*). Så när det inte finns några ändpunkter räknas det som *sant* att alla ändpunkter tillhör intervallet!

(Om detta känns svårsmält, begrundna följande: För att *motbevisa* påståendet att alla ändpunkter tillhör intervallet skulle man behöva hitta någon ändpunkt som *inte* tillhör intervallet, och några sådana finns det ju inte. Så påståendet kan inte falsifieras, och då är det rimligt att betrakta det som sant.)

Varning. Om man använder **intervallnotation med hakparenteser**¹ kan man för *begränsade* intervall titta på hur hakparentesen är vänd för att se om det är sträng olikhet eller inte, och därifrån avgöra om intervallet är öppet eller slutet eller ingetdera. Men man kan bli lurad när det gäller *obegränsade* intervall. Vid symbolerna $\pm\infty$ skriver man ju *alltid* en *utåtvänd* hakparentes, eftersom dessa symboler inte är reella tal som kan tillhöra ett reellt intervall. Men detta har inget med sträng olikhet mellan reella tal att göra, utan indikerar bara att intervallet saknar ändpunkt i ena eller andra riktningen. Om vi repeterar det vi kom fram till ovan, ser vi att det blir såhär med intervallnotation:

- Öppna (men inte slutna):

$$]a, b[\quad (\text{där } a < b), \quad]a, \infty[, \quad]-\infty, b[.$$

- Slutna (men inte öppna):

$$[a, b] \quad (\text{där } a \leq b), \quad [a, \infty[, \quad]-\infty, b].$$

- Varken öppna eller slutna:

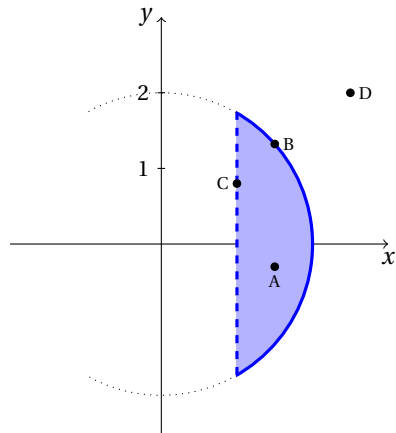
$$[a, b[\quad (\text{där } a < b), \quad]a, b] \quad (\text{där } a < b).$$

- Både öppna och slutna:

$$\emptyset, \quad \mathbf{R} =]-\infty, \infty[.$$

- I den allmänna definition av öppen/sluten mängd i \mathbf{R}^n talar man om **randpunkter** istället för ändpunkter; en randpunkt till en mängd är en punkt som ligger precis på "gränsen" (**randen**) till mängden.
- Ett exempel i \mathbf{R}^2 , för att illustrera begreppen. Låt M vara mängden av punkter som ligger på avstånd högst 2 från origo och strängt till höger om linjen $x = 1$:

¹Eller alternativet med runda parenteser istället för utåtvända hakparenteser: $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, \infty)$, osv.



$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ och } x > 1\}$$

Varje punkt i \mathbf{R}^2 tillhör exakt en av följande kategorier:

- A. Inre punkt till M .
- B. Randpunkt till M som tillhör M .
- C. Randpunkt till M som inte tillhör M (dvs. som tillhör komplementmängden $M^c = \mathbf{R}^2 \setminus M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x, y) \notin M\}$).
- D. Yttre punkt till M .

Mängden M själv utgörs av punkterna av typ A och B.

M :s **inre punkter** (typ A) är de punkter i M som är helt omslutna av andra punkter från M . Mer exakt: P är en inre punkt till M om det finns en cirkelskiva N , med mittpunkt P och radie $r > 0$, sådan att $N \subseteq M$.

M :s **yttre punkter** (typ D) är de punkter som är inre punkter till komplementmängden M^c .

M :s **randpunkter** (typ B och C) är de punkter som ligger precis "på gränsen mellan mängden och dess komplement", dvs. varje cirkelskiva med centrum i en sådan punkt innehåller både punkter från M och punkter från M^c .

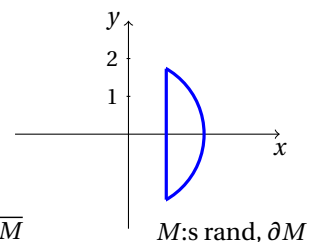
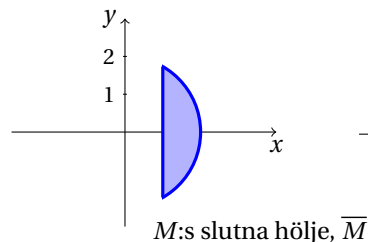
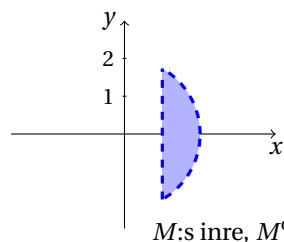
M :s **rand** är mängden av M :s randpunkter. Randen betecknas ∂M (med samma "svängda d" som även används för partiell derivata).

En mängd kallas **öppen** om den inte innehåller någon av sina randpunkter, utan bara inre punkter (eller inga punkter alls, i fallet $M = \emptyset$). En mängd kallas **sluten** om den innehåller alla sina randpunkter. Mängden M i detta exempel är **varken öppen eller sluten**, för den innehåller vissa av sina randpunkter men inte alla.

M :s **inre** (beteckning M^o) är mängden av M :s inre punkter (typ A). Det är alltid en öppen mängd.

M :s **slutna hölje** (beteckning \overline{M}) är unionen av M och ∂M (alltså alla punkter av typ A, B och C). Det är alltid en sluten mängd.

Randen ∂M (typ B och C ihop) är också alltid en sluten mängd.



- Definitionerna ovan kan göras inte bara i \mathbf{R}^2 , utan i \mathbf{R}^n med vilket n som helst. Det är bara att byta ut "cirkelskiva" mot "klot".

Begreppen **sfär** och **klot** definieras på samma sätt i \mathbf{R}^n som i \mathbf{R}^3 , nämligen som mängden av punkter **på** resp. **inom** ett visst avstånd $r > 0$ från en given mittpunkt. Ekvationen för en sfär är $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = r$, där r är radien och \mathbf{a} är mittpunkten. Om man kvadrerar båda leden (vilket är okej eftersom båda är icke-negativa) och skriver ut det i koordinater så blir det

$$(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2.$$

Ett **öppet klot** ges av den stränga olikheten $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r$, medan ett **slutet klot** har icke-sträng olikhet, $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq r$. Ett klot i \mathbf{R}^2 är samma sak som en (öppen eller sluten) cirkelskiva, och ett klot i \mathbf{R}^1 är samma sak som ett (öppet eller slutet) begränsat och icke-urartat intervall.

- En mängd M i \mathbf{R}^n är öppen om och endast om dess komplementmängd $M^c = \mathbf{R}^n \setminus M$ är sluten.
- Det kan inträffa att en mängd M i \mathbf{R}^n är **både öppen och sluten**, men då måste M helt sakna randpunkter, och det finns bara två sådana delmängder av \mathbf{R}^n , nämligen **tomma mängden** ($M = \emptyset$) och **hela rummet självt** ($M = \mathbf{R}^n$).

På engelska kallas en sådan mängd för **clopen set = closed and open set**. Att en mängd kan vara både **open** och **closed** samtidigt är en källa till diverse matematikskämt av varierande kvalitet.

- En **begränsad mängd** är en mängd som ryms inuti något klot.
- En mängd M i \mathbf{R}^n sägs vara **kompakt**² ifall den är **sluten och begränsad**. Relevansen av denna egenskap kan bl.a. ses i satsen om största och minsta värde (Fö 4).
- Begreppet **omgivning till en punkt** definieras lite olika i olika böcker. Vanligast är nog att säga att **mängden M är en omgivning till punkten P om och endast om P är en inre punkt till M** .

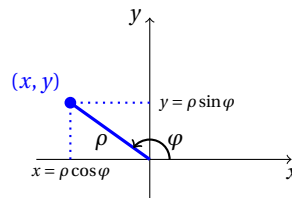
Men somliga böcker kräver dessutom att omgivningar ska vara öppna mängder. Och t.ex. Neymark låter istället "omgivning till P " bara vara en synonym för "öppet klot med centrum i P ".

Dessa skillnader spelar dock sällan någon roll, för man använder oftast begreppet i fraser där det blir samma betydelse oavsett vilken av definitionerna man använder, t.ex. i stil med "om **varje omgivning** till P innehåller en punkt sådan att bla-bla" eller "om f är definierad (åtminstone) i **någon omgivning** till P så gäller det-och-det".

Planpolära koordinater

- Läget för en punkt i planet kan anges med dess kartesiska koordinater (x, y) , men också med dess **(plan)polära koordinater** (ρ, φ) , som definieras av följande samband:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi, \\y &= \rho \sin \varphi.\end{aligned}$$



(Symbolerna här är ρ =rho och φ =phi, alltså de grekiska motsvarigheterna till r och f . Bokstaven φ kan också skrivas ϕ . Förväxla inte ρ med den latinska bokstaven p !)

Oftast säger man bara **polära koordinater**, men man kan säga **planpolära koordinater** om man vill betona att man inte menar rymdpolära koordinater (se nedan).

- I denna kurs (kompendierna, problemsamlingen, föreläsningarna) använder vi alltså ρ och φ , men beteckningarna varierar mellan olika källor. Ofta används t.ex. r istället för ρ och/eller θ =theta istället för φ (bokstaven θ kan också skrivas ϑ). Neymark kallar sina polära koordinater för (r, ν) .
- Om talen ρ och φ är givna fås x och y direkt genom insättning i sambanden ovan.
- Omvänt, för givna värden på x och y finns det alltid tal ρ och φ sådana att sambanden gäller, men dessa tal är inte entydigt bestämda.

Notera först att trig-ettan medför $x^2 + y^2 = (\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 = \rho^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2$, dvs.

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

När $(x, y) = (0, 0)$ är alltså $\rho = 0$ enda möjligheten, och då kan φ vara vad som helst.

²I allmän topologi studeras s.k. "topologiska rum", ett generellt begrepp som bl.a. innefattar \mathbf{R}^n . Där sägs en mängd M vara kompakt ifall den uppfyller ett ganska märkligt villkor som vi inte behöver gå närmare in på här ("varje öppen övertäckning av M har en ändlig delövertäckning"). För mängder i \mathbf{R}^n är nämligen detta uppfyllt om och endast om M är sluten och begränsad, så vi kan ta detta enklare villkor som definition av kompakthet i den här kursen.

Om $(x, y) \neq (0, 0)$ finns det två möjligheter vad gäller ρ , nämligen $\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Vi använder i denna kurs **aldrig** det negativa värdet (även om man i princip skulle kunna göra det, om man vill göra livet svårt för sig), utan vi väljer alltid det positiva värdet

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

dvs. ρ är avståndet från punkten $(0, 0)$ till punkten (x, y) , så som figuren ovan indikerar. För att bestämma φ kan vi sedan använda att

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \iff \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = 1,$$

så att punkten $(x/\rho, y/\rho)$ (med det tidigare bestämda värdet $\rho > 0$) ligger på enhetscirkeln. Det finns därför exakt en vinkel φ_0 i intervallet $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ sådan att $(x/\rho, y/\rho) = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$, dvs. $x = \rho \cos \varphi_0$ och $y = \rho \sin \varphi_0$. Denna vinkel φ_0 är alltså *en* möjlig lösning, och den allmänna lösningen fås genom att lägga på ett helt antal varv:

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

- Sammanfattningsvis: Radien ρ är entydigt bestämd om vi lägger till det extra kravet att $\rho \geq 0$. Vinkeln φ är entydigt bestämd sånär som på en multipel av 2π , förutom att φ är obestämd om $\rho = 0$. I praktiken brukar man själv kunna välja något lämpligt intervall av längd 2π där man vill att φ ska ligga, t.ex. $[0, 2\pi[$ eller $]-\pi, \pi]$, eller vad som nu kan tänkas passa i sammanhanget. När man väl har valt ett sådant intervall är även vinkeln φ entydigt bestämd (utom då $\rho = 0$).
- **Exempel.** Bestäm de polära koordinaterna för punkten $(x, y) = (-1, 2)$.

Vi beräknar först $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Detta ger

$$(\cos \varphi, \sin \varphi) = \left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Den minsta positiva tal φ som löser detta ekvationssystem är

$$\varphi = \arccos \frac{-1}{\sqrt{5}} = \pi - \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} = \pi - \arctan 2.$$

(Eller hur? Tänk igenom detta noga tills du håller med! De tre uttrycken är bara tre olika sätt att skriva samma reella tal $\varphi = 2,0344439\dots$, och du kan använda det uttryck som du gillar bäst.)

Om du ritat in punkten $(x, y) = (-1, 2)$ i ett koordinatsystem bör du ganska enkelt kunna läsa av vinkeln $\varphi = \pi - \arctan 2$ geometriskt. Oftast är detta enklare än att försöka räkna fram svaret.

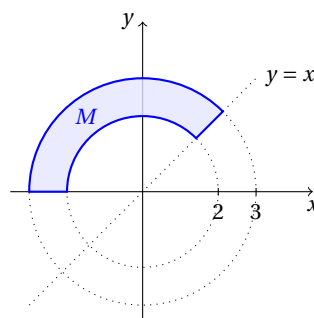
Vi kan addera en multipel av 2π om det av någon anledning skulle passa våra syften bättre, t.ex. $\varphi = 17\pi - \arctan 2$ istället för $\varphi = \pi - \arctan 2$. Men om vi behåller vårt första val av φ (som väl verkar enklast) får vi alltså

$$(\rho, \varphi) = (\sqrt{5}, \pi - \arctan 2).$$

- **Exempel.** Mängden

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq x, y \geq 0\}$$

ser ut såhär:



Vi ser geometriskt i figuren att denna mängd består av alla punkter (x, y) vars polära koordinater (ρ, φ) uppfyller olikheterna

$$2 \leq \rho \leq 3, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi. \quad (A)$$

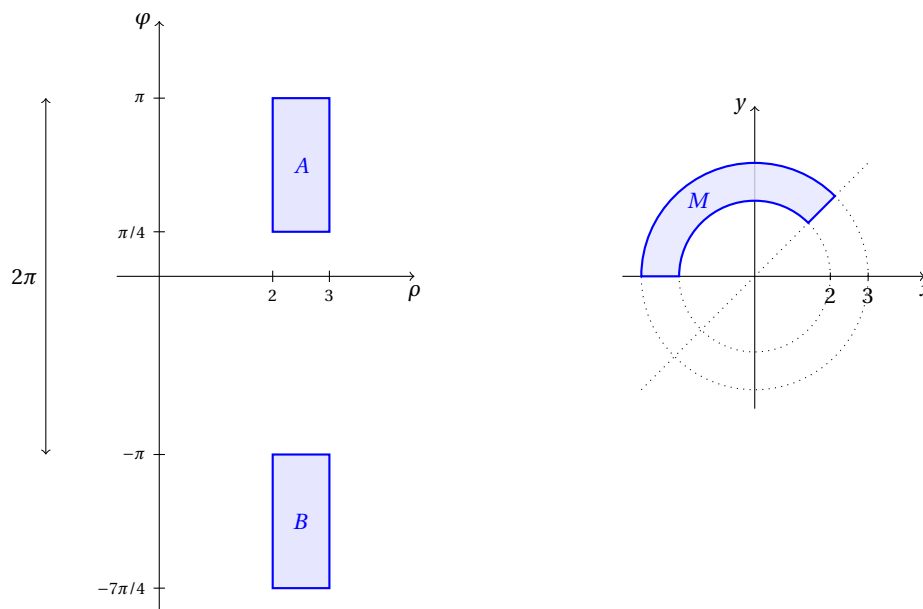
Eftersom koordinaten φ bara är bestämd så när som på en multipel av 2π kan mängden även beskrivas med olikheterna

$$2 \leq \rho \leq 3, \quad \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq \varphi \leq \pi + 2\pi n$$

för vilket heltal n som helst, bara man tar **samma** n på båda ställena. T.ex. med $n = -1$ får man

$$2 \leq \rho \leq 3, \quad -\frac{7\pi}{4} \leq \varphi \leq -\pi. \quad (B)$$

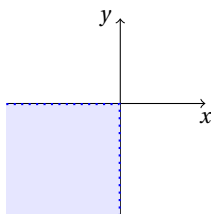
Dessa olikheter beskriver exakt samma mängd M i xy -planet, även om det blir en annan mängd ifall man tolkar olikheterna i $\rho\varphi$ -planet:



Varje punkt (ρ, φ) i mängden A motsvarar exakt en punkt (x, y) i mängden M , och varje punkt i M har en "representant" i A , dvs. det är ingen del av M som fattas. På samma sätt har vi en perfekt ett-till-ett-korrespondens mellan punkterna i mängden B och punkterna i mängden M . Så både A och B kan sägas "beskriva M i polära koordinater", och ingen av dem är "mera rätt" än den andra.

Om man däremot utgår från $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi$ och drar bort 2π bara från den nedre gränsen så blir det fel: olikheterna $2 \leq \rho \leq 3$ och $-7\pi/4 \leq \varphi \leq \pi$ beskriver ju i xy -planet *hela* ringen mellan de två cirklarna med radii 2 och 3, och dessutom med *överlappning* (punkterna i M kommer med två gånger). Inte heller blir det rätt om man drar bort 2π från den övre gränsen enbart; olikheterna $2 \leq \rho \leq 3$ och $\pi/4 \leq \varphi \leq -\pi$ saknar ju lösning, eftersom ett tal φ omöjligt kan vara större än $\pi/4$ och mindre än $-\pi$ på samma gång.

- **Exempel.** Den (öppna) **tredje kvadranten** i xy -planet består av alla punkter vars kartesiska koordinater (x, y) uppfyller olikheterna $x < 0$ och $y < 0$:



Denna mängd beskrivs i polära koordinater av olikheterna

$$\rho > 0, \quad \pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}.$$

Och som alltid kan man addera valfri multipel av 2π till båda φ -gränserna, så det går också bra att istället säga t.ex.

$$\rho > 0, \quad -\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$$

om man föredrar det.

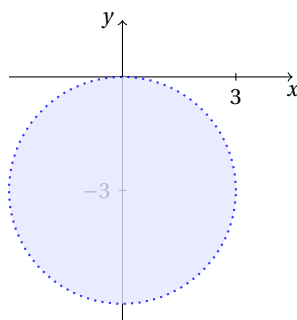
- **Exempel.** Den geometriska tolkningen av olikheten

$$x^2 + y^2 < -6y$$

framgår med hjälp av kvadratkomplettering:

$$x^2 + y^2 < -6y \iff x^2 + y^2 + 6y < 0 \iff x^2 + (y+3)^2 < 9.$$

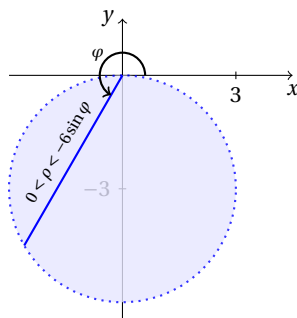
Det är alltså en **öppen cirkelskiva** i xy -planet, med radie $\sqrt{9} = 3$ och mittpunkt $(x, y) = (0, -3)$:



Olikheten $x^2 + y^2 < -6y$ uttryckt i polära koordinater blir $\rho^2 < -6\rho \sin \varphi$. Eftersom origo inte tillhör mängden är $\rho > 0$, och därför går det bra att dividera båda led med ρ , vilket ger $\rho < -6 \sin \varphi$. Denna olikhet är möjlig att uppfylla (med positiva värden på ρ) om och endast om $\sin \varphi$ är negativt, så cirkelskivan beskrivs i polära koordinater av olikheterna

$$\pi < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \rho < -6 \sin \varphi.$$

(Eller t.ex. $-\pi < \varphi < 0$ om man föredrar det.) Koordinaten φ måste alltså till att börja med vara sådan att man hamnar i det undre halvplanet, $y < 0$. För ett givet värde på vinkeln φ avgör sedan olikheten $\rho < -6 \sin \varphi$ hur långt ut från origo man kan gå i den riktningen och fortfarande vara kvar inuti cirkelskivan:



T.ex. blir intervallet för ρ så stort som möjligt när $\varphi = 3\pi/2$, nämligen $0 < \rho < 6$ (cirkelskivans diameter är 6). För φ -värden just över π eller just under 2π blir däremot ρ -intervallet mycket kort.

Rymdpolära (sfäriska) koordinater

- Läget för en punkt i rummet kan anges med dess kartesiska koordinater (x, y, z) eller med dess **rymdpolära koordinater** (r, θ, φ) , även kallade **sfäriska koordinater**, som definieras av följande samband:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta.$$

- I denna kurs används alltså variabeln r för rymdpolära koordinater, vilket är den främsta anledningen till att vi använder ρ (istället för r) för planpolära koordinater.

Beteckningarna varierar dock även i det rymdpolära fallet mellan olika källor. Det är t.ex. ganska vanligt att ha θ och φ i ombytta roller, eller att använda r för planpolära koordinater och ρ för rymdpolära. (Neymarks bok kallar vinklarna för u och v , men detta är mycket okonventionellt.)

Vilken konvention du väljer att använda (t.ex. på tentan) spelar ingen roll, så länge du skriver upp formlerna för variabelbytet så att det tydligt framgår hur dina polära koordinater är definierade.

- Trig-ettan (använd två gånger) ger att

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Såhär:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (r \sin \theta \cos \varphi)^2 + (r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (r \cos \theta)^2 \\ &= (r \sin \theta)^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} + (r \cos \theta)^2 \\ &= r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \\ &= r^2 \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_{=1} = r^2. \end{aligned}$$

Detta ger $r = \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, och vi väljer frivilligt att **aldrig** använda det negativa värdet $r = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, utan tar alltid

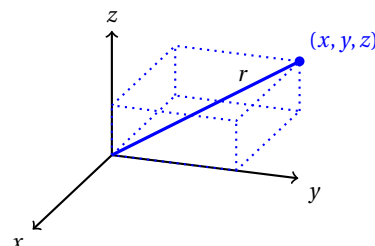
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0,$$

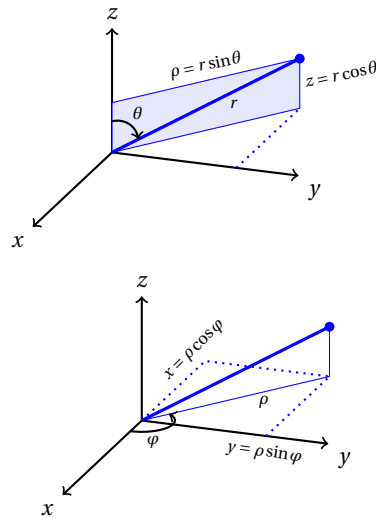
så att r är avståndet från punkten $(0, 0, 0)$ till punkten (x, y, z) .

- För att förstå formlerna kan det hjälpa att tänka i två steg, där kombinationen $\rho = r \sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2}$ spelar samma roll som variabeln ρ gjorde i det planpolära fallet:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & \rho &= r \sin \theta, \\ y &= \rho \sin \varphi, & z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Denna storhet ρ beskriver hur långt ut från z -axeln punkten (x, y, z) ligger, alltså avståndet mellan $(0, 0, z)$ och (x, y, z) , eller ekvivalent avståndet mellan $(0, 0, 0)$ och $(x, y, 0)$.





- Vinkeln φ fungerar ungefär som i det planpolära fallet: den är bara bestämd så när som på en multipel av 2π , och den talar om "åt vilket väderstreck i xy -planet man ska sikta" om man står i origo och vill skjuta mot punkten (x, y, z) . Den beror bara på (x, y) , inte på z , och är obestämd om $(x, y) = (0, 0)$, dvs. om punkten (x, y, z) ligger på z -axeln.
- Vinkeln θ är helt annorlunda; den talar om "hur man ska sikta i höjded" (om vi tänker oss att xy -planet är horisontellt och positiv z -led är uppåt). Observera att ekvationerna

$$\begin{aligned}\rho &= r \sin \theta, \\ z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

har cosinus-faktorn i formeln för z , och vinkeln θ kommer därför att mätas **från positiva z -axeln**, dvs. $\theta = 0$ är **rakt uppåt**, $\theta = \pi/2$ är **horisontellt** (längs xy -planet), och $\theta = \pi$ är **rakt neråt**.

(Testa själv: t.ex. ger insättning av $\theta = 0$ i formlerna för rymdpolära koordinater värdena $(x, y, z) = (0, 0, r)$, vilket är en punkt på positiva z -axeln.)

För att inte bli olyckliga väljer vi frivilligt att **aldrig** använda oss av θ -värden utanför intervallet $[0, \pi]$. Den som någon gång t.ex. blir frestad att "böja sig bakåt och skjuta" genom att använda negativa θ , bör betänka att det är mycket enklare att istället vända sig åt andra hållet (genom att addera π eller $-\pi$ till den andra vinkeln φ) och skjuta framåt. Man *kan* i princip använda vilka θ -värden som helst, men saker och ting går väldigt lätt galet då!

T.ex. är

$$x^2 + y^2 = (r \sin \theta \cos \varphi)^2 + (r \sin \theta \sin \varphi)^2 = r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 \sin^2 \theta,$$

så att

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |r \sin \theta| = |r| |\sin \theta|,$$

vilket om $r \geq 0$ och $\sin \theta \geq 0$ kan förenklas till sambandet

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \theta$$

som användes ovan. Och $\sin \theta \geq 0$ är ju uppfyllt ifall vi håller oss till $0 \leq \theta \leq \pi$, men inte nödvändigtvis ifall vi skulle få för oss att använda θ utanför detta intervall.

Och när vi så småningom kommer till uträkning av trippelintegraler med hjälp av rymdpolära koordinater kommer vi att stöta på en s.k. volym skala som egentligen är $|r^2 \sin \theta|$, men som på grund av villkoret $0 \leq \theta \leq \pi$ kan förenklas till den hanterligare formen $r^2 \sin \theta$.

Med risk för att bli tjatig upprepar jag därför uppmaningen: använd **alltid** bara vinklar θ som ligger mellan "rakt uppåt" och "rakt neråt", dvs. i intervallet

$$0 \leq \theta \leq \pi.$$

- Om man har räknat ut $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ kan man sedan få ut θ -vinkeln för punkten (x, y, z) genom att använda formeln

$$\theta = \arccos(z/r)$$

(som såklart är härledd från sambandet $z = r \cos \theta$). Notera att detta automatiskt ger ett värde i det rätta intervallet $[0, \pi]$, eftersom detta intervall är värdemängden för \arccos -funktionen.

- Sammanfattningsvis: För en given punkt $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ är radien r och vinkeln θ entydigt bestämda om vi lägger till villkoren $r \geq 0$ och $0 \leq \theta \leq \pi$. Vinkeln φ är entydigt bestämd så när på en multipel av 2π , förutom att den är obestämd om $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, dvs. om punkten ligger på z -axeln. För $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ är $r = 0$, medan båda vinklarna θ och φ är obestämda.
- **Exempel.** Bestäm de rymdpolära koordinaterna för punkten $(x, y, z) = (-1, 2, 3)$.

Vi börjar med att beräkna

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Detta ger sedan

$$\theta = \arccos \frac{z}{r} = \arccos \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Vinkeln φ beror bara på x och y (inte z), och bestäms som i exemplet för planpolära koordinater ovan: $(x, y) = (-1, 2)$ ger $\varphi = \pi - \arctan 2 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Om vi väljer $n = 0$ fås alltså

$$(r, \theta, \varphi) = (\sqrt{14}, \arccos \frac{3}{\sqrt{14}}, \pi - \arctan 2).$$

- **Exempel.** De punkter (x, y, z) som uppfyller olikheten $x^2 + y^2 + z^2 < 4$ bildar ett **öppet klot** med centrum i origo och radie 2. I rymdpolära koordinater beskrivs denna mängd av villkoren

$$0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Eller rättare sagt, den beskrivs bara "nästan" av dessa villkor, men det är "tillräckligt bra" ändå. Eftersom vinkeln θ är obestämd då $x = y = z = 0$ och vinkeln φ är obestämd då $x = y = 0$ blir det ju inte en perfekt ett-till-ett-korrespondens mellan den mängd i $r\theta\varphi$ -rummet som ges av olikheterna ovan och den mängd i xyz -rummet som man vill beskriva. Denna lilla avvikelse är dock inget som brukar ställa till några problem i praktiken, och man brukar sällan ens bry sig om att kommentera saken.

- **Exempel.** De punkter (x, y, z) som uppfyller ekvationen

$$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$$

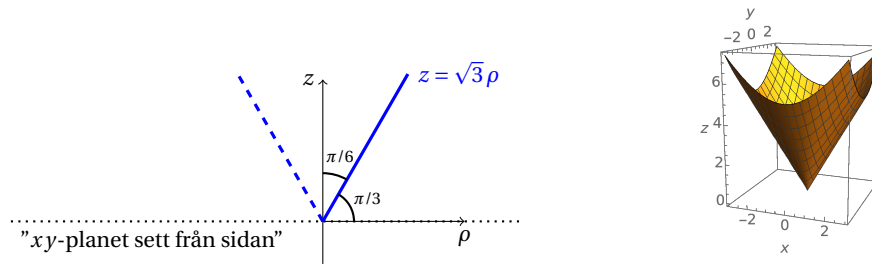
bildar en **kon** med z -axeln som symmetriaxel. I rymdpolära koordinater beskrivs denna mängd av villkoren

$$0 \leq r, \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

För att se detta, skriv först $x^2 + y^2 = \rho^2$ där $\rho \geq 0$, så att ekvationen blir

$$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} = \sqrt{3\rho^2} = \sqrt{3} |\rho| = \sqrt{3} \rho$$

(där vi i sista steget använde att $\rho \geq 0$). Rita sedan linjen $z = \sqrt{3}\rho$ för $\rho \geq 0$ i ett ρz -koordinatsystem, och rotera den runt z -axeln:



Man känner igen linjens riktningskoefficient $\sqrt{3}$ som tangens för en av standardvinklarna, nämligen $\pi/3$ (dvs. 60°):

$$\tan(\pi/3) = \frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}.$$

Denna vinkel $\pi/3$ är alltså vinkeln från xy -planet upp till konen, medan θ -vinkeln mäts från positiva z -axeln och därmed ges av komplementvinkeln $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ (dvs. 30°).

Området **ovanför konen** ges av olikheten $z > \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, som i rymdpolära koordinater blir

$$0 < r, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

för om man ska sikta i höjddled så att man prickar en punkt ovanför konen måste man ligga någonstans mellan rakt uppåt ($\theta = 0$) och konens lutning ($\theta = \pi/6$). Observera att det *inte* blir $-\pi/6 < \theta < \pi/6$, då skulle alla punkter komma med två gånger. Kom ihåg att vi aldrig behöver, och aldrig bör, använda θ -värden utanför intervallet $[0, \pi]$.

Området **nedanför konen**, $z < \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, blir på liknande sätt

$$0 < r, \quad \frac{\pi}{6} < \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Observera att detta innefattar **alla** punkter nedanför konen, inklusive de punkter som har **negativ** z -koordinat, dvs. ligger under xy -planet. (Det är ibland lätt att glömma bort att negativa tal existerar!)

Området **mellan konen och xy -planet**, $0 < z < \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, ges av

$$0 < r, \quad \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Lektion 2

- Rita mängder, topologiska begrepp: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.7, 1.9, 1.10, 1.5*, 1.6*, 1.11*.
- Planpolära koordinater: K12.
- Rymdpolära koordinater: K13.

Föreläsning 3. Dubbelintegraler.

- Sjödin: Kapitel 9.
Neymark: Avsnitt 6.1–6.2.
Persson & Böiers: Avsnitt 6.1–6.2.
- Detta inledande avsnitt om dubbelintegraler kommer ganska tidigt i kursen, eftersom det dyker upp dubbelintegraler i vissa andra kurser som går parallellt med denna. Vi återkommer senare till variabelbyten i dubbelintegraler, och till trippelintegraler.

Definition

- Dubbelintegral $\iint_D f(x, y) dx dy$ av en begränsad funktion $f(x, y)$ över ett begränsat område D i planet; **definition via trappfunktioner**.
(Väldigt översiktligt på föreläsningen – se kurslitteraturen för detaljer.)
- Man kan tänka på integralen som en **oändligt förfinad summa**: ringa in ett område D i värdetabellen för f , dela in D i "oändligt små" rektanglar med sidor dx och dy , multiplicera varje funktionsvärde $f(x, y)$ med arean $dx dy$ hos dess tillhörande rektangel ("areaelementet"), och "lägg ihop" alla de oändligt många oändligt små bidragen.
- Funktionen $f(x, y)$ kallas för i detta sammanhang för **integranden** (= det som integreras). Blanda inte ihop orden *integral* och *integrand*, det är ju två helt olika saker.

Tolkningar

- Fysikalisk tolkning: Antag att området D beskriver formen hos en tunn platta, och att $f(x, y)$ beskriver hur **laddningstätheten** varierar från punkt till punkt i plattan. (Laddningstäthet = elektrisk laddning per areaenhet, kan vara såväl positiv som negativ.)

Då är

$$dQ = f(x, y) dx dy$$

laddningen i en infinitesimal rektangel kring (x, y) med arean $dx dy$, och integralen

$$Q = \iint_D dQ = \iint_D f(x, y) dx dy$$

är plattans **totala elektriska laddning**.

- Alternativ fysikalisk tolkning, om $f \geq 0$: låt $f(x, y)$ vara **masstäthet** (massa per areaenhet, kan inte vara negativ) istället för laddningstäthet; integralen ger då plattans **totala massa**.
- Geometrisk tolkning om $f \geq 0$: integralen ger **volymen** mellan xy -planet och funktionsytan $z = f(x, y)$, ovanför området D .

Om f växlar tecken: volymen ovanför xy -planet minus volymen nedanför xy -planet. ("**Volym räknat med tecken**", dvs. volym nedanför xy -planet räknas negativt.)

Obs! **Bli inte alltför förälskad i denna tolkning**, för den fungerar **inte** när vi kommer till trippelintegraler! Tolkningarna med täthet ovan är att föredra, för de kan användas i godtycklig dimension, och återspeglar mycket bättre hur man faktiskt tänker på integraler i tillämpade ämnen.

- Specialfall: Dubbelintegralen av $f(x, y) = 1$, alltså $\iint_D dx dy$, ger **arean** av området D . Man lägger ju bara ihop alla **areaelementen**

$$dA = dx dy$$

i D , eller hur? Sådär:

$$\text{Area}(D) = \iint_D dA = \iint_D dx dy.$$

Logiskt sett bör man i denna kurs egentligen ta detta som *definition* av begreppet area (för en kvadrerbar mängd; se nedan).

Beräkning

- **Räkneregler** för dubbelintegraler står i kurslitteraturen, t.ex. $\iint_D c f(x, y) dx dy = c \iint_D f(x, y) dx dy$. De bör upplevas som tämligen självklara ifall man har förstått tolkningarna ovan.

- **Beräkning** av dubbelintegral görs med **upprepad enkelintegration** (Fubinis sats), dvs. som ”enkelintegral av enkelintegral”:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

om området D beskrivs av olikheterna $a \leq x \leq b$, $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$ (där α och β är kontinuerliga funktioner sådana att $\alpha(x) \leq \beta(x)$ för $a \leq x \leq b$).

Eller med variablerna i ombytta roller:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

om D ges av $c \leq y \leq d$, $\gamma(y) \leq x \leq \delta(y)$.

(Enkelintegral = den vanliga bestämda integralen från envariabelanalysen, som man vanligtvis räknar ut genom att hitta primitiv funktion och sätta in gränserna.)

- Obs. att när vi talar om dubbelintegraler så är det alltid fråga om **bestämd integral** (Riemannintegral). Det är alltså inte meningsfullt att skriva ” $\iint f(x, y) dx dy$ ” där man inte anger något integrationsområde D , så var noga med att alltid ange området i varje steg i uträkningen.
- Viktigt: **Rimlighetskontroll!**

T.ex. ifall man enkelt kan se att $f(x, y) < 0$ för alla $(x, y) \in D$, och om D :s area är positiv (alltså inte noll), så vet man redan innan man börjar räkna att integralen $\iint_D f(x, y) dx dy$ måste bli negativ – ”om laddningstätheten är negativ i varje punkt så måste totala laddningen vara negativ också”.

Några teorirelaterade kommentarer

- Det är inte alla begränsade mängder i \mathbf{R}^2 som det är meningsfullt att Riemannintegrera över, utan integrationsområdet D måste vara en s.k. **kvadrerbar mängd** (även kallat **Jordan-mätbar mängd**), alltså en **begränsad** mängd vars **rand** ∂D har **arean noll** i den meningen att ∂D för varje $\varepsilon > 0$ kan övertäckas med ändligt många axelparallella rektanglar vars sammanlagda area är högst ε .

För att hitta mängder som *inte* är kvadrerbara får man anstränga sin fantasi en aning. Ett exempel är mängden av *rationella* punkter i enhetscirkelskivan:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q} \right\}.$$

Denna mängd saknar inre punkter, och varenda punkt (rationell eller inte) i den slutna enhetscirkelskivan är en randpunkt, så

$$\partial D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}, \quad \text{Area}(\partial D) = \pi \neq 0.$$

Randen ∂D har alltså inte arean noll, och därmed kan man inte Riemannintegrera över detta område D . (I synnerhet är D :s area odefinierad i Riemanns mening, eftersom integralen $\iint_D dx dy$ är meningslös.)

Alla de okomplicerade integrationsområden som förekommer i uppgifterna (vanliga rektanglar, trianglar, cirkelskivor, klot, osv.) är dock kvadrerbara.

- Inte heller alla begränsade funktioner är meningsfulla att integrera, men t.ex. kan man visa att alla **kontinuerliga** begränsade funktioner (Fö 4) är integrerbara.
- Notera att det **inte spelar någon roll** ifall vi använder **strikt** eller **icke-strikt** olikheter när vi skriver upp integrationsområdet, eftersom randen ändå inte ger något bidrag till integralen. (Randens till en kvadrerbar mängd har ju arean noll, och en integral över en mängd med arean noll blir alltid noll.)

Lektion 3

- Uppskattning av dubbelintegral med hjälp av trappfunktioner: 6.1.
- Beräkning av dubbelintegraler via upprepad integration: 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.7*.
- Dubbelintegral med falluppdelning: 6.6.
- Beräkning av upprepad enkelintegral via byte av integrationsordning i dubbelintegral: 6.8.

Föreläsning 4. Gränsvärden och kontinuitet.

- Sjödin: Kapitel 2.
Neymark: Kapitel 2.
Persson & Böiers: Avsnitt 1.5–1.6.

Gränsvärden

- *Uträkning* av gränsvärden spelar en mindre roll i denna kurs än i envariabelanalysen. Framför allt behöver vi *begreppet* gränsvärde för att förstå begreppen **kontinuitet** och **differentierbarhet**.
- **Gränsvärde** för funktioner av flera variabler definieras exakt som för envariabelfunktioner, förutom att punkterna \mathbf{x} och \mathbf{a} nu är element i \mathbf{R}^n istället för bara reella tal, och notationen $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|$ därmed betyder längden av vektorn $\mathbf{x} - \mathbf{a}$, alltså avståndet mellan \mathbf{x} och \mathbf{a} .

Definition. Man säger att

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow A \quad \text{då} \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$$

ifall \mathbf{a} är en hopningspunkt till definitionsmängden D_f och det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att implikationen

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} \in D_f \\ 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \end{array} \right\} \implies |f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$$

gäller.

(I denna kurs, liksom i envariabelanalysen, använder vi villkoret $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ i gränsvärdesdefinitionen, dvs. när det gäller gränsvärden ska man **inte** ta hänsyn till värdet $f(\mathbf{a})$ om detta skulle råka vara definierat. Sjödens kompendier och Neymarks bok följer denna konvention. Det gör däremot inte Persson & Böiers, som säger $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ istället; se fotnot på s. 34 i deras bok.)

- Oegentliga gränsvärden, dvs. $f(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ eller $f(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$, definieras också på motsvarande sätt som i envariabelanalysen.

Likaså gränsvärden då $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ (men observera att det bara blir ett enda fall, ” \mathbf{x} går godtyckligt långt bort från origo”, inte två olika fall $x \rightarrow +\infty$ och $x \rightarrow -\infty$ som i envariabelanalysen).

- Såväl Neymark som Persson & Böiers saknar följande enkla **entydighetssats**, som säger att en funktion kan ha högst ett gränsvärde i en punkt (alltså inte flera *olika* gränsvärden *i samma punkt*):

Sats. Om $f(\mathbf{x}) \rightarrow A_1$ och $f(\mathbf{x}) \rightarrow A_2$ då $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ så är $A_1 = A_2$.

(Bevisidé: Antag att $A_1 \neq A_2$. Då fås en motsägelse genom att i definitionen av $f(\mathbf{x}) \rightarrow A_1$ och $f(\mathbf{x}) \rightarrow A_2$ sätta in ett tal ε sådant att $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|A_1 - A_2|$. Detta visar att $A_1 \neq A_2$ är omöjligt, och slutsatsen blir att $A_1 = A_2$.)

Det är denna entydighetssats som gör att vi kan använda **bestämd form** och säga

A är **gränsvärdet** av $f(\mathbf{x})$ då $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$

istället för bara

A är **ett gränsvärde** av $f(\mathbf{x})$ då $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$,

och det är även detta som gör det meningsfullt att använda det alternativa skrivsättet

$$A = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}).$$

- Om $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ så kan man med variabelbytet $\mathbf{t} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ överföra problemet till undersökning av ett gränsvärde i origo, $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{0}$. Och för att visa att $f(\mathbf{x}) \rightarrow A$ kan man visa att $f(\mathbf{x}) - A \rightarrow 0$.

Så det man egentligen behöver veta är **hur man bevisar att en funktion går mot noll i origo**. För detta är det ofta smidigt att använda polära koordinater:

Sats ("nollgående radiell faktor gånger begränsad faktor är nollgående"). Antag att $f(x, y)$ kan skrivas som³

en faktor som bara beror på den radiella variabeln $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ och som **går mot noll** då $\rho \rightarrow 0^+$

gånger

en faktor som är **begränsad** i en punkterad⁴ omgivning till origo.

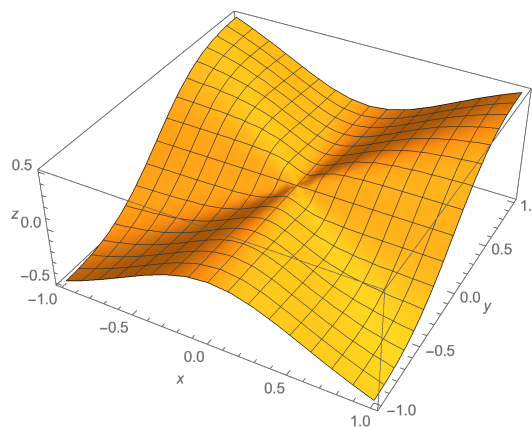
Då är

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

- En liknande sats gäller i tre dimensioner med rympolära koordinater: om f är lika med en nollgående funktion av $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gånger en funktion som är begränsad i en punkterad omgivning till origo, så går f mot noll i origo.
- **Exempel 1.** Om $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ för $(x, y) \neq (0, 0)$ så är (för $\rho > 0$)

$$f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \frac{(\rho \cos \varphi)^2 \rho \sin \varphi}{\rho^2} = \underbrace{\rho}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\cos^2 \varphi \sin \varphi}_{\text{begränsat (beloppet är } \leq 1)},$$

så $f(x, y) \rightarrow 0$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, enligt satsen ovan.



³Med andra ord, antag att

$$f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = g(\rho) h(\rho, \varphi) \quad (\rho > 0),$$

där $g(\rho) \rightarrow 0$ då $\rho \rightarrow 0^+$ (vanligt envariabelgränsvärde), och där det finns tal R och C sådana att $|h(\rho, \varphi)| \leq C$ för alla $(\rho, \varphi) \in D_h$ med $0 < \rho < R$.

⁴En **punkterad omgivning** till origo är en mängd av formen $M \setminus \{0\}$, där M är en omgivning till origo.

- **Exempel 2.** Modifiera funktionen från Exempel 1 genom att addera en term $5x^3$ i nämnaren, alltså

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2 + 5x^3} \text{ för } (x, y) \neq (0, 0). \text{ Då är (för } \rho > 0)$$

$$f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \frac{(\rho \cos \varphi)^2 \rho \sin \varphi}{\rho^2 + 5(\rho \cos \varphi)^3} = \underbrace{\rho}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{1 + 5\rho \cos^3 \varphi}}_{\substack{\text{begränsat om } \rho > 0 \\ \text{är tillräckligt litet} \\ \text{(se nedan)}}},$$

så även i detta fall har vi $f(x, y) \rightarrow 0$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, enligt satsen ovan. Här måste man dock vara noggrann med undersökningen av faktorn

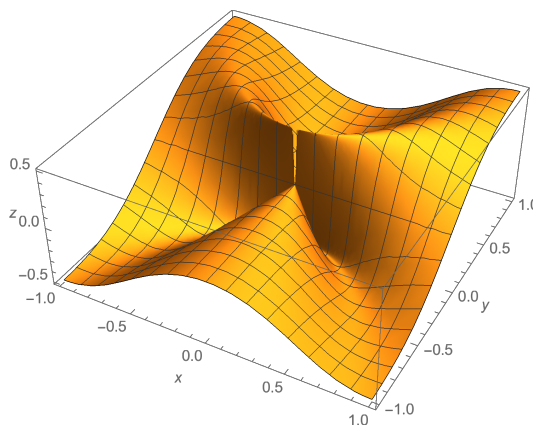
$$\frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{1 + 5\rho \cos^3 \varphi}.$$

Ifall $\rho \geq 1/5$ kommer det ju att finnas φ -värden som gör att nämnaren blir noll, och i närheten av dessa punkter skulle uttryckets belopp kunna bli hur stort som helst. Men om vi håller oss tillräckligt nära origo, säg t.ex. $0 < \rho < 1/15$, så har vi begränsningen

$$\left| \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{1 + 5\rho \cos^3 \varphi} \right| \leq \frac{1}{1 - 5 \cdot \frac{1}{15} \cdot 1} = \frac{3}{2},$$

och detta räcker för att satsen ska vara tillämpbar.

- **Icke-exempel.** Betrakta istället funktionen $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ för $(x, y) \neq (0, 0)$ (där alltså x^2 i nämnaren i Exempel 1 har bytts ut mot x^4). Längs axlarna är denna funktion lika med noll (t.ex. $f(x, 0) = \frac{x^2 \cdot 0}{x^4 + 0^2} = \frac{0}{x^4} = 0$ för $x \neq 0$), men längs kurvan $y = x^2$ har vi istället $f(x, x^2) = \frac{x^2 x^2}{x^4 + (x^2)^2} = 1/2$ för $x \neq 0$. I varje punkterad omgivning till origo förekommer alltså både värdet 0 och värdet $1/2$, vilket innebär att $f(x, y)$ **saknar gränsvärde** då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.



Om vi hade försökt med polära koordinater i detta fall så skulle vi (för $\rho > 0$) ha fått

$$f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \frac{(\rho \cos \varphi)^2 \rho \sin \varphi}{\rho^4 \cos^4 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \underbrace{\rho}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{\rho^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi}}_{\text{begränsat!?!}}.$$

Här har vi en ensam faktor ρ som går mot noll, och det är nog många som i detta läge skulle ha för bråttom och felaktigt påstå att den andra faktorn är begränsad, så att gränsvärdet blir noll. Men så kan det ju omöjligt vara, eftersom vi visade ovan att gränsvärdet inte existerar! Och den

som verkligen försöker ge sig på att med noggranna uppskattningar visa att den andra faktorn är begränsad (för alla φ och för alla tillräckligt små $\rho > 0$) bör efter att tag märka att det inte går. I själva verket är det ju så att när man är på kurvan $y = x^2 > 0$ så gäller sambandet $\rho \sin \varphi = \rho^2 \cos^2 \varphi > 0$, dvs.

$$\rho \cos^2 \varphi = \sin \varphi > 0,$$

och när ρ och φ är sammanlänkade på detta sätt kommer faktorn ifråga att vara lika med

$$\frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{(\rho \cos^2 \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{\sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi}{2 \sin \varphi},$$

vilket ju går mot oändligheten (och alltså är obegränsat) när φ (och därmed även $\rho = \sin \varphi / \cos^2 \varphi$) går mot noll från det positiva hållet.

Satsen ovan är alltså inte tillämplig här, och vi hade ingen nytta alls av att gå över till polära koordinater. (Snarare tvärtom – det var mycket enklare att se vad som hände när vi använde xy -koordinaterna, eller hur?)

Sensmoral: Tro inte att polära koordinater är en universalmetod som kan hantera alla gränsvärdesproblem. Ha inte heller för bråttom att gå över till polära koordinater, utan "känn" alltid lite på problemet i de ursprungliga koordinaterna först, och använd bara polära koordinater ifall du tror att gränsvärdet är noll och vill kunna bevisa detta. Om du däremot tror att gränsvärdet *inte* existerar är det mestadels mycket bättre att *inte* byta till polära koordinater, för det brukar vara enklare att visa icke-existens direkt i de ursprungliga koordinaterna.

- En **varning** angående skrivsätt: undvik att skriva saker i stil med

$$" \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\dots) = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\dots) ".$$

En anledning är att det är lite oklart hur skrivsättet "lim" ska tolkas om man har ett uttryck där både ρ och φ ingår. Vanligen när man ser någon använda detta skrivsätt framgår det av uträkningarna att vederbörande har behandlat φ som en *konstant* när man låtit $\rho \rightarrow 0$. Men det är ju inte så man ska tänka när man undersöker " $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$ ", utan då bör man föreställa sig att φ kan variera helt fritt medan $\rho \rightarrow 0$.

T.ex. är följande redovisning inte korrekt (även om slutsatsen är sann): "Gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2}$ existerar inte, eftersom

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\cos^2 \varphi + \underbrace{\rho \sin^3 \varphi}_{\text{begr.}}) = \cos^2 \varphi,$$

vilket ger olika värden för olika φ ." Vad är problemet? Jo, det är den första likheten! Där påstås det att ett tvåvariabelgränsvärde som inte existerar är lika med ett envariabelgränsvärde som faktiskt existerar (det är lika med $\cos^2 \varphi$, om man tolkar det som att φ ska hållas konstant medan $\rho \rightarrow 0$, vilket uppenbarligen är vad som har gjorts i uträkningen). Och detta är ju nonsens, eller hur?

I ett sådant här fall vore det mycket bättre (enklare och tydligare) att visa icke-existensen direkt i de ursprungliga variablerna: om vi låter $f(x, y) = \frac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2}$ (för $(x, y) \neq (0, 0)$) så har vi t.ex. $f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1 \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$ och $f(0, y) = \frac{y^3}{y^2} = y \rightarrow 0$ då $y \rightarrow 0$, och eftersom $1 \neq 0$ så saknar $f(x, y)$ gränsvärde då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

I formuleringen av satsen om "nollgående gånger begränsad" ovan uppstår aldrig denna problematik, eftersom det bara talas om gränsvärden då $\rho \rightarrow 0$ för funktioner som beror *enbart* på ρ , inte på φ , och då rör det sig bara om helt vanliga envariabelgränsvärden där det inte råder någon oklarhet om tolkningen.

Kontinuitet

- De flesta källor definierar **kontinuitet** för flervariabelfunktioner såhär:

Definition 1. Funktionen f sägs vara kontinuerlig i punkten $\mathbf{a} \in D_f$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att följande implikation gäller:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} \in D_f \\ |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \end{array} \right\} \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon.$$

Men i Sjödins kompendier och Neymarks bok (liksom i envariabelboken av Forsling & Neymark) används en skenbart annorlunda definition istället:

Definition 2. Funktionen f sägs vara kontinuerlig i $\mathbf{a} \in D_f$ om ett av följande villkor gäller:

(1) \mathbf{a} är en hopningspunkt till D_f och $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$

eller

(2) \mathbf{a} är en isolerad punkt i D_f .

Dessa två definitioner säger dock faktiskt exakt samma sak, vilken man kan övertyga sig om genom att jämföra med definitionen av gränsvärde och tänka efter noga.

- Liksom i envarren säger man att funktionen f är **kontinuerlig** (rätt och slätt) ifall f är **kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd**. Och de motsvarande satserna gäller: summor, produkter, sammansättningar (etc.) av kontinuerliga funktioner blir kontinuerliga.
- Funktionen $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ som ges av

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

är kontinuerlig (i origo enligt vår gränsvärdesuträkning i Exempel 1 ovan, och även i alla andra punkter eftersom den där ges av ett rationellt uttryck). Däremot blir (enligt "icke-exemplet" ovan) funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ C, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

diskontinuerlig (i origo) oavsett vilket värde C som man försöker tilldela $f(0, 0)$.

- **Satsen om största och minsta värde.** Om K är en **kompakt** (dvs. **sluten och begränsad**) mängd i \mathbf{R}^n och $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ är en **kontinuerlig** funktion, så har f ett största och ett minsta värde (maximum och minimum), dvs. det finns $\mathbf{a} \in K$ och $\mathbf{b} \in K$ sådana att

$$\underbrace{f(\mathbf{a})}_{\min.} \leq f(\mathbf{x}) \leq \underbrace{f(\mathbf{b})}_{\max.} \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in K.$$

Redan i envariabelanalysen bör du ha sett enkla motexempel (med $n = 1$ förstås) som visar att satsen inte är sann om man tar bort någon av de tre förutsättningarna (att mängden är sluten, att mängden är begränsad, samt att funktionen är kontinuerlig).

(Skillnaden mellan denna kurs TATA69 och den lite större **TATA43**, är f.ö. bara att TATA43 innehåller ett avsnitt om **optimering på kompakta mängder** som går ut på att **beräkna** det största och minsta värdet, samt även lite om **optimering på icke-kompakta mängder** där man ska hitta max/min *om det finns*.)

Lektion 4

- Gränsvärden: 1.21.

Tips till 1.21e. Använd polära koordinater, men var noga med att visa att du verkligen får en nollgående faktor gånger något som är **begränsat**:

$$\frac{2x^3 - xy^2}{x^2 + y^2 - xy} = \frac{\rho^3(2\cos^3\varphi - \cos\varphi\sin^2\varphi)}{\rho^2(1 - \cos\varphi\sin\varphi)} = \underbrace{\rho}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{2\cos^3\varphi - \cos\varphi\sin^2\varphi}{1 - \cos\varphi\sin\varphi}}_{\text{begränsat?}}$$

Uppskattning av faktorn ifråga:

$$\left| \frac{2\cos^3\varphi - \cos\varphi\sin^2\varphi}{1 - \cos\varphi\sin\varphi} \right| = \frac{|2\cos^3\varphi - \cos\varphi\sin^2\varphi|}{|1 - \cos\varphi\sin\varphi|} \leq \frac{\text{något som garanterat är större än täljaren, t.ex. } 2 + 1 = 3}{\text{något positivt som garanterat är } \mathbf{mindre} \text{ än nämnaren, t.ex. vadå??}}$$

Ja, hur litet kan $1 - \cos\varphi\sin\varphi$ bli som minst, egentligen?

Tips till 1.21f. Notera att nämnaren $x^2 + y^2 - 2xy$ är lika med $(x - y)^2$, så funktionen är odefinierad längs linjen $y = x$. Detta är tillåtet; det betyder bara att vi ska ignorera punkterna på den linjen när vi undersöker gränsvärdet. Men metoden från e-uppgiften lär ju inte fungera, eftersom nämnaren inte kommer att kunna "uppskattas bort från noll". Istället kanske man börjar misstänka att gränsvärdet inte finns, eftersom man kan få nämnaren att komma så nära noll man vill genom att sätta in punkter nära linjen $y = x$. Vad händer om man närmar sig origo längs en kurva som tangerar linjen $y = x$ i origo (t.ex. parabeln $y = x + x^2$)?

- Mera gränsvärden: 1.22, 1.23ab, 1.24abc, 1.25, 1.26, 1.20a*, 1.27*.
- Kontinuitet: 1.28, 1.29, 1.30*.

Föreläsning 5. Tangentplan till funktionsyta $z = f(x, y)$. Differentierbarhet. Klassen C^1 .

- Sjödin: Avsnitt 3.2, 3.4, lite från avsnitt 3.3 (klassen C^1).
Neymark: Avsnitt 3.1, 3.3.
Persson & Böiers: Avsnitt 2.1, 2.2, 2.5, 2.7.
- Materialet om *differentiabler* kan läsas ganska översiktligt; det är ingen stor grej i denna kurs, men det kan vara bra att ha sett ifall man stöter på skrivsättet i någon tillämpad kurs, och det är med i några övningar.

Tangentplan till funktionsyta

- Betrakta en funktionsyta $z = f(x, y)$, och en viss punkt P på funktionsytan, med koordinaterna

$$(x, y, z) = (a, b, f(a, b)).$$

Vi söker ekvationen för det **plan** som **tangerar** funktionsytan i denna punkt P , förutsatt att ytan är tillräckligt slät, så att det *finns* något sådant plan.

(Ytor kan vara kantiga eller spetsiga eller konstiga på andra sätt, så att tangentplan saknas. T.ex. har ju konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ inget tangentplan i punkten $(0, 0, 0)$, alltså i spetsen. Jämför med envariabelanalysen, där den V-formade kurvan $y = \sqrt{x^2} = |x|$ inte har någon tangentlinje i punkten $(0, 0)$.)

- En ekvation av formen

$$z = z_0 + Ax + By$$

beskriver ett plan med lutning A i x -led, lutning B i y -led, och skärning med z -axeln i punkten $(0, 0, z_0)$.

- För att planet ska tangera ytan, se till att planets lutningar i x - och y -led överensstämmer med ytans lutningar i punkten P , genom att låta

$$A = f'_x(a, b), \quad B = f'_y(a, b),$$

och bestäm konstanttermen z_0 (dvs. justera planets läge i höjddled) så att planet går igenom punkten P , såhär:

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

$$\left(\underbrace{f(a, b) - f'_x(a, b)a - f'_y(a, b)b}_{=z_0} + \underbrace{f'_x(a, b)}_{=A}x + \underbrace{f'_y(a, b)}_{=B}y \right).$$

Notera att punkten $P = (a, b, f(a, b))$ verkligen uppfyller denna ekvation: när $x = a$ och $y = b$ blir ju parenteserna $x - a$ och $y - b$ noll, och då blir bara $z = f(a, b)$ kvar.

- Ovanstående formel ger alltså ekvationen för ytans tangentplan i punkten P , förutsatt att ytan *har* ett (icke-vertikalt) tangentplan där till att börja med. Ett enkelt villkor som garanterar existens av tangentplan är följande sats:

Om de **partiella derivatorna** $f'_x(x, y)$ och $f'_y(x, y)$ är **kontinuerliga** på en öppen mängd D så har ytan $z = f(x, y)$ ett tangentplan i punkten $(a, b, f(a, b))$ för varje $(a, b) \in D$.

En sådan funktion sägs vara av klass C^1 , eller tillhöra klassen C^1 , eller vara **kontinuerligt deriverbar**⁵, på mängden D . Beteckning:

$$f \in C^1(D).$$

Bokstaven C står för "kontinuerlig", och ettan står för att det är förstaderivatorna som ska vara kontinuerliga.

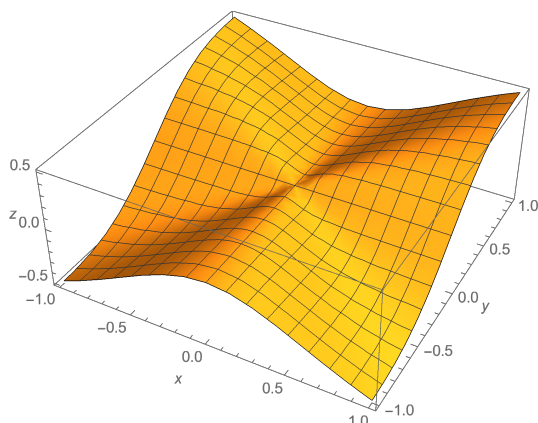
Ett exempel där funktionen är kontinuerlig och har partiella derivator, men ändå saknar tangentplan (i origo)

- Kom ihåg funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

som på Fö 4 visades vara **kontinuerlig**.

⁵Notera att *kontinuerligt deriverbar* alltså betyder att f är "deriverbar på ett kontinuerligt sätt", dvs. att *resultatet* av deriveringen blir kontinuerligt. Blanda inte ihop detta med " f är kontinuerlig och deriverbar", vilket är något helt annat.



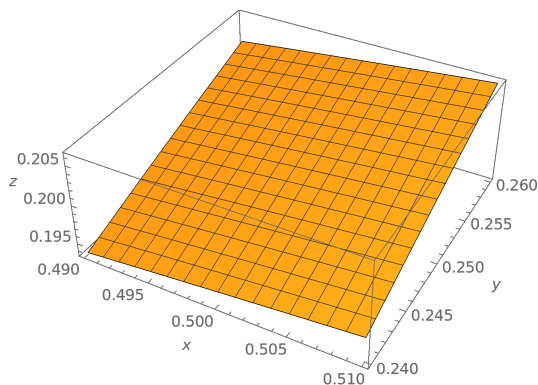
- Den är även **partiellt deriverbar** överallt. För $(x, y) \neq (0, 0)$ är det ju bara att räkna ut

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{och} \quad f'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

med kvotregeln för derivata, och eftersom f är konstant längs axlarna (nämligen lika med noll) så är f även partiellt deriverbar i punkten $(0, 0)$ med derivatorna

$$f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0.$$

- Om man **zoomar in** tillräckligt mycket i figuren, mot en punkt på funktionsytan vilken som helst utom origo, t.ex. mot den punkt där $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ och $z = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{5}$, så ser ytan nästan platt ut, dvs. den sammanfaller nästan med tangentplanet i den punkten:



- Men om vi **zoomar in mot origo** kommer det inte alls att börja likna ett plan, eller hur? Titta noga i figuren! Hur mycket man än zoomar kommer man aldrig ifrån att denna funktionsyta är "veckad" på ett lite mysigt sätt just kring origo. Ytans lutningar i x - och y -led i origo är $f'_x(0, 0) = 0$ och $f'_y(0, 0) = 0$, men det plan $z = 0 + 0x + 0y$ som man får från tangentplansformeln ovan ligger inte an mot ytan tillräckligt tätt i övriga riktningar för att det ska räknas som att det *tangerar* ytan i punkten $(0, 0, 0)$. Och inte blir det bättre om man provar plan $z = 0 + Ax + By$ med andra lutningar, för då blir det ju fel lutning i x - och/eller y -led. Alltså: **denna funktionsyta saknar tangentplan i origo.**

- I alla punkter utom origo har ytan tangentplan, eftersom **förstaderivatorna**

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

och

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

uppenbart är **kontinuerliga** funktioner på den öppna mängden $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dvs. planet minus origo. (De ges ju av rationella uttryck för $(x, y) \neq (0, 0)$.) Med andra ord är f av klass C^1 på den mängden, och detta var ju tillräckligt för att garantera existensen av tangentplan.

- Däremot är funktionen f'_y **diskontinuerlig i origo**. Om man sätter in $y = 0$ i uttrycket för f'_y finner man nämligen

$$f'_y(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2 - 0^2)}{(x^2 + 0^2)^2} = 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

dvs. precis i origo är funktionsytans lutning i y -led lika med noll, men i alla andra punkter på x -axeln är det 45 graders uppförslutning i y -led. (Du ser väl det i figuren om du tittar efter?) Om man går längs x -axeln och passerar origo kommer f'_y alltså att hoppa helt plötsligt från värdet 1 till värdet 0, och så omedelbart tillbaka till 1 igen. Typiskt diskontinuerligt beteende!

- Även funktionen f'_x är diskontinuerlig i origo. Kan du visa det? (Här räcker det inte att gå längs axlarna, utan man får närma sig origo längs någon annan rät linje.)
- En funktionsyta $z = f(x, y)$ har (ett icke-vertikalt) tangentplan i punkten $(a, b, f(a, b))$ om och endast om funktionen f är **differentierbar** i punkten (a, b) . Se definitionen nedan.

Funktionen i detta exempel är alltså differentierbar i alla punkter utom $(0, 0)$.

Differentierbarhet

- **Definition** av differentierbarhet för funktioner av **två variabler**:

Funktionen $f(x, y)$ sägs vara **differentierbar** i punkten (a, b) om (a, b) är en inre punkt i definitionsmängden D_f och det finns konstanter A och B sådana att funktionen

$$R(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

uppfyller

$$R(h, k) \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad (h, k) \rightarrow (0, 0). \quad (*)$$

- Ekvationen för $R(h, k)$ ovan är ekvivalent med

$$\underbrace{f(a+h, b+k) - f(a, b)}_{\substack{\text{differens mellan } f\text{:s värden} \\ \text{i två närliggande punkter} \\ \text{(om } h \text{ och } k \text{ är nära noll)}}} = \underbrace{Ah + Bk}_{\substack{\text{linjär approximation} \\ \text{av denna differens}}} + \underbrace{R(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}}_{\text{restterm}}$$

vilket ibland kallas för **differensformeln**.

Villkoret (*) betyder att "resttermen är av högre ordning än de linjära termerna", vilket är ett rimligt krav att ställa om den linjära approximationen ska kunna betraktas som "bra" när $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

- Att funktionen f är **differentierbar** i (a, b) betyder med andra ord att f kan **approximeras "bra" med hjälp av en linjär funktion** $L(h, k) = Ah + Bk = (A \ B) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ nära (a, b) .

Den **geometriska tolkningen** är att ytan $z = f(x, y)$ har ett icke-vertikalt **tangentplan** i punkten $(x, y, z) = (a, b, f(a, b))$, nämligen det plan som ges av högerledet i approximationen $f(a+h, b+k) \approx f(a, b) + Ah + Bk$:

$$z = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b).$$

- För funktioner av n variabler blir det såhär:

Funktionen f sägs vara differentierbar i punkten $\mathbf{a} \in (D_f)^0$ om det finns konstanter A_1, \dots, A_n sådana att

$$R(\mathbf{h}) = \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^n A_i h_i}{|\mathbf{h}|} \rightarrow 0$$

då $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$.

Och differensformeln blir då förstås

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n A_i h_i + R(\mathbf{h}) |\mathbf{h}|, \quad \text{där } \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} R(\mathbf{h}) = 0.$$

Uttrycket för $R(\mathbf{h})$ ovan är odefinierat för $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, men vi kan sätta $R(\mathbf{0}) = 0$ så att R blir kontinuerlig i $\mathbf{0}$, och differensformeln gäller då för alla \mathbf{h} (sådana att $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in D_f$), inte bara för $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$.

- För $n = 1$ är differentierbarhet samma sak som vanlig deriverbarhet från envariabelanalysen. Man säger ju att funktionen $f(x)$ är deriverbar i punkten $x = a$ om och endast om a är en inre punkt i D_f och differenskvoten $(f(a+h) - f(a))/h$ har ett gränsvärde A då $h \rightarrow 0$ (nämligen derivatan $A = f'(a)$). Detta är samma sak som att säga att det finns ett tal A sådant att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - A \right) = 0,$$

vilket är ekvivalent med att det finns ett A sådant att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{|h|} = 0,$$

och detta är precis specialfallet $n = 1$ av den allmänna definitionen av differentierbarhet ovan.

- Sats.** Om f är differentierbar i \mathbf{a} så är f kontinuerlig i \mathbf{a} och partiellt deriverbar i \mathbf{a} , och konstanterna A_i i definitionen av differentierbarhet är entydigt bestämda – de är lika med de partiella derivatorna i punkten \mathbf{a} :

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Bevis. För att visa kontinuitet, låt $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ i differensformeln. För att visa partiell deriverbarhet, sätt $\mathbf{h} = t \mathbf{e}_i = (0, \dots, t, \dots, 0)$ i differensformeln, dividera båda led med t , och låt $t \rightarrow 0$.

- Detta ger följande ”**recept**” för differentierbarhetsundersökning, som man kan använda ifall man någon gång behöver falla tillbaka på definitionen (t.ex. för att f inte är av klass C^1):

- Undersök om funktionen f är kontinuerlig i \mathbf{a} .
Om den inte är det, så är den inte differentierbar i \mathbf{a} heller.
- Om f är kontinuerlig i \mathbf{a} , gå vidare och beräkna de partiella derivatorna i \mathbf{a} .
Om någon av dem inte existerar, så är f inte differentierbar i \mathbf{a} .
- Om de partiella derivatorna existerar, gå vidare och undersök gränsvärdet

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\mathbf{a}) h_i}{|\mathbf{h}|}.$$

Om detta gränsvärde existerar och är lika med noll, så är f differentierbar i \mathbf{a} , annars inte.

- Låt oss testa detta på vårt exempel ovan, för att verifiera att den funktionen verkligen inte är differentierbar i punkten $(a, b) = (0, 0)$ (vilket vi ju tidigare tyckte oss se i grafen, eftersom det inte fanns något tangentplan i origo).

Steg 1 och 2 går bra, de partiella derivatorna i origo är noll, och vi ska i steg 3 undersöka

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f'_x(a, b)h - f'_y(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)h - f'_y(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^2 k}{h^2 + k^2} - 0 - 0h - 0k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 k}{(h^2 + k^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Men detta gränsvärde existerar inte, eftersom uttrycket är noll längs axlarna men lika med $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ i alla punkter $(h, k) = (t, t)$ med $t > 0$. Så påståendet stämmer, f är **inte** differentierbar i origo.

- Vi har redan ett par gånger nämnt följande sats (som Sjödin formulerar utan bevis):

Sats. Om $f \in C^1(D)$, där D är en öppen mängd i \mathbf{R}^n , så är f differentierbar på D .

Detta är en omedelbar konsekvens av följande lite starkare sats (som bevisas här nedan):

Sats. Om en av f 's partiella förstaderivator existerar i punkten $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, och de övriga $n - 1$ partiella förstaderivatorna existerar i en omgivning till \mathbf{a} och är kontinuerliga i \mathbf{a} , så är f differentierbar i \mathbf{a} .

Bevisidé. Antag för enkelhets skull att f beror på bara två variabler x och y (dvs. att $n = 2$), och att f'_y är den förstaderivata som vi bara antar existerar i punkten (a, b) , medan den andra förstaderivatan f'_x uppfyller den starkare förutsättningen att den existerar i en omgivning till (a, b) och är kontinuerlig i (a, b) .

Vi vill visa att skillnaden

$$f(a+h, b+k) - f(a, b)$$

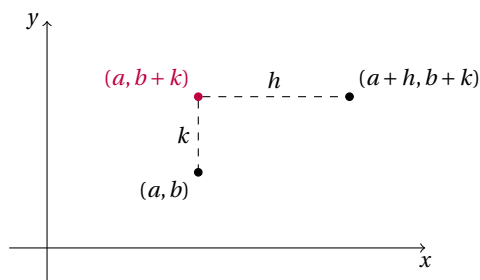
är lika med

$$f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k + F(h, k)$$

där feltermen $F(h, k)$ går mot noll så snabbt att $R(h, k) = \frac{F(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, eller med andra ord " $F(h, k)$ går mot noll snabbare än $\sqrt{h^2 + k^2}$ ".

Vi skriver om uttrycket genom att lägga till och dra ifrån en term:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \underbrace{f(a+h, b+k) - f(a, b+k)}_{(1)} + \underbrace{f(a, b+k) - f(a, b)}_{(2)}.$$



Uttryck (2) är ungefär lika med $f'_y(a, b) \cdot k$ när k är nära noll, enligt grundläggande envariabelanalys tillämpad på funktionen $y \mapsto f(a, y)$. Och på samma sätt är uttryck (1) lika med $f'_x(a, b+k) \cdot h$ så när som på ett litet fel; här är ju derivatan f'_x evaluerad "i fel punkt", men eftersom f'_x enligt förutsättning är *kontinuerlig* i (a, b) bör man kunna approximera detta med $f'_x(a, b) \cdot h$, där derivatan är evaluerad i rätt punkt, till priset av att man får ytterligare ett litet fel bara.

Så uttryck (1) och uttryck (2) ihop borde vara ungefär lika med $f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k$, med en avvikelse $F(h, k)$ som förhoppningsvis går mot noll snabbare än $\sqrt{h^2 + k^2}$.

Riktigt bevis. För enkelhets skull fortsätter vi att anta att $n = 2$; det allmänna fallet bevisas på likartat sätt. För att göra ovanstående skiss till ett riktigt bevis måste man naturligtvis hålla noggrant reda på storleken hos felet $F(h, k)$, så att man ser att det går mot noll tillräckligt snabbt.

För detta syfte är det bekvämt att använda **medelvärdessatsen för derivator** från envariabelanalysen, tillämpad på funktionen $x \mapsto f(x, b+k)$, och säga att uttryck (1) är *exakt* lika med $f'_x(a+\theta h, b+k) \cdot h$ för något tal θ sådant att $0 \leq \theta \leq 1$. (Här används förutsättningen att f'_x existerar i en omgivning till (a, b) , och vi antar förstås att (h, k) är tillräckligt nära $(0, 0)$ för att sträckan mellan $(a, b+k)$ och $(a+h, b+k)$ ska ligga i denna omgivning.)

Och uttryck (2) kan skrivas om med differensformeln för $n = 1$, tillämpad på funktionen $y \mapsto f(a, y)$, som är deriverbar i punkten $y = b$ enligt förutsättningen att $f'_y(a, b)$ existerar:

$$f(a, b+k) - f(a, b) = f'_y(a, b) \cdot k + \widehat{R}(k) \cdot k,$$

där $\widehat{R}(0) = 0$ och \widehat{R} är kontinuerlig i 0. (Differensformeln säger $\widehat{R}(k) \cdot |k|$ om man läser ordagrant, men vi kan ta bort beloppet och byta tecken på $\widehat{R}(k)$ för $k < 0$ istället.)

Uttryck (1) och (2) ihop är alltså

$$\underbrace{f'_x(a+\theta h, b+k) \cdot h}_{(1)} + \underbrace{(f'_y(a, b) + \widehat{R}(k)) \cdot k}_{(2)}$$

vilket avviker från det önskade uttrycket $f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k$ med felet

$$F(h, k) = (f'_x(a+\theta h, b+k) - f'_x(a, b)) \cdot h + \widehat{R}(k) \cdot k.$$

Detta ger att uttrycket

$$R(h, k) = \frac{F(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \underbrace{(f'_x(a+\theta h, b+k) - f'_x(a, b))}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}}_{\text{begr.}} + \underbrace{\widehat{R}(k)}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}}_{\text{begr.}}$$

går mot noll då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, vilket skulle visas. (Den första faktorn som går mot noll gör det på grund av förutsättningen att f'_x är kontinuerlig i (a, b) , och faktorerna som är begränsade är det därför att deras belopp är högst 1; polära koordinater i hk -planet ger ju $\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \cos \varphi$ och $\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sin \varphi$.)

Lektion 5

- Uträkning av partiella derivator: 2.4, 2.6a*.
- Beräkning av tangentplan till en *funktionsyta* för en tvåvariabelfunktion, $z = f(x, y)$: 2.12.
Här är det meningen att man ska använda formeln $z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b)$. Senare i kursen kommer ett allmännare fall, nämligen tangentplan till en *nivåyta* för en trevariabelfunktion, $g(x, y, z) = C$, där man använder gradienten ∇g istället.
- Partiell deriverbarhet medför ej kontinuitet: 2.5.

- Differentierbarhet: 2.17, 2.18*.
- Apropå klassen C^1 : K10*.
(Ytterligare exempel på hur en partiell derivata kan *existera* överallt utan att *vara kontinuerlig* överallt.)
- Differential, linjär approximation, feluppskattning: 2.13, 2.14, 2.16*.

Föreläsning 6. Kurvor och ytor på parameterform. Funktionalmatris. Kedjeregeln.

- Sjödin: Avsnitt 1.3, 7.1, 7.2, 4.1, 4.2.
Neymark: Avsnitt 1.4, 3.4, 3.6.
Persson & Böiers: Avsnitt 2.3, 3.1–3.3.
- Kurva på parameterform: $(x(t), y(t))$ i planet, $(x(t), y(t), z(t))$ i rummet.
Derivering med avseende på t ger en vektor som (om den inte är nollvektorn) är en tangentvektor till kurvan (i den punkt som parametern t anger).
Jämför med mekanikkurserna: Om $\mathbf{r} = (x, y, z)$ är positionen för en partikel som funktion av tiden t , så är $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$ hastighetsvektorn, som ju är tangentiell till den kurva som partikeln färdas längs. Och andraderivatan $\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = (\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2})$ är accelerationen, men det kommer vi inte att se mycket av här i denna kurs.
- Yta på parameterform: $(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$.
Partiell derivering med avseende på s resp. t ger två tangentvektorer till ytan (i den punkt som parametrarna s och t anger). Dessa två vektorer spänner upp ytans tangentplan om de är linjärt oberoende, och deras kryssprodukt ger en normalvektor till tangentplanet.
- En yta på parameterform är ett exempel på en vektorvärd funktion, i detta fall en avbildning från \mathbf{R}^2 till \mathbf{R}^3 , eftersom indata $(s, t) \in \mathbf{R}^2$ ger utdata $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.
De $3 \cdot 2 = 6$ olika partiella derivatorna kan samlas i en 3×2 -matris, som kallas för avbildningens **funktionalmatris**:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

För att minnas hur man ska ställa upp matrisen, skriv avbildningen med en funktion på varje rad:

$$\begin{aligned} x &= x(s, t), \\ y &= y(s, t), \\ z &= z(s, t). \end{aligned}$$

På första raden står här funktionen $x(s, t)$, och i den första raden i matrisen sätter man de två partiella derivatorna av den funktionen, i samma ordning som variablerna är uppräknade, alltså först derivatan med avseende på den första variabeln s , sedan derivatan med avseende på den andra variabeln t . Och i rad 2 och 3 i matrisen gör man samma sak, fast med y resp. z .

En avbildning från \mathbf{R}^n till \mathbf{R}^m har på samma sätt en funktionalmatris av storlek $m \times n$. Om indata heter $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ och utdata heter $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ så betecknas funktionalmatrisen med

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)},$$

och elementet på plats (i, j) är $\partial y_i / \partial x_j$.

Eller så kallar man helt enkelt matrisen för avbildningens **derivata**, och betecknar den med $\mathbf{y}'(\mathbf{x})$.

- Den allmänna versionen av **kedjeregeln**:

Funktionalmatrisen för en sammansatt avbildning är matrisprodukten av de individuella funktionalmatriserna.

Dvs. om $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x}(t))$ så är

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}.$$

- Men låt oss börja med den enklaste icke-triviala specialfallet av kedjeregeln i flera variabler:

Om variabeln z beror på variablerna x och y , som i sin tur beror på variabeln t , så är

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Detta skrivsätt är intuitivt tilltalande, eller hur? Ifall vi tänker oss att t :s värde ändras med ett "infinitesimalt litet tal" dt , så medför det ju att värdena på x och y ändras med $dx = \frac{dx}{dt} dt$ resp. $dy = \frac{dy}{dt} dt$ (enligt envariabelanalysen). Dessa ändringar sätter igång en kedjereaktion där även z ändras: ändringen av x -värdet gör att z ändras med $\frac{\partial z}{\partial x} dx$, och ändringen av y -värdet gör att z ändras med $\frac{\partial z}{\partial y} dy$; den sammanlagda ändringen (förutsatt att funktionen $z(x, y)$ är differentierbar) blir summan av dessa två bidrag:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt.$$

Och sedan är det bara att dela med dt . (Detta är inget rigoröst bevis, men det innehåller ändå den väsentliga idén bakom beviset.)

- Högerledet kan skrivas som en skalärprodukt:

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \partial z / \partial x \\ \partial z / \partial y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \nabla z \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

De partiella derivatorna som står i gradienten ∇z innehåller information om hur ytan $z = z(x, y)$ lutar, dvs. de beskriver förändringstakten per längdenhet för funktionen $z(x, y)$ i olika riktningar; om man tar ett litet steg Δx i x -led, så ändrar sig z ungefär med $z'_x \Delta x$.

Och om variabeln t står för "tid", så är beskriver parameterkurvan $(x(t), y(t))$ en rutt "på kartan", dvs. i xy -planet, medan den sammansatta funktionen $z(t) = z(x(t), y(t))$ säger "på vilken höjd i terrängen" vi befinner oss vid tiden t .

Enligt formeln ovan är alltså förändringstakten per tidsenhet för höjden $z(t)$ lika med gradienten för funktionen $z = z(x, y)$ skalärmultiplikerad med hastighetsvektorn för parameterkurvan $(x(t), y(t))$.

- Man kan också skriva det som en matrisprodukt, om man vill se att det verkligen blir ett specialfall av kedjeregelsformeln med funktionalmatriser.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} dz \\ dt \end{pmatrix}}_{1 \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial z \\ \partial x & \partial z \\ \partial y \end{pmatrix}}_{1 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dt \end{pmatrix}}_{2 \times 1}.$$

(Anledningen till att derivatorna d/dt är skrivna med vanligt rakt d här är att de är vanliga envariabelderivator; funktionerna ifråga beror ju bara på en enda variabel t . Om man tycker att detta bryter mönstret för hur man brukar skriva funktionalmatriser så skulle man väl kunna skriva dem som $\partial/\partial t$ också, utan att det egentligen vore fel.)

- Även om ovanstående skrivsätt ofta är praktiskt, kan det i vissa lägen leda till svårartad förvirring, eftersom man använder samma symboler för de **storheter** som varierar (dvs. "variablerna") och för de **funktioner** som talar om hur storheterna beror på varandra. (T.ex. är " dz/dt " och " $\partial z/\partial x$ " derivator av två *olika* funktioner " $z(t)$ " och " $z(x, y)$ " som båda betecknats med samma bokstav " z " som den storhet vars värde de beskriver.) Dessutom står det inte heller i vilka punkter derivatorna ska evalueras.

Ifall man vill vara noggrannare med notationen bör man införa en namngiven funktion, säg α , som talar om hur storheten x beror på storheten t , alltså $x = \alpha(t)$ istället för $x = x(t)$, och likadant för de andra variablerna. Detta kan göra att det blir lite mer svårläst, men det kan också vara av ovärderlig hjälp för att reda ut förvirrande situationer (t.ex. i uppgift 2.40).

Såhär ser samma kedjeregeln ut om man gör så, och dessutom tar med de exakta förutsättningarna:

Sats. Låt $g(t)$ vara den sammansatta funktion⁶ som fås genom att i funktionen $f(x, y)$ sätta in $x = \alpha(t)$ och $y = \beta(t)$:

$$g(t) = f(\alpha(t), \beta(t)).$$

Derivatans av denna sammansatta funktion är

$$g'(t_0) = f'_x(\alpha(t_0), \beta(t_0)) \alpha'(t_0) + f'_y(\alpha(t_0), \beta(t_0)) \beta'(t_0)$$

för varje t_0 sådant att α och β är deriverbara i punkten t_0 och f är differentierbar i punkten $(\alpha(t_0), \beta(t_0))$.

- Om z beror på n variabler (x_1, \dots, x_n) som beror på t , så får man på samma sätt

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}.$$

Och den allmänna kedjeregeln för en sammansatt avbildning där (z_1, \dots, z_p) beror på (x_1, \dots, x_n) som beror på (t_1, \dots, t_q) följer direkt av detta. När man beräknar $\partial z_i / \partial t_j$ är det ju bara en enda funktion man deriverar, nämligen z_i , och det är bara en enda variabel som man varierar, nämligen t_j (övriga t -variabler hålls konstanta), så derivatan ges av samma formel, fast med z_i istället för z , och t_j istället för t , och partiell derivata istället för ordinär derivata (om $q \geq 2$):

$$\frac{\partial z_i}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t_j}.$$

Vänsterledet här är per definition (i, j) -elementet i funktionsmatrisen

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{t}},$$

och högerledet är (i, j) -elementet i matrisprodukten

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{t}},$$

enligt formeln $(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$ som ju är definitionen av matrisprodukt.

⁶Om man ska vara ännu noggrannare så är egentligen *namnet* på den sammansatta funktionen bara " g ", inte " $g(t)$ " som ju betecknar denna funktions *värde* i punkten t . Om man på renast möjliga sätt vill skriva hur funktionen g bildas genom att sätta samman funktionerna f , α och β , utan att behöva blanda in de *punkter* där dessa funktioner ska evalueras, kan man göra det såhär:

$$g = f \circ (\alpha \times \beta).$$

Ringens betyder som vanligt sammansättning, och krysset betecknar här mängdlärans s.k. *kartesiska produkt*, som tar två tal och bildar ett talpar av dem, dvs. $\alpha \times \beta$ betyder den funktion som ges av $(\alpha \times \beta)(t) = (\alpha(t), \beta(t))$. Kedjeregeln säger då att

$$g' = (f'_x \circ (\alpha \times \beta)) \alpha' + (f'_y \circ (\alpha \times \beta)) \beta'.$$

I programmeringsvärlden kallas detta slags skrivsätt för **pointfree style** (eller lite elakare *pointless style*!).

- En följd av kedjeregeln är att om avbildningen $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ från \mathbf{R}^n till \mathbf{R}^n är inverterbar, med invers $\mathbf{x}(\mathbf{y})$, så är funktionalmatriserna varandras matrisinverser, dvs.

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = I$$

där I är enhetsmatrisen av storlek $n \times n$.

Bevis: Derivera sambandet $\mathbf{y}(\mathbf{x}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$ med avseende på \mathbf{y} .

(Om du tycker att detta är förvirrande, lyd rådet ovan och ge namn åt funktionerna, så att avbildningen heter $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ och inversen heter $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$, och derivera sambandet $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$ med avseende på \mathbf{y} , dvs. räkna ut funktionalmatrisen av båda led. Detta ger $\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \mathbf{g}'(\mathbf{y}) = I$, vilket är vad skrivsättet $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = I$ egentligen betyder.)

- Ifall funktionalmatrisen är kvadratisk ($n \times n$) så har den en determinant, som föga förvånande kallas för **funktionaldeterminanten** för avbildningen. Den brukar skrivas med rakt d , till skillnad från själva matrisen som ju skrivs med svängt ∂ . Sådär:

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} = \frac{d(y_1, \dots, y_n)}{d(x_1, \dots, x_m)} \stackrel{\text{def.}}{=} \det \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right).$$

Detta skrivsätt är kanske inte världshistoriens mest pedagogiska påhitt. Dessutom är det inte en universell konvention; i vissa böcker används t.ex. $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$ för att beteckna determinanten istället för matrisen, så se upp!

Lektion 6

- Kurvor på parameterform: 3.1ac, 3.2ac.
- Yta på parameterform: 3.4.
- Uträkning av funktionalmatris och funktionaldeterminant: 3.6.
- Funktionalmatris och -determinant för **linjär** avbildning: 3.7.
- Grundläggande användning av kedjeregeln: 2.19, 2.20, 2.21.
- Några saker att se upp med angående notation för partiella derivator: 2.23.
- Diverse kluringar: 2.28*, 2.39*, 2.40*.

Föreläsning 7. Riktningderivata. Tolkning av gradient. Tangentlinje till nivåkurva $f(x, y) = C$. Tangentplan till nivåyta $f(x, y, z) = C$.

- Sjödin: Kapitel 5.
Neymark: Avsnitt 3.5.
Persson & Böiers: Avsnitt 2.4.
- **Riktningderivata** med avseende på en enhetsvektor \mathbf{v} i en punkt \mathbf{a} :

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = \left[\frac{d}{dt} f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \right]_{t=0}.$$

Specialfall: När $\mathbf{v} = \mathbf{e}_k$, där $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ betecknar standardbasen i \mathbf{R}^n , så är $f'_{\mathbf{v}}$ samma sak som den partiella derivatan f'_{x_k} .

- Obs. att vi kräver att vektorn \mathbf{v} i denna definition ska vara en **enhetsvektor** (dvs. **normerad**, längden ska vara **ett**), eftersom dess jobb bara är att peka ut en *riktning*.

Man skulle i princip kunna sätta in t.ex. en vektor \mathbf{v} av längd två i formeln ovan, men då skulle värdet som man får bli dubbelt så stort, jämfört med om man sätter in en enhetsvektor. Detta är inte önskvärt ifall man vill att riktningsderivatan bara ska mäta funktionens "ändringstakt per längdenhet", så som de vanliga partiella derivatorna gör.

Om man t.ex. talar om "riktningsderivatan i riktning $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ " är det alltså underförstått att det är riktningsderivatan i den normerade riktningen $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ som avses.

- Ifall f är differentierbar så ges riktningsderivatan (enligt kedjeregeln) av **skalärprodukten mellan gradienten och riktningsvektorn**,

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v},$$

och detta är den formel man normalt använder för att räkna ut riktningsderivata. Definitionen av skalärprodukt ger

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = |\nabla f(\mathbf{a})| \underbrace{|\mathbf{v}|}_{=1} \cos \varphi,$$

där φ är vinkeln mellan \mathbf{v} och $\nabla f(\mathbf{a})$, och detta uttryck blir som störst om man väljer vektorn \mathbf{v} så att $\cos \varphi = 1$, dvs. $\varphi = 0$, dvs. att \mathbf{v} pekar i samma riktning som $\nabla f(\mathbf{a})$. Av detta följer att **gradientens riktning** är den riktning i vilken funktionen växer som snabbast, och att **gradientens belopp** är tillväxthastigheten i just den riktningen, dvs. den största möjliga riktningsderivatan.

- Om man inte normerar vektorn \mathbf{v} måste man kompensera för detta genom att istället använda formeln

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

- Gradienten ∇f är **vinkelrät mot nivå mängder** till f , förutsatt att f är "tillräckligt snäll".

Detta gör det mycket enkelt att beräkna tangentlinjen till den nivåkurva för $f(x, y)$ som går genom punkten $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, förutsatt att $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$, eftersom formeln $\mathbf{n} = \nabla f(a, b)$ ger en nollskild normalvektor; en ekvation på normalform för tangentlinjen blir därmed

$$f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) = 0.$$

Och en ekvation för tangentplanet till nivåytan för $f(x, y, z)$ genom punkten $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ ges på motsvarande sätt av

$$f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + f'_z(a, b, c)(z - c) = 0.$$

Egenskapen att $\nabla f(\mathbf{a})$ är vinkelrät mot f :s nivå mängd genom \mathbf{a} kan intuitivt förstås genom att begrunda fallet $\varphi = \pi/2$ i formeln $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = |\nabla f(\mathbf{a})| \cos \varphi$ ovan. För att bevisa det ordentligt behöver man veta att nivå mängden går att skriva som en kurva/yta på parameterform, och det vet vi inte förrän vi har kommit till implicita funktionssatsen på Fö 12.

Lektion 7

(Obs! Det är ganska många uppgifter på denna lektion. Räkna med att det tar en del tid att komma igenom allihop.)

- Rita nivåkurvor och gradienter: 2.43. (Jfr. uppg. K9.)
- Riktningsderivata: 2.55, 2.56, 2.57ab, 2.58, 2.59*, 2.60*.
- Tolkning av gradient i två resp. tre dimensioner: 2.54.
(Bra test av förståelsen! Man ser ofta missförstånd angående det som behandlas i denna uppgift.)

- Blandade geometriuppgifter i två dimensioner (tangentiallinjer m.m.): 2.44, 2.45, 2.46, 2.48.

Kom ihåg hur **ekvationen för en linje i planet** ser ut:

$$Ax + By = C,$$

där $\mathbf{n} = (A, B)$ är en normalvektor till linjen.

Tips till 2.44. Undvik att använda orden "tangent" och "normal", eftersom detta kan leda till total förvirring! Säg istället "tangentiallinje", "tangentialvektor", "riktningsvektor", "normallinje", "normalvektor", så att det är tydligt vad som avses. Och precisera även genom att säga t.ex. "tangentiallinjen till kurvan C i punkten P " istället för bara "tangentiallinjen", om det inte är uppenbart från sammanhanget *vilken* tangentiallinje som avses.

T.ex. i denna uppgift: för att bestämma ekvationen för den givna kurvans normallinje i den givna punkten kan man behöva normalvektorn till denna normallinje, och denna får man genom 90 graders vridning av normalvektorn till kurvans tangentiallinje i samma punkt.

Tips till 2.45. Kalla den okända tangeringspunkten för (a, b) och ställ upp två villkor som (a, b) måste uppfylla. För att förstå vad som händer i denna uppgift är det till god hjälp om man kan rita en bra figur som visar hur ellipsen $x^2 + xy + y^2 = 1$ ser ut. Detta kan göras med basbytesmaskineriet från kursen i linjär algebra, men man kan också klara sig utan i det här fallet, om man gör såhär:

- För det första, varför *är* det en ellips? Det är en nivå mängd till ett andragrads polynom, så det måste vara en ellips, hyperbel, parabel, eller möjligen unionen av två linjer, eller en enda linje, eller en punkt, eller tomma mängden. Men omskrivningen

$$(x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$$

visar att det är en ellips, antingen för att man ser att kurvan motsvarar enhetscirkeln $u^2 + v^2 = 1$ under det linjära variabelbytet $u = x + \frac{1}{2}y$, $v = \frac{\sqrt{3}}{2}y$, eller för att det visar att vänsterledet är en *positivt definit* kvadratisk form, och man vet från kursen i linjär algebra att sådana har ellipser som nivåkurvor.

- Ekvationen är symmetrisk med avseende på omkastning av x och y , så linjen $y = x$ måste vara en symmetrilinje för ellipsen, dvs. den ena axeln måste ligga längs den linjen.
 - Axlarna i en ellips är vinkelräta, så den andra axeln ligger längs linjen $y = -x$.
 - För att se hur långt ut på dessa linjer som axlarna går, sätt in (t, t) resp. $(t, -t)$ i ellipsens ekvation och lös ut t .
 - Och man kan som extra stöd för ritandet lätt se att punkterna $(\pm 1, 0)$ och $(0, \pm 1)$ ligger på ellipsen, eftersom de satisfierar dess ekvation.
- Blandade geometriuppgifter i tre dimensioner (tangentialplan m.m.): 2.49, 2.50, 2.51, 2.52.

Kom ihåg hur **ekvationen för ett plan i rummet** ser ut:

$$Ax + By + Cz = D,$$

där $\mathbf{n} = (A, B, C)$ är en normalvektor till planet.

Föreläsning 8. Klassen C^k . Potential till vektorfält. Variabelbyte i PDE med hjälp av kedjeregeln.

- Sjödin: Avsnitt 3.3, 3.5, 4.3.
Neymark: Avsnitt 3.1, 3.2, 3.4.
Persson & Böiers: Avsnitt 2.5, delar av avsnitt 9.4.

Funktioner av klass C^k

- Låt D vara en öppen mängd i \mathbf{R}^n , och låt $k \geq 1$ vara ett heltal.

Man säger att $f \in C^k(D)$ om alla f 's partiella derivator av ordning k och lägre existerar och är kontinuerliga i varje punkt i D . Synonym: f är k gånger kontinuerligt deriverbar på D .

Och man säger att $f \in C^\infty(D)$ om $f \in C^k(D)$ för varje k . Synonym: f är oändligt deriverbar på D .

- Att f är kontinuerlig på D skrivs $f \in C^0(D)$ eller $f \in C(D)$. (Här krävs inte att mängden D är öppen.)
- Klasserna C^k för $k \geq 1$ ligger inkapslade i varandra som ryska dockor (eftersom definitionen säger "och lägre"), och klassen av differentierbara funktioner ligger mellan klasserna C^0 och C^1 (enligt satserna " C^1 medför differentierbar" och "differentierbar medför kontinuerlig"):

$$C^0(D) \supset \{\text{funktioner som är diff. bara på } D\} \supset C^1(D) \supset C^2(D) \supset C^3(D) \supset \dots \supset C^\infty(D).$$

- De flesta funktioner som ni kommer att se i denna kurs (såvida de inte innehåller absolutbelopp, falluppdelning eller liknande) tillhör uppenbart den "snällaste" klassen C^∞ , eftersom man kan använda vanliga deriveringsregler för att derivera hur många gånger som helst.
- Sats.** Antag, för något visst indexpar (i, j) med $i \neq j$, att de blandade andraderivatorna $f''_{x_i x_j}$ och $f''_{x_j x_i}$ existerar i en omgivning till \mathbf{a} och är kontinuerliga i \mathbf{a} . Då är $f''_{x_i x_j}(\mathbf{a}) = f''_{x_j x_i}(\mathbf{a})$.

Följsats. Om $f \in C^2(D)$ så är $f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}$ på D för alla i och j .

(Clairauts sats, "för C^2 -funktioner är blandade andraderivator lika".)

Bevis. Bara de två variablerna x_i och x_j är inblandade i påståendet, så vi kan anta att vi har en funktion $f(x, y)$ av två variabler, och vi kallar punkten för (a, b) istället för \mathbf{a} . Eftersom f''_{xy} och f''_{yx} existerar i en omgivning till (a, b) gör även f , f'_x och f'_y det. Låt

$$g(h, k) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b).$$

Då är

$$g(h, k) = \varphi(a+h) - \varphi(a), \quad \text{där} \quad \varphi(x) = f(x, b+k) - f(x, b).$$

Enligt medelvärdessatsen för derivator, först tillämpad med avseende på x och sedan på avseende på y , finns det tal $\theta_1 \in [0, 1]$ och $\theta_2 \in [0, 1]$ (som får bero på h och k) sådana att

$$\begin{aligned} g(h, k) &= \varphi(a+h) - \varphi(a) \\ &= \varphi'(a+\theta_1 h) \cdot h \\ &= (f'_x(a+\theta_1 h, b+k) - f'_x(a+\theta_1 h, b)) \cdot h \\ &= f''_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) \cdot k \cdot h. \end{aligned}$$

På grund av antagandet att f''_{xy} är kontinuerlig i (a, b) medför detta att

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{g(h, k)}{hk} = f''_{xy}(a, b).$$

Men på grund av symmetrin i uttrycket för g kan man lika gärna låta variablerna byta roller, dvs. skriva

$$g(h, k) = \psi(b+k) - \psi(b), \quad \text{där} \quad \psi(y) = f(a+h, y) - f(a, y),$$

så att medelvärdessatsen ger oss tal $\omega_1 \in [0, 1]$ och $\omega_2 \in [0, 1]$ sådana att

$$\begin{aligned} g(h, k) &= \psi'(b+\omega_2 k) \cdot k \\ &= (f'_y(a+h, b+\omega_2 k) - f'_y(a, b+\omega_2 k)) \cdot k \\ &= f''_{yx}(a+\omega_1 h, b+\omega_2 k) \cdot h \cdot k, \end{aligned}$$

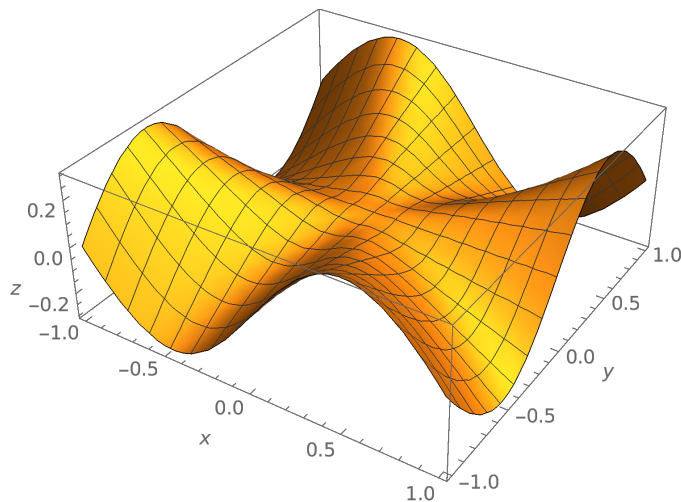
och alltså

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{g(h,k)}{hk} = f''_{yx}(a,b),$$

eftersom även f''_{yx} antogs vara kontinuerlig i (a,b) . Så $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$, vilket skulle visas.

- Här är ett klassiskt exempel på en två gånger partiellt deriverbar funktion som *inte* tillhör klass C^2 på hela \mathbf{R}^2 :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$



Utmaning: Kan du se i grafen att

$$f''_{xy}(0,0) < 0, \quad f''_{yx}(0,0) > 0,$$

dvs. att $f''_{xy} = f''_{yx}$ *inte* gäller i origo? Kan du med uträkning visa att $f''_{xy}(0,0) = -1$ och $f''_{yx}(0,0) = 1$? Dock gäller $f''_{xy} = f''_{yx}$ i alla andra punkter, eftersom f *uppenbart* (eller hur?) är av klass C^∞ (och därmed även av klass C^2) på mängden $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

- Upprepad användning av Clairauts sats visar att om f är av klass C^k (där $k \geq 2$) så är deriveringsordningen oväsentlig för blandade derivator av ordning k (och lägre).

Så för $f(x,y,z) \in C^3$ gäller t.ex.

$$f'''_{xyz} = f'''_{xzy} = f'''_{yxz} = f'''_{yzx} = f'''_{zxy} = f'''_{zyx}$$

och

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}.$$

Bestämning av potential

- En flervariabelmotsvarighet till att hitta **primitiv funktion** är att bestämma en funktion $f(\mathbf{x})$ vars partiella derivator är givna:

$$\begin{aligned} f'_{x_1} &= (\dots), \\ f'_{x_2} &= (\dots), \\ &\vdots \\ f'_{x_n} &= (\dots). \end{aligned}$$

Detta är ett vanligt problem i fysik och kallas att hitta en **potential till ett vektorfält**. Den sökta funktionen f (eller ibland $-f$) är det som kallas för *potentialen*, och de givna funktionerna i högerleden, om man sätter ihop dem till en vektor, utgör *vektorfältet*.

- Det finns en **systematisk** metod för att bestämma alla potentialer (eller visa att det inte finns någon):

- Integrera **en** av ekvationerna, t.ex. den sista:

$$\begin{aligned} f'_{x_n}(x_1, \dots, x_n) &= (\text{något givet uttryck}) && \iff \\ f(x_1, \dots, x_n) &= (\text{en primitiv funktion m.a.p. } x_n) + g(x_1, \dots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

där g är en ännu okänd funktion, en "integrationskonstant" som beror på de variabler som hölls konstanta under integrationen.

- Sätt in detta uttryck för f i vänsterledet i de övriga $n - 1$ ekvationerna.
- Detta reducerar problemet till att bestämma funktionen g utifrån dess partiella derivator, dvs. ett likadant problem men i $n - 1$ variabler. Ifall någon av ekvationerna för $g'_{x_1}, \dots, g'_{x_{n-1}}$ innehåller x_n i högerledet så saknas lösning, eftersom g ju bara fick bero på x_1, \dots, x_{n-1} ifall den n :te ekvationen skulle bli uppfylld.
- Utför samma procedur på det reducerade problemet. Upprepa tills det är klart.

Se Sjödins exempelkompendium, Exempel 3.4, 3.5 och 3.6, eller Neymark, Exempel 3.4, 3.5 och 3.9, eller Persson & Böiers, Exempel 11 och 12 i avsnitt 9.4.

- Poängen med det systematiska sättet är att det framgår tydligt att man hittar **alla** lösningar (eller att lösning saknas). Nybörjare brukar ofta integrera **alla** ekvationerna var för sig först, och sedan försöka "pussla ihop" resultaten, men dessa argument brukar vara långt ifrån vattentäta, så gör inte på det viset!
- Om potential saknas så framgår detta när man löser systematiskt på ovanstående sätt, men man kan ofta snabbt visa det med Clairauts sats istället. I två dimensioner blir det såhär: om det givna vektorfältet är av klass C^1 (vilket det nästan alltid är i praktiken, oftast har man ju uppenbart C^∞ till och med), och **y -derivatan av det som f'_x ska vara lika med inte överensstämmer med x -derivatan av det som f'_y ska vara lika med**, så saknas potential.

Ty om det finnes någon potential $f(x, y)$ skulle man kunna räkna ut dess andraderivator genom att derivera uttrycken för f'_x och f'_y , vilket enligt förutsättning ger upphov till kontinuerliga funktioner. Så då skulle vi ha $f \in C^2$, och alltså $(f'_x)'_y = (f'_y)'_x$ enligt Clairaut. Men vi hade ju $(f'_x)'_y \neq (f'_y)'_x$. Denna motsägelse visar att det inte kan finnas någon potential.

För att visa att potential saknas i högre dimensioner räcker det att hitta *något* par av variabler x_i och x_j sådant att just dessa blandade andraderivator inte överensstämmer: $(f'_{x_i})'_{x_j} \neq (f'_{x_j})'_{x_i}$.

PDE

- En **partiell differentialekvation (PDE)** är en differentialekvation som innehåller partiella derivator. Inom fysik, biologi, ekonomi och andra tillämpningar finns det en otrolig massa fenomen som modelleras med hjälp av PDE. Några exempel på berömda PDE från fysiken:

- Laplaces ekvation $\Delta f = 0$, där $\Delta f = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz}$.
(Blanda inte ihop *Laplace-operatorn* $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ med nabla-operatorn $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$; t.ex. skriv inte Δf om du menar gradienten ∇f .)
- Värmeledningsekvationen $f'_t = \Delta f$.
- Vågekvationen $f''_{tt} = \Delta f$.

- I denna kurs går vi dock inte in på tillämpningar (se t.ex. kursen **TATA27**, *Partiella differentialekvationer*), utan behandlar bara **vissa enkla typer** av PDE där man **kan hitta lösningen exakt** med hjälp av **variabelbyte**.
- Säg att den sökta funktionen heter $z(x, y)$. När man byter till nya variabler (u, v) behöver derivatorna som förekommer i differentialekvationen $(z'_x, z'_y, z''_{xx}, \text{osv.})$ uttryckas i termer av derivatorna med avseende på de nya variablerna $(z'_u, z'_v, z''_{uu}, \text{osv.})$. Förstaderivatorna brukar inte ställa till med några problem, men många fastnar på omskrivningen av andraderivatorna. Se nedanstående punkt för förklaring av hur man gör!
- Säg att vi ska byta från ursprungliga variabler (x, y) till nya variabler (u, v) som definieras av något givet samband $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Exempelvis, för att ta något konkret: $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

Förstaderivatorna av den sökta funktionen $z(x, y)$ kan direkt uttryckas i de nya variablerna med hjälp av **kedjeregeln**, som ju t.ex. säger att

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x.$$

I vårt konkreta exempel är $u'_x = (x^2 - y^2)'_x = 2x$ och $v'_x = (2xy)'_x = 2y$, alltså

$$f'_x = 2x f'_u + 2y f'_v.$$

För att göra formlerna lite lättare att läsa kan vi införa förkortningarna $A = u'_x = 2x$ och $B = v'_x = 2y$:

$$f'_x = A f'_u + B f'_v. \quad (*)$$

Genom att ta $f = z$ i formeln (*) får man alltså direkt

$$z'_x = A z'_u + B z'_v,$$

och på liknande sätt får man fram

$$z'_y = C z'_u + D z'_v,$$

där $C = u'_y$ och $D = v'_y$.

För att sedan **transformera andraderivatorna** gör man såhär:

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= (z'_x)'_x \\ &= (A z'_u + B z'_v)'_x && \text{(Insättning av det nyss härledda uttrycket för } z'_x\text{.)} \\ &= A'_x z'_u + A (z'_u)'_x + B'_x z'_v + B (z'_v)'_x && \text{(Derivering med produktregeln } (fg)'_x = f'_x g + f g'_x\text{.)} \\ &= ??? && \text{(Detta är steget där många kör fast!)} \end{aligned}$$

Termerna A'_x och B'_x får man såklart genom att helt enkelt derivera uttrycken A och B . De problematiska termerna $(z'_u)'_x$ och $(z'_v)'_x$ beräknas **genom att sätta in** $f = z'_u$ **respektive** $f = z'_v$ **i formeln (*)**, alltså i samma formel som användes i första steget för att transformera förstaderivatorna. Såhär:

$$\begin{aligned} (z'_u)'_x &= A (z'_u)'_u + B (z'_u)'_v = A z''_{uu} + B z''_{uv}, \\ (z'_v)'_x &= A (z'_v)'_u + B (z'_v)'_v = A z''_{vu} + B z''_{vv} = A z''_{uv} + B z''_{vv}. \end{aligned}$$

Nu är det bara att sätta in allt detta i uträkningen så får man ut vad uttrycket $z''_{xx} = ???$ blir. I allmänhet innefattar detta uttryck alltså alla andraderivatorna $z''_{uu}, z''_{uv}, z''_{vv}$ och även förstaderivatorna z'_u och z'_v som blev kvar vid användningen av produktregeln.

Och sedan får man göra på motsvarande sätt för att transformera z''_{xy} och z''_{yy} också. (Puh...!)

- I dessa sammanhang används (som synes) oftast det skrivsätt där man betraktar den sökta storheten (säg "z") omväxlande som funktion av de gamla variablerna ("z = z(x, y)") och som funktion av de nya variablerna ("z = z(u, v)"). Detta är praktiskt, men kan även leda till missförstånd ibland,

som påpekades redan i kommentarerna till Fö 6 i samband med kedjeregeln. Ett noggrannare skrivsätt vore att säga att $z = f(x, y)$ och $z = g(u, v)$, där sambandet mellan funktionerna f och g ges av variabelsambanden $u = \alpha(x, y)$ och $v = \beta(x, y)$:

$$f(x, y) = g(\alpha(x, y), \beta(x, y)).$$

Och istället för t.ex. $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x$ skulle man då få skriva

$$f'_x(x, y) = g'_u(\alpha(x, y), \beta(x, y)) \alpha'_x(x, y) + g'_v(\alpha(x, y), \beta(x, y)) \beta'_x(x, y).$$

Noggrannare, som sagt, men också mera svårläst, eller hur?

Lektion 8

(Obs! Även denna lektion är ganska arbetskrävande.)

- Bestäm potential (eller visa att det inte går): 2.7, 2.8, 2.9.
(Se till att du gör på det *systematiska* sättet, vilket *inte* är att integrera varje ekvation för sig och sedan pussla. Se kommentarerna ovan. Ledning till 2.8: Clairauts sats.)
- Ett exempel där de blandade andraderivatorna i origo inte är lika: 2.6b*.
- Några enkla PDE som kan lösas direkt (utan variabelbyte): 2.11abcdef, 2.11gh*.
- Lösning av första ordningens PDE via förenklande variabelbyte: 2.22, 2.26, 2.27*, 2.29*.
- Transformation av andraderivator (se förklaring ovan): 2.31, 2.33, 2.41.
- Lösning av andra ordningens PDE via förenklande variabelbyte: 2.32, 2.34.
- Transformation av första- och andraderivator till polära koordinater: 2.37.
(Viktigt i många tillämpningar!)
- Detsamma vid vridning av koordinatsystemet: 2.36*.
- Hitta lösningar av viss form till en PDE: 2.25*.

Föreläsning 9. Avbildningar $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Geometrisk tolkning av funktional-matris och funktionaldeterminant. Inversa funktions-satsen.

- Sjödin: Avsnitt 7.3.
Neymark: Avsnitt 3.6.
Persson & Böiers: Avsnitt 3.1–3.3.
- Förbered dig genom att repetera linjära avbildningar från kursen i linjär algebra, annars kan det bli tufft att hänga med. T.ex. är det bra att minnas grundläggande saker som att **basvektorernas bilder är avbildningsmatrisens kolonner** och **determinantens belopp är area-/volym-skalan för en linjär avbildning**.
- Avbildningar från \mathbf{R}^n till \mathbf{R}^n : linjära och icke-linjära.
- **Linjär approximation.** Funktionaldeterminantens belopp ger lokal area-/volym-skala.
(Vi kommer snart att få användning för detta när vi ska göra variabelbyte i multipelintegraler. En annan viktig tillämpning av linjär approximation är att avgöra stabilitet hos jämviktspunkter för dynamiska system; se kursen **TATA71**, *Ordinära differentialekvationer och dynamiska system*.)

- **Inversa funktionssatsen.** Antag att avbildningen $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ är av klass C^k (där $k \geq 1$) och att funktionaldeterminanten $\frac{df}{dx}$ i punkten \mathbf{a} är **skild från noll** (dvs. att funktionalmatrisen $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a})$ är **inverterbar**). Då är avbildningen själv **lokalt inverterbar** nära \mathbf{a} , dvs. det finns en öppen mängd U som innehåller \mathbf{a} och en öppen mängd V som innehåller $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, sådana att \mathbf{f} ger en 1-1-korrespondens mellan U och V . Den inversa avbildningen från V till U är också av klass C^k .

Det följer sedan av kedjeregeln att funktionalmatrisen för den inversa avbildningen är matrisinversen för \mathbf{f} 's funktionalmatris. Med andra ord, om man skriver $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ och $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$, där \mathbf{g} är den lokala inversen till \mathbf{f} , så är

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1}.$$

- Tolkning som **lokal lösbarhet** för ickelinjära ekvationssystem med lika många ekvationer som obekanta: Om $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, och \mathbf{y} ligger "nära \mathbf{b} " (dvs. $\mathbf{y} \in V$) så har ekvationssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ exakt en lösning \mathbf{x} som ligger "nära \mathbf{a} " (dvs. $\mathbf{x} \in U$).

(Kom ihåg determinantkriteriet för linjära ekvationssystem, från kursen i linjär algebra: $n \times n$ -systemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ är entydigt lösbart (oavsett vad \mathbf{y} är) om och endast om $\det A \neq 0$. På liknande sätt garanterar inversa funktionssatsen entydig lösbarhet *lokalt* för ett ickelinjärt ekvationssystem $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ ifall en viss determinant är skild från noll.)

- Inversa funktionssatsen är av grundläggande betydelse i flervariabelanalys, tillsammans med implicita funktionssatsen som tas upp senare i kursen. Dessa satser ger en teoretiskt solid grund för många saker som man ofta bara tar för givet, t.ex. att en "nivåyta" verkligen är en "yta" och inte någon annan konstig typ av mängd, ifall bara vissa enkla förutsättningar är uppfyllda. Dessa satser är dock relativt svåra att bevisa, så i den här kursen nöjer vi oss med att konstatera att resultaten verkar rimliga. Bevisen finns att läsa i Neymark för den som är intresserad, men inte i Persson & Böiers.

Lektion 9

- En **ickelinjär** avbildning som är globalt inverterbar, med en **invers som går att räkna ut** enkelt: 3.8.
- En **ickelinjär** avbildning där det **inte går att lösa ut någon invers** uttryckt i elementära funktioner, men där man ändå (med inversa funktionssatsen) kan visa att en **lokal invers finns i princip**, och även kan säga en del om dess derivator: 3.9ab, 3.9c*.
- Beräkna vad en ickelinjär avbildning gör med en liten kvadrat och tolka funktionalmatrisen och funktionaldeterminanten geometriskt (lokal areaskala, orientering): 3.10.
- Lokal kontra global inverterbarhet: 3.11.

(Avbildningen i denna uppgift är samma sak som kvadrering av komplexa tal: $u + iv = (x + iy)^2$. Frågan om inverterbarhet handlar alltså om existens och (icke-)entydighet av kvadratrötter till komplexa tal, så här kan du ha nytta av det du lärde dig i grundkursen om att lösa komplexa andradgradsekvationer.)

Föreläsning 10. Variabelbyte i dubbelintegraler.

- Sjödin: Kapitel 10.
Neymark: Avsnitt 6.3–6.4.
Persson & Böiers: Avsnitt 6.3–6.4.
- Formeln för variabelbyte i dubbelintegraler:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| du dv.$$

Faktorn $\left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right|$ känner vi igen som den **lokala areaskalan** (se Fö 9) för avbildningen $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

- För att indikera vad som behöver bytas ut i integralen när man gör variabelbytet använder man ofta **ett symboliskt skrivsätt** som relaterar areaelementen $dx dy$ och $du dv$:

$$dx dy = \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| du dv.$$

Försök att motstå frestelsen att "dividera med $du dv$ " och därmed uppfinna det **hemmagjorda skrivsättet** " $\frac{dx dy}{du dv} = \dots$ ". Det är väldigt många som gör detta, men det ser lite oproffsig ut, för man brukar inte definiera någon divisionsoperation för areaelement.

(Jämför med vektorer: även om sambandet $\mathbf{u} = 3\mathbf{v}$ skulle råka gälla så skriver man inte gärna $\mathbf{u}/\mathbf{v} = 3$, eller hur? Vektorer kan ju inte divideras i allmänhet.)

- Kom ihåg att symbolen $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$ (skriven med raka d) står för en **determinant**, nämligen determinanten av funktionalmatrisen $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ (som skrivs med svängda ∂). Och de lodräta strecken står för vanligt **absolutbelopp**. Alltså:

$$\left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| = \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \right| = |x'_u y'_v - y'_u x'_v|.$$

I detta sammanhang är det kanske bäst att undvika skrivsättet

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

för determinanter, och istället skriva

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Annars blir det ju *dubbla streck* när man tar absolutbeloppet av determinanten, vilket möjligen kan orsaka viss förvirring.

Skriv alltså

$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right| = |1 \cdot 4 - 3 \cdot 2| = |-2| = 2$$

hellre än

$$\left| \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right| \right| = |1 \cdot 4 - 3 \cdot 2| = |-2| = 2.$$

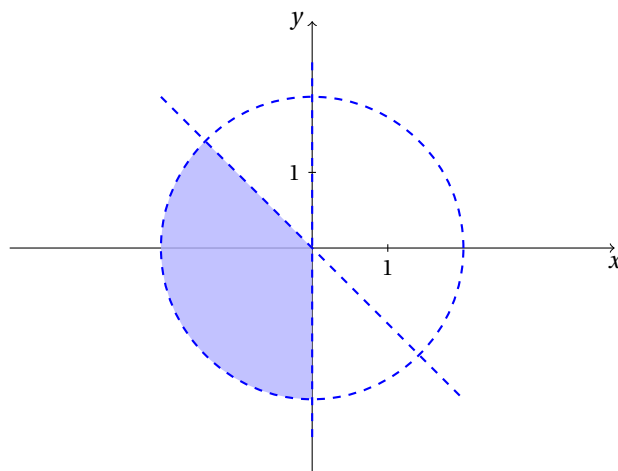
Och skriv framför allt inte saker i stil med $\left| \frac{1}{3} \frac{2}{4} \right| = |1 \cdot 4 - 3 \cdot 2|$, för det ju inte ens sant (VL = -2, men HL = +2)!

- Integration med hjälp av **planpolära koordinater** $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

Standardsamband att memorera: $dx dy = \rho d\rho d\varphi$ ("lokala areaskalan är ρ ").

För att ta reda på vad integrationsgränserna för ρ och φ ska vara (speciellt för vinkeln φ) är det nästan alltid enklast att bara **rita en figur och titta efter!** (Titta tillbaka på avsnittet om polära koordinater på Fö 2 om du är osäker på hur det funkar.)

Exempel. $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 4, x < 0, y < -x\}$.



För att punkten $(x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ ska ligga i det skuggade området D måste dess avstånd från origo vara $0 < \rho < 2$ och vinkeln φ ska (t.ex.) ligga i intervallet $3\pi/4 < \varphi < 3\pi/2$:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\rho=0}^2 \left(\int_{\varphi=3\pi/4}^{3\pi/2} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi \right) d\rho.$$

- **Linjära variabelbyten** (och **affina variabelbyten**, dvs. "linjärt plus konstant").

(Jämför gärna det vi gör här med vad du lärde dig om linjära avbildningar i linalg-kursen, speciellt "basvektorens bilder är avbildningsmatrisens kolonner", samt formlerna för bas- och koordinatsamband vid basbyte. Det är i grunden samma sak, även om det kanske beskrivs i lite andra ordalag.)

Två sätt att transformera en triangel D i xy -planet till en enklare triangel E i uv -planet:

- **Metod 1.** Räkna ut **ekvationer för två av kantlinjerna** i D , säg $ax + by = C_1$ och $cx + dy = C_2$. Gör sedan ett linjärt byte genom att ta uttrycken i vänsterleden som nya variabler:

$$u = ax + by, \quad v = cx + dy.$$

Man får uv -koordinaterna för hörnen i triangeln E genom att i sätta in xy -koordinaterna för vart och ett av D 's hörn i dessa formler för u och v .

Exakt hur triangeln E kommer att ligga i uv -planet kan variera, men den blir alltid rätvinklig, med en sida parallell med u -axeln, och en annan sida parallell med v -axeln.

- **Metod 2.** Välj ett hörn $P_1 = (x_0, y_0)$ i triangeln D och räkna ut **kantvektorerna från detta hörn till de två andra hörnen** P_2 och P_3 , säg

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \overrightarrow{P_1 P_3} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Gör sedan det affina variabelbytet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} x = x_0 + au + cv, \\ y = y_0 + bu + dv. \end{cases}$$

Denna konstruktion gör att D 's hörn P_1 , P_2 och P_3 automatiskt kommer att motsvara punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ resp. $(0, 1)$ i uv -planet. (Eller hur?)

Med denna metod får man alltså alltid samma triangel E i uv -planet, nämligen den maximalt enkla standardtriangeln med hörn i $(u, v) = (0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$.

(Och om D istället är en **parallelogram** i xy -planet får man såklart **enhetskvadraten** i uv -planet när man gör såhär. Eller hur?)

Vilken av metoderna som är lämpligast för ett givet problem är en avvägningsfråga, som man lär sig att bedöma med lite träning. Ibland kan man behöva ta hänsyn till utseendet hos den funktion som ska integreras, och detta kan ibland antyda ett lämpligt byte enligt metod 1. I annat fall är nog metod 2 enklast för det mesta.

En skillnad mellan metoderna är att man med metod 1 får de nya variablerna (u, v) uttryckta som funktioner av de gamla variablerna (x, y) , medan det blir tvärtom med metod 2. Men det går ju alltid att invertera sambanden om det skulle behövas.⁷

Lektion 10

- Dubbelintegraler med hjälp av planpolära koordinater: 6.9.
- Dubbelintegraler med hjälp av linjära/affina variabelbyten: 6.10.
- Linjärt variabelbyte först, därefter polära koordinater: 6.11.
- Knivig avvägning: 6.12.
(Ska man byta koordinater så att området blir enkelt? Eller så att funktionen som ska integreras blir enkel? Den strategi som visar sig fungera i b-uppgiften är kanske en liten överraskning!)
- Dubbelintegral som kräver ett skraddarsytt variabelbyte: 6.13.
- Area av område mellan kurvor: 6.29.

Föreläsning 11. Taylors formel. Lokala extrempunkter.

- Sjödin: Kapitel 6. Kvadratkomplettering illustreras i Exempel 6.4 (m.fl.) i exempelkompendiet.
Neymark: Avsnitt 5.1, 5.2. Kvadratkomplettering illustreras i Exempel 5.4 och 5.6.
Persson & Böiers: Avsnitt 2.6. Se speciellt s. 105–106 för kvadratkomplettering.

Snabbrepetition av kvadratiska former

- Till den här föreläsningen är det väldigt viktigt att komma ihåg en del saker om **kvadratiska former** och deras **teckenkaraktär**. Här är en snabbrepetition; gå tillbaka till kursen i linjär algebra för mer detaljer om det behövs.
- En **kvadratisk form** är ett **homogent andragradspolynom**, dvs. ett polynom som bara innehåller termer av exakt grad 2.

T.ex. ser en kvadratisk form i tre variabler (x, y, z) ut såhär:

$$\begin{aligned}
 Q(x, y, z) &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz \\
 &= (x, y, z) \underbrace{\begin{pmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{pmatrix}}_{\text{symmetrisk matris } S} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

där koefficienterna A, B, C, D, E, F är reella konstanter.

⁷I sådana lägen kan man spara mycket tid om man minns formeln för inversen av en 2×2 -matris:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Minnesregel: "1 delat med determinanten, byt plats på diagonalelementen a och d , byt tecken på b och c ".

Föreställ dig **värdetabellen** för en sådan funktion: i varje punkt (x, y, z) i rummet sitter motsvarande funktionsvärde $Q(x, y, z)$. Det är uppenbart att det alltid **måste sitta en nolla i origo**:

$$Q(0, 0, 0) = A \cdot 0^2 + B \cdot 0^2 + \dots + F \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

Men vad det blir **i de övriga punkterna** beror såklart på vad koefficienterna A, B, \dots, F är, och vi kommer att vara intresserade av vilket **tecken** (plus eller minus eller noll) dessa **övriga värden** har.

- Q sägs vara **positivt definit** ifall det *bara förekommer positiva värden* i värdetabellen (med undantag av den där oundvikliga nollan i origo).
- Q sägs vara **positivt semidefinit** ifall alla Q :s värden är *positiva eller noll* och det finns *flera nollor i värdetabellen*, inte bara den i origo.
- Q sägs vara **indefinit** ifall det förekommer *både positiva och negativa värden* i värdetabellen.
- Och Q kan även vara **negativt definit** eller **negativt semidefinit**, vilket såklart definieras likadant som de positiva motsvarigheterna, fast med ombytt tecken (negativa värden istället för positiva).

Genom att diagonalisera den symmetriska matrisen S kan man få värdefull information om Q . Sådär: ifall $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ är en **ON-bas av egenvektorer** till S med motsvarande **egenvärden** $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, så kan man införa ett vridet koordinatsystem (u, v, w) , med axlar i egenvektorens riktningar, genom att sätta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u\mathbf{f}_1 + v\mathbf{f}_2 + w\mathbf{f}_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{\text{basbytesmatris}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

(Jämför ”metod 2” för linjära/affina variabelbyten i dubbelintegraler ovan – det är precis samma slags variabelbyte här!) Insättning av dessa formler för x, y och z i uttrycket för $Q(x, y, z)$ ger (se linalg-kursen)

$$Q = \dots = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2,$$

dvs. efter byte till de nya koordinaterna får Q ett uttryck med enbart rena kvadrater, inga blandade produkter. Från detta ser man enkelt vad **teckenkaraktären** blir: Q är positivt definit ifall alla tre egenvärdena är positiva, positivt semidefinit ifall minst ett egenvärde är noll och alla är icke-negativa, indefinit om det finns både positiva och negativa egenvärden, etc. Man kan också se hur Q :s **nivåtytor** ser ut (ellipsoider, hyperboloider, etc., beroende på teckenkaraktären), samt att Q :s **största och minsta värde på enhetssfären** (alltså ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, vilken i nya koordinater blir $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ eftersom koordinatsystemet bara har vridits) är lika med **det största resp. det minsta egenvärdet**.

- I denna kurs bestämmer vi teckenkaraktären med hjälp av **systematisk kvadratkomplettering** (se läsanvisningarna för exempel).

I linjär algebra-kursen gör man detta med hjälp av egenvärdena, enligt ovan. Kvadratkomplettering är dock en mycket enklare metod ifall man enbart är intresserad av teckenkaraktären, och inte bryr sig om exakt hur nivåmängderna ser ut, eller vad största/minsta värdet på enhetssfären är. Dessutom behöver man lösa en tredjegrads ekvation för att hitta egenvärdena till en 3×3 -matris, och i denna kurs (till skillnad från linalg) kommer inte dessa tredjegrads ekvationer att vara riggade för att det ska finnas en rot som är enkel att gissa.

Neymark tar också upp en annan metod (Sylvesters kriterium) som använder determinanter, och som presenteras utan bevis (förutom i fallet $n = 2$). Det rekommenderas dock att du **absolut inte** använder den metoden till att börja med; om du vill använda den, se åtminstone till att först *grundligt* behärska den primära metoden med systematisk kvadratkomplettering. Anledningen är att Sylvesters kriterium inte uppmuntrar till **förståelse**, och om man inte förstår varför något fungerar så är det lättare att man gör fel. Med kvadratkomplettering bör det däremot vara **uppenbart** varför man kan dra de slutsatser man drar, och dessutom är det enklare att kontrollera en kvadratkomplettering än en determinantuträkning.

Taylor's formel

- **Taylorutveckling** av ordning n för en flervariabelfunktion:

funktionsvärdet =

$$\underbrace{(\text{konstantterm } K) + (\text{linjär form } L) + \frac{1}{2!}(\text{kvadratisk form } Q) + \dots + \frac{1}{n!}(\text{form av grad } n)}_{\text{Taylorpolynom av ordning } n} + \underbrace{(\text{restterm } R)}_{\text{ordning } n+1}$$

- I denna kurs använder vi oftast Taylorutveckling av ordning 2 (alltså $K + L + \frac{1}{2!}Q + R$). Sådär ser det ut för en funktion av 3 variabler, om man utvecklar kring punkten (a, b, c) :

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k, c+l) & \text{ Funktionsvärdet i en punkt} \\ & \text{ nära } (a, b, c). \\ = f(a, b, c) & \text{ Konstantterm } K. \\ + f'_x(a, b, c)h + f'_y(a, b, c)k + f'_z(a, b, c)l & \text{ Linjär form } L(h, k, l). \\ + \frac{1}{2!} \left(f''_{xx}(a, b, c)h^2 + f''_{yy}(a, b, c)k^2 + f''_{zz}(a, b, c)l^2 \right. \\ & \left. + 2f''_{xy}(a, b, c)hk + 2f''_{xz}(a, b, c)hl + 2f''_{yz}(a, b, c)kl \right) \frac{1}{2!} \times \text{Kvadratisk form } Q(h, k, l). \\ + R(h, k, l), & \text{ Restterm av ordning 3.} \end{aligned}$$

där "resttermen har ordning 3" betyder att

$$|R(h, k, l)| \leq \text{konstant} \cdot (\sqrt{h^2 + k^2 + l^2})^3$$

i någon omgivning till $(h, k, l) = (0, 0, 0)$. Detta skrivs ibland med "Ordo-notation":

$$R(h, k, l) = O((h^2 + k^2 + l^2)^{3/2}).$$

Taylorpolynomet $P(h, k, l) = K + L(h, k, l) + \frac{1}{2}Q(h, k, l)$ är alltså ett polynom av grad (högst) 2 i variablerna (h, k, l) , och $f(a+h, b+k, c+l) \approx P(h, k, l)$ om (h, k, l) är nära $(0, 0, 0)$.

- Det spelar ingen större roll om man skriver $K + L + \frac{1}{2}Q + R$ som ovan, eller om man väljer att baka in faktorn $\frac{1}{2}$ i definitionen av den kvadratiske formen Q så att det blir $K + L + Q + R$, för det är ju ändå mest Q :s tecken vi kommer att vara intresserade av.

Undersökning av lokala extrempunkter

- En **stationär punkt** för f är en punkt där f är differentierbar och **gradienten** ∇f är lika med **nollvektorn**. Detta gör att den linjära formen L i Taylorutvecklingen försvinner. De stationära punkterna är våra kandidater när vi letar **lokala extrempunkter**, dvs. lokala maximi- eller minimipunkter. (Vi kan dessutom även behöva undersöka eventuella undantagspunkter där f inte är tillräckligt snäll för att kunna Taylorutvecklas, som t.ex. punkten $(0, 0)$ ifall $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$).
- **Sats.** Teckenkaraktären hos den kvadratiske formen i Taylorutvecklingen (för en tillräckligt snäll funktion) kring en stationär punkt P avgör oftast om P är en lokal extrempunkt eller inte:
 - Q är positivt definit $\implies P$ är en **strikt lokal minimipunkt** för f .
 - Q är negativt definit $\implies P$ är en **strikt lokal maximipunkt** för f .
 - Q är indefinit $\implies P$ är en **sadelpunkt** för f (varken lokalt min eller lokalt max).

Men om Q råkar vara **positivt semidefinit** eller **negativt semidefinit**, så ger denna undersökning ingenting, eftersom Q då lämnar ett "kryphål" där termer av högre ordning i Taylorutvecklingen kan blanda sig i leken! I detta fall måste man "ad hoc" hitta på *något annat sätt* att undersöka saken. (En bra idé är ofta att titta vad funktionen gör i den riktning där Q blir noll.)

Lektion 11

(Här är ännu en lektion med ganska många uppgifter. . .)

- Beräkna Taylorutveckling: 2.65, 2.64ac.
- Avgör lokalt max/min **direkt utifrån definitionen**: 2.62abcdefg, 2.62hi*, 2.63*.
"Bara titta, inte räkna!" (Eller åtminstone räkna så lite som möjligt.)
- Bestäm teckenkaraktär hos kvadratiska former: 2.66, 2.67*.
- Avgör om origo är lokal extrempunkt: 2.68, 2.69.
- Hitta alla stationära punkter, och avgör vilka av dem som är lokala extrempunkter: 2.70abcdgh, 2.70efij*.
- Hitta felet i resonemanget (femtioelva exempel på hur man *inte* ska göra): K11.
(När du tycker att du behärskar det här momentet inför tentan, gör då denna uppgift en gång till, är du snäll! Många av dessa fel är *extremt* vanligt förekommande på tentor.)
- Funktion $f(x, y)$ med två lokala maxima men inget lokalt minimum: 2.71.
- Diverse: 2.73*, 2.74*.

Föreläsning 12. Implicita funktions-satsen. Implicit derivering.

- Sjödin: Kapitel 8.
Neymark: Avsnitt 5.3.
Persson & Böiers: Avsnitt 3.4.
- **Underbestämda** icke-linjära ekvationssystem (dvs. system med **för få ekvationer**, alltså färre ekvationer än obekanta).
Om man har ett ekvationssystem med n ekvationer och $n + k$ variabler, och har hittat en punkt som uppfyller systemet, så väntar man sig att det normalt sett ska finnas en hel familj av lösningar i närheten av den punkten, för om man ändrar bara en aning på värdet hos k av variablerna, så borde väl de återstående n variablerna kunna anpassa sig lite, så att de n ekvationerna fortfarande förblir uppfyllda? Dessa n variabler blir då (om deras värden är entydigt bestämda av ekvationerna) *funktioner* av de k utvalda variabler som man lät variera fritt. Man får alltså en **k -parameterlösning**, där ekvationssystemet *implicit* definierar n stycken variabler som funktioner av de övriga k variablerna (de k stycken *parametrarna*).
• **Implicita funktions-satsen** ger villkor som garanterar att det verkligen blir så. (Tillräckliga villkor, men ej nödvändiga.)
Liksom för inversa funktions-satsen är det en viss determinant som ska vara nollskild, nämligen en "funktionaldeterminant" av storlek $n \times n$ enbart innehållande partialderivatorna med avseende på de variabler man vill lösa ut, evaluerad i den punkt där man undersöker lokal lösbarhet.
Säg t.ex. att vi har ett ekvationssystem med två ekvationer och fem variabler:

$$F(x, y, z, u, v) = C,$$

$$G(x, y, z, u, v) = D,$$

och vi råkar känna till en punkt P , med koordinaterna $(x, y, z, u, v) = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$, som satisfierar dessa ekvationer. Under förutsättning att funktionerna F och G är av klass C^k (med $k \geq 1$) i någon omgivning till P (i \mathbf{R}^5) och att 2×2 -determinanten

$$\begin{vmatrix} F'_u(P) & F'_v(P) \\ G'_u(P) & G'_v(P) \end{vmatrix}$$

inte råkar vara noll, så säger implicita funktionssatsen att det finns en omgivning M till (x_0, y_0, z_0) (i \mathbf{R}^3) och en omgivning N till (u_0, v_0) (i \mathbf{R}^2) sådana att de lösningar (x, y, z, u, v) till ekvationssystemet som uppfyller $(x, y, z) \in M$ och $(u, v) \in N$ har formen

$$u = f(x, y, z),$$

$$v = g(x, y, z),$$

där f och g är implicit definierade C^k -funktioner med definitionsmängd M . Den del av systemets lösningsmängd som ligger nära punkten P bildar alltså en 3-dimensionell yta i \mathbf{R}^5 som kan beskrivas med de tre variablerna (x, y, z) som parameterar.

Här har vi alltså "löst ut" variablerna u och v ur ekvationssystemet ("löst ut" inom citattecken eftersom vi oftast inte kan skriva upp explicita uttryck för funktionerna f och g , utan bara konstatera att de enligt satsen existerar i princip), och den determinant vi då behövde kontrollera var den som innehöll de partiella derivatorna av F och G med avseende på just dessa variabler u och v .

För att rekapitulera: Vi hade alltså fem variabler och två ekvationer, så vi väntar oss att det borde finnas utrymme för $5 - 2 = 3$ stycken av variablerna att variera fritt medan de övriga två anpassar sina värden så att systemet hålls satisfierat. Och vi såg ovan att t.ex. (x, y, z) kan variera och (u, v) anpassa sig, så länge inte det olyckliga inträffar att determinanten ovan är noll. Om den råkar vara noll så säger satsen ingenting, eftersom den bara ger tillräckliga villkor, inte nödvändiga; det skulle ändå kunna finnas funktioner $u = f(x, y, z)$ och $v = g(x, y, z)$ som löser ekvationssystemet, eller så gör det inte det, vem vet? Men i detta läge kanske det kan vara så att funktionaldeterminanten med avseende på något *annat* par av variabler är nollskild i punkten P , t.ex. $\begin{vmatrix} F'_x(P) & F'_y(P) \\ G'_x(P) & G'_y(P) \end{vmatrix} \neq 0$, och i så fall kan vi istället använda implicita funktionssatsen för att dra slutsatsen att ekvationssystemet implicit definierar x och y som C^k -funktioner av (z, u, v) i en omgivning till P , säg $x = \alpha(z, u, v)$ och $y = \beta(z, u, v)$, och då blir fortfarande slutsatsen att lösningsmängden nära P ser ut som en 3-dimensionell yta i \mathbf{R}^5 .

- I specialfallet att ekvationssystemet bara består av en enda ekvation,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C,$$

så är det en 1×1 -determinant, dvs. bara en enda partiell derivata, som behöver vara nollskild för att implicita funktionssatsen ska kunna tillämpas. Dvs. ifall man vill se om x_k kan lösas ut som funktion av de övriga $n - 1$ variablerna nära punkten P så är det helt enkelt villkoret

$$F'_{x_k}(P) \neq 0$$

som behöver kontrolleras.

- Följande **geometriska tolkningar i två och tre dimensioner** bör man vara särskilt bekant med:
 - En ekvation i två variabler: $F(x, y) = C$. Lösningsmängden är normalt sett en kurva i planet.
 - En ekvation i tre variabler: $F(x, y, z) = C$. Lösningsmängden är normalt sett en yta i rummet.
 - System av två ekvationer i tre variabler: $F(x, y, z) = C$, $G(x, y, z) = D$. Lösningsmängden är normalt sett en kurva i rummet (skärningskurvan mellan de två nivåytorna $F = C$ och $G = D$).

Vi har tidigare i kursen tagit det mer eller mindre för givet att det bör förhålla sig på detta sätt, men med hjälp av implicita funktionssatsen kan vi nu visa rigoröst att det verkligen stämmer, åtminstone lokalt nära någon given punkt som uppfyller ekvationerna, så länge funktionerna i vänsterleden är av klass (minst) C^1 och de inblandade funktionernas gradienter i denna punkt uppfyller rätt villkor.

Ta t.ex. det första fallet, $F(x, y) = C$, kring någon punkt (x_0, y_0) som uppfyller ekvationen. Ifall $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ så definierar ekvationen implicit en C^1 -funktion $y = f(x)$, vars graf ju onekligen är en kurva i planet, och på samma sätt om $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$ så definierar ekvationen implicit en

C^1 -funktion $x = g(y)$, också en kurva. Så länge **gradienten** $\nabla F(x_0, y_0)$ **inte är nollvektorn** (i \mathbf{R}^2) gäller *minst* ett av dessa två villkor, och då kan vi alltså konstatera att den nivå mängd till F som går genom punkten (x_0, y_0) verkligen (åtminstone nära punkten) är en **kurva** (alltså en nivåkurva).

Det andra fallet, $F(x, y, z) = C$, är nästan likadant: så länge gradienten $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ inte är nollvektorn (i \mathbf{R}^3 nu) så är minst en av de tre partiella derivatorna nollskild, säg t.ex. $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, och då finns det (lokalt) en implicit definierad lösning $z = f(x, y)$, vars graf är en **yta** i rummet (alltså en nivåyta till F).

I det sista fallet, $F(x, y, z) = C$ och $G(x, y, z) = D$, notera att kryssprodukten mellan gradienterna för de två inblandade funktionerna F och G ges av

$$\nabla F \times \nabla G = \begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} G'_x \\ G'_y \\ G'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'_y G'_z - F'_z G'_y \\ F'_z G'_x - F'_x G'_z \\ F'_x G'_y - F'_y G'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \end{pmatrix},$$

så ifall **denna kryssprodukt inte är nollvektorn** är *minst* en av de tre determinanterna i högerledet nollskild, och detta är precis vad som krävs för att kunna använda implicita funktions-satsen i denna situation. Om t.ex. den första determinanten $\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}$ är nollskild i punkten $P = (x_0, y_0, z_0)$ så säger satsen att det lokalt (nära P) finns en implicit definierad lösning $y = f(x)$, $z = g(x)$, och detta är ju mycket riktigt en **kurva** i \mathbf{R}^3 , skriven på parameterform med x som parameter.⁸

Notera också att $\nabla F \times \nabla G$ är lika med nollvektorn ifall någon av faktorerna ∇F och ∇G är det, så ifall kryssprodukten *inte* är nollvektorn kan varken ∇F eller ∇G vara det heller. Alltså, om $\nabla F(P) \times \nabla G(P) \neq \mathbf{0}$ så är $\nabla F(P) \neq \mathbf{0}$, så att ekvationen $F(x, y, z) = C$ ensam lokalt definierar en yta i rummet (enligt andra fallet ovan), och likaså $\nabla G(P) \neq \mathbf{0}$, så att ekvationen $G(x, y, z) = D$ ensam också lokalt definierar en yta i rummet. Detta rättfärdigar påståendet ovan om att lösningskurvan till systemet $F = C$ och $G = D$ är skärningen mellan nivåytan $F = C$ och nivåytan $G = D$.

- Personligen tycker jag att det enklaste sättet att komma ihåg det rätta villkoret i implicita funktions-satsen är att tänka **algebraiskt**: det som ska vara nollskilt är determinanten av den "ofullständiga funktionsmatris" som bara innehåller *derivatorna med avseende på de variabler man vill lösa ut*. Determinanten är av storlek $n \times n$, där n är antalet ekvationer i systemet (vilket även är antalet variabler som man löser ut).

Men i de tre fallen i \mathbf{R}^2 och \mathbf{R}^3 ovan kan man också förstå dessa villkor **geometriskt** i termer av hur vektorn ∇F eller $\nabla F \times \nabla G$ pekar; se figurer i kurslitteraturen. Det skadar inte att även ha denna geometriska förståelse!

- **Implicit derivering** är en teknik för att räkna ut derivator av implicit definierade funktioner.

T.ex. i situationen ovan gäller identiteterna

$$\begin{aligned} F(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)) &= C, \\ G(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)) &= D, \end{aligned}$$

för alla $(x, y, z) \in M$. Om vi deriverar båda led i den första identiteten med avseende på x så får vi

⁸Om du inte känner igen att det är en kurva på parameterform, skriv såhär istället, där parametern heter t :

$$(x, y, z) = (t, f(t), g(t)).$$

Funktionerna f och g är definierade i någon omgivning till $t = x_0$.

(med kedjeregeln hjälp)⁹

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} C \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (F(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z))) \\ &= F'_x(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)) \\ &\quad + F'_u(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)) f'_x(x, y, z) \\ &\quad + F'_v(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)) g'_x(x, y, z), \end{aligned}$$

eller, med ett förenklat skrivsätt där vi låter det vara underförstått i vilka punkter derivatorna ska evalueras,

$$F'_x + F'_u f'_x + F'_v g'_x = 0.$$

På samma sätt ger derivering av den andra identiteten att

$$G'_x + G'_u f'_x + G'_v g'_x = 0.$$

Dessa två ekvationer utgör tillsammans ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_x \\ g'_x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F'_x \\ G'_x \end{pmatrix}$$

där vi kan lösa ut

$$\begin{pmatrix} f'_x \\ g'_x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F'_x \\ G'_x \end{pmatrix},$$

så länge matrisinversen existerar, alltså så länge determinanten

$$\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}$$

inte är noll. Om vi gör oss besväret att återigen skriva ut detaljerna har vi alltså formeln

$$\begin{pmatrix} f'_x(x, y, z) \\ g'_x(x, y, z) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F'_u(\dots) & F'_v(\dots) \\ G'_u(\dots) & G'_v(\dots) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F'_x(\dots) \\ G'_x(\dots) \end{pmatrix},$$

där (\dots) står för $(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z))$ på alla sex ställena. Vi har alltså i någon mening lyckats "räkna ut" den partiella x -derivatan av de implicit definierade funktionerna f och g . Det är bara den lilla haken att svaret (högerledet ovan) innehåller just dessa funktioner f och g själva, dolda i uttrycket (\dots) , och vi kan ju i regel inte skriva upp explicita formler för dem. Men vi kan knappast förvänta oss något bättre heller, eller hur? Om vi inte kan lösa ut f och g explicit så lär det vara svårt att uttrycka deras derivator explicit också. Men vi kan alltså uttrycka derivatorna i termer av f och g åtminstone.¹⁰

⁹Lägg märke till skrivsättet här! I den sista likhetens vänsterled står uttrycket $\frac{\partial}{\partial x} (F(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)))$, vilket symboliserar att man **först** sätter in $u = f(x, y, z)$ och $v = g(x, y, z)$ i $F(x, y, z, u, v)$, så att man får en funktion av (x, y, z) , och så deriverar man denna trevariabelfunktion med avseende på x (hållande y och z konstanta). Sådär, alltså:

$$\frac{\partial}{\partial x} (F(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z))) = H'_x(x, y, z), \quad \text{där } H(x, y, z) = F(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)).$$

Ett vanligt notationsfel är att här istället skriva $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z))$, men detta betyder något helt annat, nämligen att man först räknar ut $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z, u, v)$ genom att derivera femvariabelfunktionen $F(x, y, z, u, v)$ med avseende på x (hållande y, z, u och v konstanta), och **därefter** sätter in $u = f(x, y, z)$ och $v = g(x, y, z)$. Detta uttryck är ju faktiskt vad som står som första term i likhetens högerled, så om man gör detta skrivfel påstår man att $F'_x(\dots)$ är lika med sig självt plus ytterligare två termer!

¹⁰Vi får y - och z -derivatorna på samma sätt; det är bara att göra om uträkningen med $\frac{\partial}{\partial x}$ utbytt mot $\frac{\partial}{\partial y}$ resp. $\frac{\partial}{\partial z}$ överallt, vilket leder till

$$\begin{pmatrix} f'_y \\ g'_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F'_y \\ G'_y \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} f'_z \\ g'_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F'_z \\ G'_z \end{pmatrix}.$$

Dessa resultat kan sammanfattas i en enda matrisekvation:

$$\begin{pmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{pmatrix}.$$

Dock finns det en punkt där vi *kan* räkna ut allting explicit, nämligen den punkt P som vi utgick ifrån, alltså $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$. Per definition är ju funktionsvärdena $f(x_0, y_0, z_0) = u_0$ och $g(x_0, y_0, z_0) = v_0$ kända, så om vi sätter in $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ i uttrycket (\dots) får vi precis P . Just i punkten (x_0, y_0, z_0) är derivatorna alltså lika med

$$\begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0, z_0) \\ g'_x(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F'_u(P) & F'_v(P) \\ G'_u(P) & G'_v(P) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F'_x(P) \\ G'_x(P) \end{pmatrix},$$

där högerledet enkelt kan beräknas från de givna funktionerna F och G . Notera att matrisinversen i denna formel existerar enligt förutsättning, för det kritiska antagandet i implicita funktionssatsen var ju just att determinanten

$$\begin{vmatrix} F'_u(x, y, z, u, v) & F'_v(x, y, z, u, v) \\ G'_u(x, y, z, u, v) & G'_v(x, y, z, u, v) \end{vmatrix}$$

skulle vara nollskild i punkten P .

En annan förutsättning var att F och G skulle vara av klass (minst) C^1 , vilket definitionsmässigt innebär att F'_u, F'_v, G'_u och G'_v är kontinuerliga, vilket i sin tur medför att ovanstående determinant är en kontinuerlig funktion av (x, y, z, u, v) . Sammansättningen av detta med de kontinuerliga funktionerna $u = f(x, y, z)$ och $v = g(x, y, z)$, alltså

$$\begin{vmatrix} F'_u(\dots) & F'_v(\dots) \\ G'_u(\dots) & G'_v(\dots) \end{vmatrix} \quad \text{där } (\dots) = (x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)),$$

blir därmed en *kontinuerlig* funktion av (x, y, z) , och måste alltså förbli nollskild i någon omgivning till (x_0, y_0, z_0) eftersom den var nollskild i (x_0, y_0, z_0) . I denna omgivning existerar alltså matrisinversen i formeln för $f'_x(x, y, z)$ och $g'_x(x, y, z)$ ovan.

Lektion 12

- Implicita funktionssatsen med två variabler och en ekvation: 3.12, 3.13, 3.16*, 3.17*.
- Tre variabler och en ekvation: 3.15, 3.18*.
- Tre variabler och två ekvationer: 3.19, 3.20.
- Tillräckliga kontra nödvändiga villkor i implicita funktionssatsen: K14.
- En uppgift som illustrerar vilken roll C^1 -förutsättningen spelar i implicita funktionssatsen: 3.14*.
(Observera att funktionen i vänsterledet i denna uppgift *inte* är av klass C^1 , så implicita funktionssatsen kan inte användas – i alla fall inte utan vidare!)

Föreläsning 13. Trippelintegraler.

- Sjödin: Kapitel 11, avsnitt 12.1–12.3.
Neymark: Avsnitt 7.1–3.
Persson & Böiers: Avsnitt 7.1, 8.1, 8.4. (Även 7.2, 8.3 och 8.5 kan vara intressant att läsa.)
- Definition av trippelintegral $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ via trappfunktioner.
- Tolkningar:
 - Fysikalisk tolkning: Trippelintegral av laddningsdensitet (elektrisk laddning per volymsenhet, kan vara både positiv och negativ) ger kroppens totala laddning.

- Fysikalisk tolkning om $f \geq 0$: Trippelintegral av massdensitet (massa per volymenhet) ger kroppens totala massa.
- Geometrisk tolkning: trippelintegral av 1 ger kroppens volym:

$$\text{Volym}(D) = \iiint_D dV = \iiint_D dx dy dz.$$

(Man lägger ju bara ihop alla volymselementen $dV = dx dy dz$ i D .)

- Du minns säkert att man också kan tolka en dubbelintegral som volymen mellan funktionsytan $z = f(x, y)$ och planet $z = 0$ om $f \geq 0$, eller som en "volym räknad med tecken" ifall f även kan vara negativ. Detta generaliserar ju den vanliga tolkningen från envarren, där enkelintegralen brukar förklaras som "arean, räknad med tecken, mellan x -axeln och kurvan $y = f(x)$ ".

Den tolkningen har dock **inte** någon särskilt användbar motsvarighet för trippelintegraler, för i så fall skulle man behöva gå upp en dimension, och tolka trippelintegralen $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ som "hypervolymen" i \mathbf{R}^4 mellan hyperplanet $w = 0$ och funktionshyperytan $w = f(x, y, z)$. Lycka till med att försöka visualisera detta! Använd tolkningarna i föregående punkt istället.

- För att systematiskt angripa trippelintegraler använder man en metod med **två steg**, där man i första steget reducerar problemen till en dubbelintegral, och i det andra steget beräknar denna dubbelintegral. Det finns två varianter:

Steg 1a. Dela upp området i **stavar**, dvs. skriv **först** trippelintegralen som "dubbelintegral av enkelintegral":

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{z=\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

(Här exemplifierat med stavar i z -led, men det går förstås även att använda stavar i x -led eller y -led ifall detta passar bättre för integralen ifråga.)

Steg 1b. Eller dela upp området i **skivor (tvärsnitt)**, dvs. skriv **först** trippelintegralen som "enkelintegral av dubbelintegral":

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{z=a}^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

(Exemplifierat med tvärsnitt för fixt z här, men fixt x eller fixt y går såklart också.)

Steg 2. Skriv **därefter** den uppkomna dubbelintegralen som "enkelintegral av enkelintegral".

I det här steget (men inte tidigare) kan vi i lugn och ro ta oss an delproblemet att sätta upp gränserna för dubbelintegralen. Och det bör förhoppningsvis gå bra, för detta har vi tränat en hel del på tidigare, och man kan **rita figur över området i två dimensioner**, vilket underlättar oerhört.

Vi har ju också möjligheten att göra förenklande variabelbyten i dubbelintegralen innan vi går över till upprepad enkelintegration.

- Kurslitteraturen innehåller tyvärr inte så många exempel på uträkningar med skivor eller stavar, bara några ganska enkla fall. Nedan (i Fö 14) finner du ett par lite mer avancerade exempel, och det finns även gott om exempel i lösningarna till gamla tentor på kurshemsidan (leta bland trippelintegraluppgifterna, helt enkelt).
- Variabelbyte i trippelintegraler.
(Måste ta hänsyn till **lokala volymskalor** = absolutbeloppet av funktionaldeterminanten.)
- Integration med hjälp av rymdpolära koordinater $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$.

Standardsamband att memorera: $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ ("lokala volymskalan är $r^2 \sin \theta$ "). Observera att detta förutsätter att $\sin \theta \geq 0$, annars skulle man behöva skriva $r^2 |\sin \theta|$; detta är en av anledningarna till att man aldrig ska använda θ -värden som ligger utanför intervallet $[0, \pi]$.

Obs! För användbara exempel på hur man tänker när man ska bestämma integrationsgränserna (särskilt för vinkeln θ), se avsnittet om rymdpolära koordinater i Fö 2.

- Definitionen av **masscentrum** (tyngdpunkten) (x_c, y_c, z_c) för kroppen D är

$$x_c = \frac{\iiint_D x dm}{\iiint_D dm}, \quad y_c = \frac{\iiint_D y dm}{\iiint_D dm}, \quad z_c = \frac{\iiint_D z dm}{\iiint_D dm},$$

där **masselementet** dm är massdensiteten $\rho(x, y, z)$ (massa per volymsenhet) gånger volymselementet $dV = dx dy dz$:

$$dm = \underbrace{\rho(x, y, z)}_{\text{massdensitet}} dx dy dz.$$

Varning!

- Ett **mycket vanligt misstag** är att **alltid försöka göra allt på en gång** med följande "ettstegsmetod":
Steg 1. Skriv direkt trippelintegralen som "enkelintegral av enkelintegral av enkelintegral".
Typ såhär:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_{z=\gamma(x,y)}^{\delta(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

- Detta går visserligen bra ifall området D från början råkar ges av olikheter som har precis rätt form för detta, nämligen

$$a \leq x \leq b, \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), \quad \gamma(x, y) \leq z \leq \delta(x, y),$$

där funktionerna α , β , γ och δ uppfyller villkoren

$$\alpha(x) \leq \beta(x) \quad \text{när} \quad a \leq x \leq b$$

och

$$\gamma(x, y) \leq \delta(x, y) \quad \text{när} \quad a \leq x \leq b \quad \text{och} \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x),$$

eller om man lyckas skriva om de givna olikheterna för D till denna form.

T.ex. går det i det allra enklaste fallet, ett **axelparallellt rätblock**,¹¹ där ju alla gränser är **konstanta**:

$$a \leq x \leq b, \quad \alpha \leq y \leq \beta, \quad \gamma \leq z \leq \delta.$$

Och man kanske kan unna sig att gå direkt till enkelintegraler också för en enkel **tetraeder** i stil med

$$x + y + z \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0,$$

eftersom detta system av olikheter ju är ekvivalent med

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y.$$

- Men så fort området blir lite mer komplicerat kan det vara **väldigt svårt att få gränserna rätt** i ett enda steg. Om du tvivlar på detta, försök att lösa de nedanstående exemplen (Fö 14) på detta sätt! Och även om det råkar bli rätt, så är det inte säkert att du övertygar din läsare (t.ex. den som rättar din tenta) om att du hade full kontroll över situationen. Så ta som vana att följa någon av tvåstegsmetoderna istället, dvs. använd **skivor** eller **stavar**.

¹¹Den vanligaste anledningen att byta till rymdpolära koordinater är att man ska integrera över en kropp som är sådan att den i (r, θ, φ) -rummet får formen av ett rätblock, t.ex.

$$0 \leq r \leq 4, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad \pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4$$

eller något i den stilen. Och då kan man förstås direkt efter variabelbytet ställa upp trippelintegralen som tre enkelintegraler.

Lektion 13

- Beräkning av trippelintegral över ett rätblock via upprepad integration: 6.16.
- Visualisering av en kropp i \mathbf{R}^3 genom att dela upp den i skivor/stavar: 6.20.
(En datorritad figur av denna kropp kan återfinnas på kurshemsidan om du letar lite, men lova att inte tjuvtitta förrän du själv har gjort ett allvarligt försök att lösa uppgiften!)
Obs. att i facit till denna uppgift är stavarna/skivorna skrivna som mängder i \mathbf{R}^3 , dvs. t.ex. tvärsnittet för $z = 1/2$ tänker man sig ligga i planet $z = 1/2$. Jag föredrar att tänka mig att detta tvärsnitt istället är en mängd i \mathbf{R}^2 , alltså i "ett xy -plan utan något z -axel alls inblandad", eftersom det man ska ha tvärsnittet till (i nästa uppgift) är att beräkna en dubbelintegral, och integrationsområdet för en dubbelintegral är en mängd i \mathbf{R}^2 , inte i \mathbf{R}^3 .
- Beräkning av trippelintegral över kroppen i föregående uppgift: 6.21.
Se till att inte hoppa över 6.20 och 6.21 – dessa uppgifter behandlar **viktiga principer** för hur man tar sig an trippelintegraler. Uppgift 6.21 kan angripas på minst sex olika sätt, ett sätt för varje deluppgift 6.20abcd. (Vissa sätt är smidigare än andra.) Det är väl värt besväret att prova åtminstone två eller tre sätt – gärna alla sex!
- Beräkning av trippelintegral över en tetraeder via upprepad integration: 6.19.
(Detta är något som återkommer i en del senare uppgifter, så det bör man se till att bemästra med lätthet.)
- Diverse trippelintegraler: 6.17, 6.18, 6.24.

Föreläsning 14. Trippelintegraler, fler exempel.

- På denna föreläsning kommer ingen ny teori, utan bara några fler exempel på uträkning av trippelintegraler.

Några lite svårare exempel på beräkning av trippelintegral

- **Exempel 1.** Beräkna volymen av det område D i \mathbf{R}^3 som definieras av olikheterna

$$x \leq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + xy \leq z \leq 1 - \frac{1}{2}y^2,$$

dvs. beräkna $\iiint_D dx dy dz$.

Lösning med stavar i z -led. Variabeln z förekommer bara i den tredje olikheten, och dessutom på ett enkelt sätt: z ska ligga mellan två gränser som beror på x och y . Detta gör det naturligt att använda stavar i z -led. Integralen blir då

$$\iiint_D dx dy dz = \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{z=x^2+xy}^{1-\frac{1}{2}y^2} dz \right) dx dy = \iint_{\tilde{D}} \left((1 - \frac{1}{2}y^2) - (x^2 + xy) \right) dx dy,$$

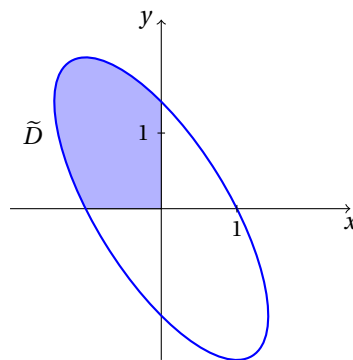
där vi måste bestämma integrationsområdet \tilde{D} för dubbelintegralen, alltså **projektion** av D på xy -planet. Detta område består av alla punkter $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sådana att det finns något z sådant att $(x, y, z) \in D$. Till att börja med måste förstås kraven $x \leq 0$ och $y \geq 0$ gälla ifall (x, y, z) ska tillhöra D . Sedan hade vi också villkoret $x^2 + xy \leq z \leq 1 - \frac{1}{2}y^2$, och om en sådan dubbelolikhet $\gamma(x, y) \leq z \leq \delta(x, y)$ ska kunna uppfyllas för något z så måste $\gamma(x, y) \leq \delta(x, y)$ gälla till att börja med, eller hur? Området \tilde{D} består alltså av de punkter (x, y) som uppfyller

$$x \leq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + xy \leq 1 - \frac{1}{2}y^2,$$

och vi har nu redan reducerat problemet till att beräkna en dubbelintegral över detta område. (Så vi behöver t.ex. inte oroa oss för att försöka visualisera hur kroppen ser ut i \mathbf{R}^3 , utan nu är det bara dubbelintegraluträkning som gäller.) Den sista olikheten är ekvivalent med $x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 \leq 1$, vilket i sin tur med en kvadratkomplettering kan skrivas om till

$$\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 \leq 1.$$

Denna olikhet beskriver en **ellipsskiva**, eftersom det står en positivt definit kvadratisk form i vänsterledet, men det är inte helt uppenbart exakt hur denna ellipsskiva ser ut, eftersom blandtermen xy gör att den ligger snett i förhållande till x - och y -axlarna. Om man verkligen vill veta så får man använda sina kunskaper i linjär algebra¹², eller så kan man vara lat och låta datorn rita kurvan $x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 = 1$; hur som helst visar det sig att området \tilde{D} ser ut såhär (den del av ellipsskivan som ligger i andra kvadranten):

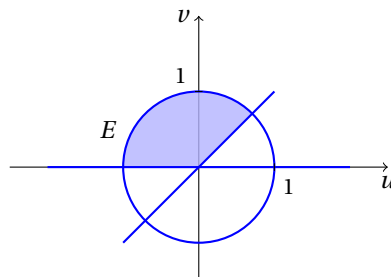


Men att tänka ut detta är onödigt jobb! Vi kan ju istället genast transformera ellipsskivan $\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 \leq 1$ till enhetscirkelskivan $u^2 + v^2 \leq 1$ med hjälp av det linjära variabelbytet

$$u = x + \frac{1}{2}y, \quad v = \frac{1}{2}y.$$

Om vi här löser ut $x = u - v$ och $y = 2v$ och sätter in i villkoren $x \leq 0$ och $y \geq 0$, så finner vi att \tilde{D} avbildas på den cirkelsektor E i uv -planet som ges av

$$u^2 + v^2 \leq 1, \quad u - v \leq 0, \quad v \geq 0.$$



Så det var alltså *inte* nödvändigt att veta exakt hur området \tilde{D} ser ut! (Och även om vi har tagit reda på hur \tilde{D} ser ut, så verkar det inte särskilt trevligt att direkt försöka integrera över det området. För

¹²Skriv ekvationen $x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 = 1$ som

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

Om man vrider xy -koordinatsystemet så att axlarna ligger längs egenvektorriktningarna för matrisen, nämligen $(1 \pm \sqrt{5}, 2)$ så kommer ekvationen i nya koordinater (säg x' och y') att få formen $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 1$, där egenvärdena är $\lambda_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5})/4$. Längderna på halvaxlarna är alltså $1/\sqrt{\lambda_{1,2}} = 2/\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}$, och de ligger längs egenvektorriktningarna.

att skriva $\iint_{\tilde{D}}$ som en upprepad enkelintegral i x och y måste man ju dela upp \tilde{D} i delområden, oavsett om man tar x -integralen eller y -integralen innerst.)

Eftersom $dx dy = |\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}| du dv = 2 du dv$ så får vi

$$\iint_{\tilde{D}} \left((1 - \frac{1}{2}y^2) - (x^2 + xy) \right) dx dy = \iint_E (1 - u^2 - v^2) 2 du dv,$$

vilket i sin tur, om vi byter till polära koordinater i uv -planet, ger oss svaret:

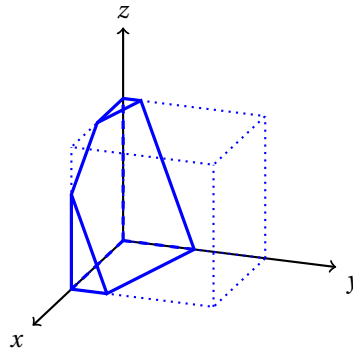
$$2 \iint_E (1 - u^2 - v^2) du dv = 2 \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi} \left(\int_{\rho=0}^1 (1 - \rho^2) \rho d\rho \right) d\varphi = \frac{3\pi}{8}.$$

Svar. Volymen av D är $3\pi/8$.

- **Exempel 2.** Beräkna

$$\iiint_D z dx dy dz, \quad D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x, y, z \in [0, 1], 2x + 8y + 3z \leq 4 \right\}.$$

Lösning med skivor (tvärsnitt för fixt z). Kroppen D fås uppenbarligen genom att skära enhetskuben i \mathbf{R}^3 med planet $2x + 8y + 3z = 4$ och bara behålla den del av kuben som ligger på den sida av planet som vetter mot origo:



(För att se hur planet $2x + 8y + 3z = 4$ ligger, notera att det skär axlarna i punkterna $(2, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{2}, 0)$ och $(0, 0, \frac{4}{3})$, och alltså innehåller den triangel som har sina hörn i dessa punkter.)

Eftersom vi ska integrera funktionen $f(x, y, z) = z$ så är det smidigt att använda skivor parallella med xy -planet, dvs. tvärsnitt för fixt z , av följande anledning. För varje $z \in [0, 1]$ bestämmer vi kroppens tvärsnitt D_z för detta z , alltså mängden av $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sådana att $(x, y, z) \in D$. När vi har gjort det kommer vi att kunna beräkna integralen såhär:

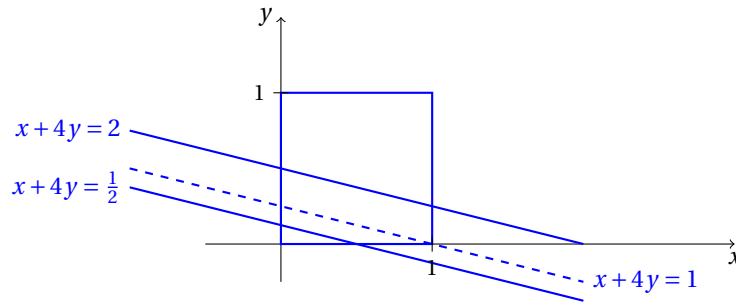
$$\iiint_D z dx dy dz = \int_{z=0}^1 \left(\iint_{D_z} z dx dy \right) dz = \int_{z=0}^1 \left(z \iint_{D_z} dx dy \right) dz = \int_{z=0}^1 z \text{Area}(D_z) dz.$$

Här kunde vi bryta ut z ur dubbelintegralen eftersom z är *konstant* när man integrerar över x och y , och kvar blev helt enkelt bara *arean* av D_z . Ifall vi kan räkna ut den arean *geometriskt* slipper vi undan dubbelintegrationen helt, så vi håller tummarna för att det ska bli så!

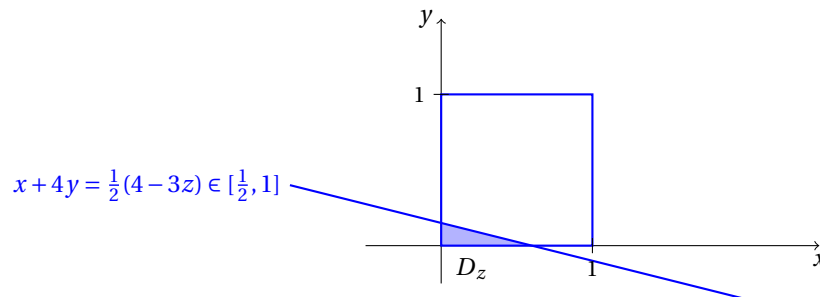
Mängden D_z ges av villkoren

$$x, y \in [0, 1], \quad x + 4y \leq \frac{4 - 3z}{2},$$

där vi alltså ska tänka på z som en konstant (för tillfället), och därför har flyttat över termen $3z$ i högerledet, så att den står tillsammans med konstanten 4 (och vi passade även på att dividera med 2 för att få enklare siffror i vänsterledet). Från dessa olikheter är det uppenbart att D_z är den del av enhetskvadraten i xy -planet som ligger nedanför linjen $x + 4y = \frac{1}{2}(4 - 3z)$. Eftersom $z \in [0, 1]$ kommer högerledet att ligga i intervallet $\frac{1}{2}(4 - 3z) \in [\frac{1}{2}, 2]$. Detta gör att två olika fall kan inträffa, beroende på om linjen skär enhetskvadraten ovanför hörnet $(1, 0)$ eller inte:



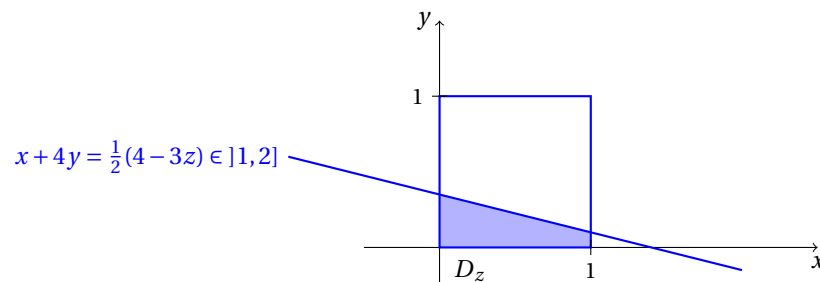
Gränsfallet är som synes när högerledet $\frac{1}{2}(4 - 3z)$ är lika med 1, alltså då $z = \frac{2}{3}$.
Så för $z \in [\frac{2}{3}, 1]$ blir tvärsnittet D_z en **triangel**:



Arean av denna triangel är basen $\frac{1}{2}(4 - 3z)$ gånger höjden ($= \frac{1}{4}$ av basen) gånger $\frac{1}{2}$:

$$\text{Area}(D_z) = \frac{1}{32}(4 - 3z)^2, \quad z \in [\frac{2}{3}, 1].$$

Men för $z \in [0, \frac{2}{3}[$ blir det istället ett **parallelltrapets**:



Och arean av detta är basen 1 gånger medelhöjden $\frac{1}{4}(\frac{1}{2}(4 - 3z) - \frac{1}{2})$ (alltså y -värdet då $x = \frac{1}{2}$):

$$\text{Area}(D_z) = \frac{3}{8}(1 - z), \quad z \in [0, \frac{2}{3}[.$$

(Förresten, visst kan du se i den tredimensionella figuren varför tvärsnitten ser ut såhär?)

Allt som allt får vi till slut

$$\begin{aligned} \iiint_D z \, dx \, dy \, dz &= \int_{z=0}^1 z \, \text{Area}(D_z) \, dz = \int_0^{\frac{2}{3}} z \cdot \frac{3}{8}(1 - z) \, dz + \int_{\frac{2}{3}}^1 z \cdot \frac{1}{32}(4 - 3z)^2 \, dz \\ &= \dots = \frac{5}{108} + \frac{67}{3456} = \frac{227}{3456}. \end{aligned}$$

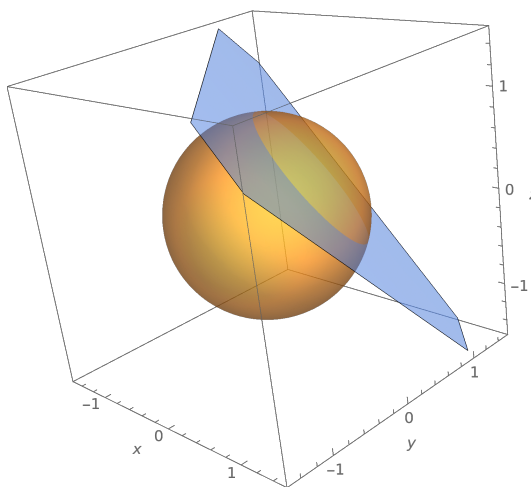
Svar. Integralen är lika med 227/3456.

- **Exempel 3.** Beräkna

$$\iiint_D x \, dx \, dy \, dz, \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 1\}.$$

Lösning med variabelbyte och symmetriknep och skivor. Kroppen D utgörs av den del av enhetsklotet som ligger bortom planet $x + y + z = 1$ (från origo sett).

Detta plan skär axlarna i punkterna $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$, och dessa punkter ligger även på enhets sfären. Snittytan där planet skär klotet är alltså en cirkelskiva, vars randcirkel går genom dessa tre punkter.¹³



Eftersom "kalotten" D ligger snett i xyz -koordinatsystemet är det nästan omöjligt att integrera i dessa variabler. Det vi ska göra är att **vrida koordinatsystemet** så att en av axlarna pekar i symmetririktningen, dvs. längs linjen $x = y = z$.

Så vi inför en ny ON-bas där den första basvektorn är parallell med denna linje (och normerad):

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vektorn \mathbf{f}_2 valdes här lite godtyckligt; det enda som är viktigt är att den är vinkelrät mot \mathbf{f}_1 (och normerad). Sedan tar man $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$ för att få ett höger-ON-system. Basbytesmatrisen P bildas genom att sätta vektorerna $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ som kolonner, och då gäller som bekant följande samband mellan de gamla koordinaterna (x, y, z) och de nya koordinaterna (u, v, w) (där u -axeln alltså går i \mathbf{f}_1 -riktningen, osv.):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Från första raden kan man här läsa av $x = u/\sqrt{3} + v/\sqrt{2} + w/\sqrt{6}$, och motsvarande för y och z från rad två och tre.

Eftersom vi bara har vridit koordinatsystemet kommer enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ att fortfarande vara enhetsklotet, dvs. det beskrivs i de nya variablerna av olikheten $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$. Vad gäller olikheten $x + y + z \geq 1$ är det bara att sätta in uttrycken för x, y, z och förenkla, och då får man

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)u + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)v + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}}\right)w \geq 1,$$

¹³Det blir inte *triangeln* med dessa punkter som hörn, vilket somliga tror ibland! (När du skär rakt genom ett äpple med kniv brukar inte snittytan bli triangulär, eller hur? Jfr. övning 1.9d.)

dvs. $\sqrt{3}u + 0v + 0w \geq 1$, dvs.

$$u \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Man hade kunnat se detta ur det *omvända* koordinatsambandet också:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

I första raden står det ju $u = (x + y + z)/\sqrt{3}$ svart på vitt! Man ser här också att detta gäller oavsett vad som står i rad 2 och 3, dvs. det spelar ingen roll exakt vad \mathbf{f}_2 och \mathbf{f}_3 är, bara man har valt dem så att basbytesmatrisen uppfyller $P^{-1} = P^t$, dvs. att den nya basen är en ON-bas.

Hur som helst, det nya området blir alltså

$$E = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1, u \geq 1/\sqrt{3}\},$$

och vi har också $dx dy dz = du dv dw$ eftersom volymskalans för en vridning är 1 (determinanten av basbytesmatrisen P är lika med 1; att vrida ett föremål ändrar inte dess volym).

Det finns ett fiffigt symmetriknep, som egentligen inte är nödvändigt för att kunna räkna ut integralen, men som vi kan utnyttja för att få enklare räkningar. Sådär: Kalla integralen för I . Eftersom x , y och z förekommer helt symmetriskt i olikheterna som definierar området D , så skulle man få *samma* värde I om man integrerade y eller z över D , istället för x :

$$I = \iiint_D x dx dy dz = \iiint_D y dx dy dz = \iiint_D z dx dy dz.$$

Addition av dessa tre integraler ger

$$I + I + I = \iiint_D x dx dy dz + \iiint_D y dx dy dz + \iiint_D z dx dy dz = \iiint_D (x + y + z) dx dy dz,$$

dvs.

$$I = \frac{1}{3} \iiint_D (x + y + z) dx dy dz.$$

Fördelen med att räkna ut I på detta sätt är att integranden $x + y + z$ bara blir $\sqrt{3}u$ i nya variabler, medan integranden x i den ursprungliga integralen skulle ha blivit $u/\sqrt{3} + v/\sqrt{2} + w/\sqrt{6}$. (Och för att skriva upp vad x blir måste vi specificera exakt hur vi har valt \mathbf{f}_2 och \mathbf{f}_3 , medan vi egentligen inte hade behövt göra detta för att skriva upp vad $x + y + z$ blir; av symmetriskäl vet vi ju att valet av \mathbf{f}_2 och \mathbf{f}_3 inte ska spela någon roll, så det är ju skönt att inte behöva dra in dem i uträkningarna alls!)

Sammanfattningsvis är vi nu framme vid följande:

$$I = \frac{1}{3} \iiint_D (x + y + z) dx dy dz = \frac{1}{3} \iiint_E \sqrt{3}u du dv dw = \frac{1}{\sqrt{3}} \iiint_E u du dv dw,$$

och denna integral kan vi enkelt beräkna med tvärsnitt för fixt u , ungefär som i det förra exemplet. Tvärsnittet av E för fixt $u \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1]$ är samma som tvärsnittet av $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$, alltså

$$E_u = \{(v, w) \in \mathbf{R}^2 : v^2 + w^2 \leq 1 - u^2\},$$

alltså en cirkelskiva med radie $\sqrt{1 - u^2}$ och därmed area $\pi(1 - u^2)$, så integralen blir

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iiint_E u du dv dw = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{u=\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left(\iint_{E_u} u dv dw \right) du = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 u \text{Area}(E_u) du \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 u(1 - u^2) du = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{9} = \frac{\pi\sqrt{3}}{27}. \end{aligned}$$

Svar. Integralen är lika med $\pi\sqrt{3}/27$.

Lektion 14

- Diverse trippelintegraler: 6.25, 6.26, 6.27, 6.22*, 6.23*.
(Uppgift 6.26a går att lösa genom att direkt byta till rymdpolära koordinater, men man kan göra det lättare för sig t.ex. genom att använda symmetri på liknande sätt som i exemplet ovan. En liten utmaning: vem hittar den kortaste lösningen?)
- Diverse volymsuträkningar: 6.30, 6.31, 6.32, 6.36, 6.38.
- Massa hos kropp med icke-konstant densitet: 6.39, 6.40.
- Tyngdpunktsberäkningar: 6.41, 6.42.
- Några volymer till: 6.33*, 6.34*, 6.35*, 6.37*.

Föreläsning 15. Generaliserade multipelintegraler.

- Sjödin: Avsnitt 12.4, 12.5.
Neymark: Avsnitt 6.5, 7.4.
Persson & Böiers: Avsnitt 6.6.
- Definition av generaliserad multipelintegral. (Obegränsat område och/eller obegränsad funktion.)
- Konvergent = har ett ändligt värde.
Divergent = har inget ändligt värde.
(En divergent integral kan "divergera mot ∞ " eller "divergera mot $-\infty$ ", och i sådana fall tillåter man sig vanligen att skriva $\iint_D(\dots) = \infty$ resp. $\iint_D(\dots) = -\infty$. Eller så kan den helt sakna meningsfullt värde, och då skriver man såklart inte att den är lika med någonting alls, inte ens ∞ eller $-\infty$.)
- **Funktioner som inte växlar tecken** i integrationsområdet kan integreras "som vanligt", dvs. med hjälp av variabelbyten och upprepad enkelintegration (där enkelintegralerna kan vara den typ av generaliserade integraler som ni har sett i envariabelanalysen).
(Man kan också använda en s.k. *uttömmande följd* av områden.)
Integralen av en icke-negativ funktion kan bara divergera på ett sätt, nämligen "mot ∞ ", dvs. värdet av en sådan integral är antingen ett vanligt (icke-negativt) reellt tal eller ∞ . Och på samma sätt kan integralen av en icke-positiv funktion bara divergera på ett sätt, nämligen "mot $-\infty$ ".
- **Om funktionen växlar tecken** i integrationsområdet kan integralen vara divergent på mer komplicerade sätt, som har med "oändligheten minus oändligheten"-problematik att göra.
I detta fall integrerar man **separat** över de **delområden** där funktionen är positiv resp. negativ, och lägger ihop de två resultaten sedan, *förutsatt att båda är ändliga*.
Båda delintegralerna måste vara konvergenta för att hela integralen ska räknas som konvergent. (Begreppet "betingad konvergens" finns alltså inte för multipelintegraler; konvergens är lika med absolutkonvergens här.)
- Vid uträkning av **generaliserade** multipelintegraler måste man alltså **undersöka ifall integranden** (dvs. funktionen som ska integreras) **växlar tecken på integrationsområdet** eller inte, och även om man kommer fram till att den inte gör det, så måste man **påpeka** detta när man redovisar uträkningen, annars är inte motiveringen fullständig.

Lektion 15

- Exempel på att uträkning med två olika uttömmande följder ger samma resultat: 6.43.
- Generaliserade dubbelintegraler: 6.44, 6.45, 6.46, 6.48, 6.47*, 6.52*, 6.53*.
(Glöm inte att först **undersöka om integranden växlar tecken eller inte!**)
- Generaliserade trippelintegraler: 6.50, 6.51.

Alla uppgifter på en sida

Lektion 1. 2.1, 2.2ab, 2.3, K0, K1, K2, K3abcde, K3fg*, K5, K7, K4*, K6*, 2.42, K9*.

Lektion 2. 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.7, 1.9, 1.10, 1.5*, 1.6*, 1.11*, K12, K13.

Lektion 3. 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.7*, 6.6, 6.8.

Lektion 4. 1.21, 1.22, 1.23ab, 1.24abc, 1.25, 1.26, 1.20a*, 1.27*, 1.28, 1.29, 1.30*.

Lektion 5. 2.4, 2.6a*, 2.12, 2.5, 2.17, 2.18*, K10*, 2.13, 2.14, 2.16*.

Lektion 6. 3.1ac, 3.2ac, 3.4, 3.6, 3.7, 2.19, 2.20, 2.21, 2.23, 2.28*, 2.39*, 2.40*.

Lektion 7. 2.43, 2.55, 2.56, 2.57ab, 2.58, 2.59*, 2.60*, 2.54, 2.44, 2.45, 2.46, 2.48, 2.49, 2.50, 2.51, 2.52.

Lektion 8. 2.7, 2.8, 2.9, 2.6b*, 2.11abcdef, 2.11gh*, 2.22, 2.26, 2.27*, 2.29*, 2.31, 2.33, 2.41, 2.32, 2.34, 2.37, 2.36*, 2.25*.

Lektion 9. 3.8, 3.9ab, 3.9c*, 3.10, 3.11.

Lektion 10. 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, 6.13, 6.29.

Lektion 11. 2.65, 2.64ac, 2.62abcdefg, 2.62hi*, 2.63*, 2.66, 2.67*, 2.68, 2.69, 2.70abcdgh, 2.70efij*, K11, 2.71, 2.73*, 2.74*.

Lektion 12. 3.12, 3.13, 3.16*, 3.17*, 3.15, 3.18*, 3.19, 3.20, K14, 3.14*.

Lektion 13. 6.16, 6.20, 6.21, 6.19, 6.17, 6.18, 6.24.

Lektion 14. 6.25, 6.26, 6.27, 6.22*, 6.23*, 6.30, 6.31, 6.32, 6.36, 6.38, 6.39, 6.40, 6.41, 6.42, 6.33*, 6.34*, 6.35*, 6.37*.

Lektion 15. 6.43, 6.44, 6.45, 6.46, 6.48, 6.47*, 6.52*, 6.53*, 6.50, 6.51.