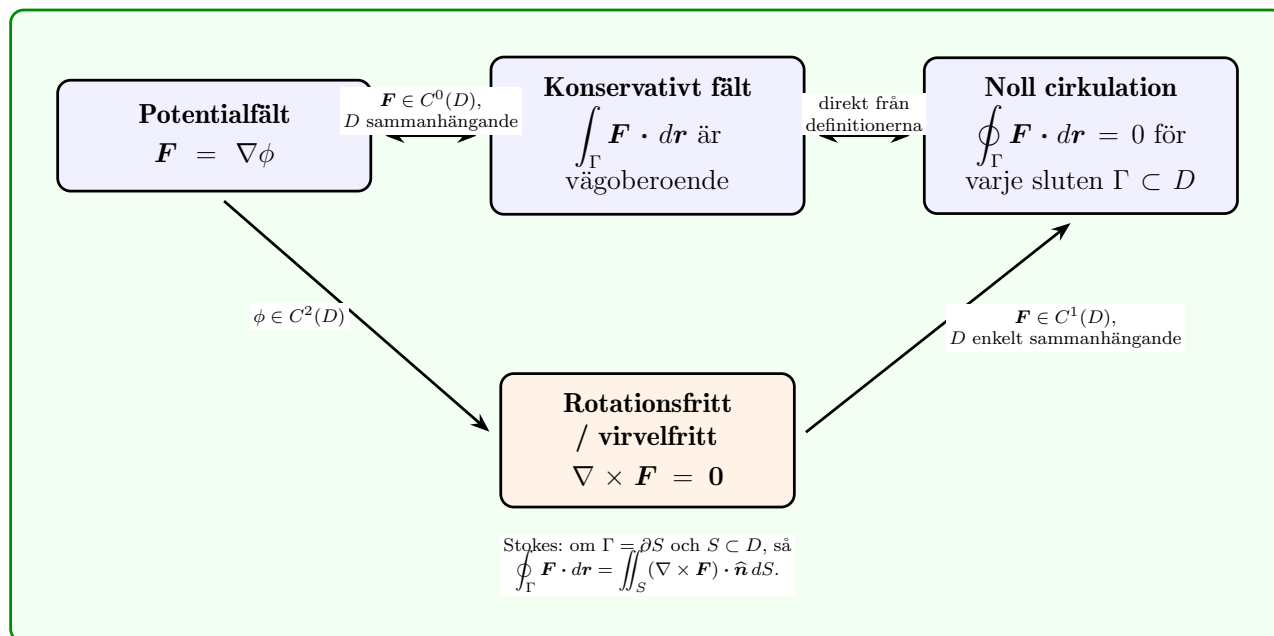


Potentialer, rotation, cirkulation, och konservativa vektorfält

Johan Thim, MAI

1 oktober 2026

1 Begrepp och implikationer



Om $\mathbf{F} \in C^1(D)$ och D är enkelt sammanhängande är alla fyra villkoren ekvivalenta.

Varning: hål i området. Om D inte är enkelt sammanhängande kan $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ utan att fältet är ett potentialfält. I det läget kan en sluten kurva som omsluter ett hål ha en cirkulation som inte är noll. Villkoret "rotationsfritt" är ett lokalt villkor, medan vägoberoende och noll cirkulation (för alla slutna kurvor) är globala villkor.

Anmärkning. Kryssprodukten är en operation i $\mathbf{R}^3$. För ett vektorfält i planet, säg

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \hat{\mathbf{x}} + Q(x, y) \hat{\mathbf{y}},$$

identifierar vi därför $\mathbf{R}^2$ med det orienterade planet $\{(x, y, 0)\} \subset \mathbf{R}^3$ och utvidgar därefter fältet till $\tilde{\mathbf{F}}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$. Med andra ord: vi låtsas som att det är i $\mathbf{R}^3$ och sätter $z = 0$. Då blir

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{F}} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Rotationen är alltså vinkelrät mot planet, och all information ryms i dess orienterade normal-komponent. Därför definierar man vanligen den tvådimensionella rotationen som skalären

$$\text{rot } \mathbf{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Tecknet beror på planets orientering: med normalen $\hat{\mathbf{z}}$ är positiv rotation moturs. Konstruktionen är faktiskt inte en godtycklig tilläggsdimension, utan ett sätt att få med planets orienterade areaelement och även den lokala cirkulationstätheten. Greens formel blir med denna terminologi precis den plana versionen av Stokes sats.

Begreppen i figuren. Låt $D \subset \mathbf{R}^3$ vara ett öppet område och låt $\mathbf{F}: D \rightarrow \mathbf{R}^3$ vara ett vektorfält. Ett *potentialfält* är ett fält som kan skrivas $\mathbf{F} = \nabla\phi$ för någon skalärvärd funktion $\phi: D \rightarrow \mathbf{R}$ (definierad på hela D). Funktionen ϕ kallas en potential till $\mathbf{F}$. Deriverbarhetskraven som ställs på ϕ och $\mathbf{F}$ i de olika riktningarna ska ses som tillräckliga, inte nödvändiga (de behövs på grund av hur vi väljer att visa påståendena i den här kursen); mer om detta senare för den intresserade.

Ett vektorfält kallas för *konservativt* om kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen mellan integrationskurvans ändpunkter. Det betyder att två kurvor i D med samma start- och slutpunkt ger samma integralvärde.

För en sluten kurva Γ i D kallas $\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ för fältets *cirkulation* längs Γ . Att cirkulationen är noll för varje sluten kurva i D är ett globalt villkor: fältet får inte ha någon kvarvarande cirkulation runt något hål eller någon annan sluten väg i området. Detta villkor är ekvivalent med att fältet är konservativt, direkt från definitionen.

Fältet kallas *rotationsfritt*, och ibland *virvelfritt*, om $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ i varje punkt i D . Detta är ett lokalt deriverbarhetsvillkor. Varje tillräckligt glatt (deriverbart) potentialfält är rotationsfritt eftersom $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$. Den omvända slutsatsen är inte alltid sann: för att ett rotationsfritt fält säkert ska ha en global potential behövs också ett topologiskt villkor på området, i denna kurs formulerar vi det som att D ska vara enkelt sammanhängande.

Sammanhängande och enkelt sammanhängande områden. I kursens geometriska tolkning är ett område D *sammanhängande* om varje par av punkter i D kan förbindas med en kontinuerlig kurva som helt ligger i D . Om D består av två eller fler åtskilda delar (disjunkt mängder) är området inte sammanhängande.

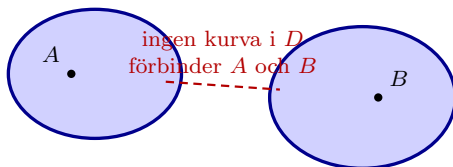
Ett sammanhängande område är *enkelt sammanhängande* om varje sluten kurva i D kontinuerligt kan dras samman till en punkt utan att någon del av kurvan lämnar D . Ett område med ett genomgående hål kan hindra en sådan sammandragning. Tänk i termer av ett gummiband: skulle det gå att dra ihop gummibandet utan att ha sönder det och utan att lämna området?

Ordet "hål" måste användas försiktigt i tre dimensioner. En annulus i planet är inte enkelt sammanhängande, eftersom en sluten kurva runt den borttagna disken inte kan dras samman till en punkt utan att vi lämnar området. Ett tredimensionellt område med ett genomgående cylinderhål har samma problem.

Däremot är ett klotskal, området mellan två sfärer med samma mittpunkt, enkelt sammanhängande. Detta följer av att en sluten kurva kan glida runt det inre klotet och dras samman till en punkt. På samma sätt är ett punkterat klot i tre dimensioner enkelt sammanhängande. Det kan

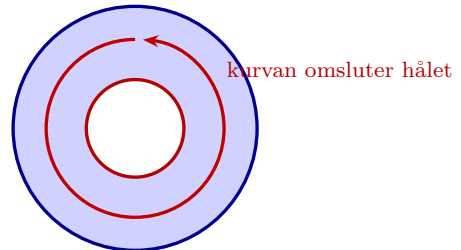
vara värt att poängtera att det finns starkare topologiska krav som skulle utesluta dessa två exempel också, men det är inget som behövs i denna kurs.

Ej sammanhängande



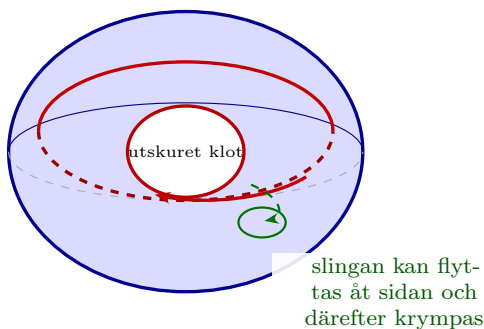
$D = D_1 \cup D_2$ med två disjunkta delar. Området är inte sammanhängande.

Sammanhängande, men inte enkelt sammanhängande (annulus i $\mathbb{R}^2$)



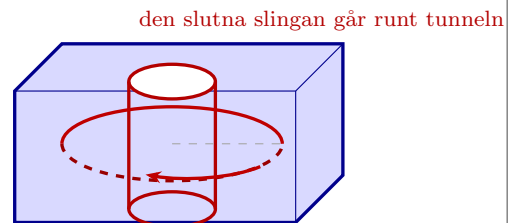
Kurvan kan inte dras samman till en punkt utan att korsa den borttagna skivan.

Enkelt sammanhängande i $\mathbb{R}^3$ (klotskal eller punkterat klot)



Den röda slutna kurvan går runt det inre klotet, men är inte låst. I tre dimensioner kan den flyttas åt sidan och dras samman.

Sammanhängande, men inte enkelt sammanhängande (genomgående cylinderhål i $\mathbb{R}^3$)



Cylinderhålet går genom hela kroppen. Den röda slutna slingan omsluter tunneln och kan därför inte dras samman i området.

Konsekvens för potentialfält. För ett deriverbart, säg ett C^1 -fält, på ett enkelt sammanhängande område, räcker villkoret $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ för att fältet ska vara ett potentialfält. På annulusområdet och i ett tredimensionellt område med ett genomgående cylinderhål kan denna slutsats misslyckas: ett rotationsfritt fält kan mycket väl fortfarande ha cirkulation runt hålet som inte är noll. Ett klotskal eller ett punktat klot i tre dimensioner orsakar inte samma hinder, för en sluten kurva kan flyttas runt det borttagna klotet och därefter dras samman. Dessa områden är därför fortfarande enkelt sammanhängande. Var försiktig och rita figur!

2 *Fördjupning: hur skarpa är förutsättningarna?

I huvudframställningen är det naturligt att anta att $\mathbf{F} \in C^1(D)$ och att D är enkelt sammanhängande. Under dessa antaganden får man en ren ekvivalens mellan potentialfält, konservativa fält, noll cirkulation längs slutna kurvor och även rotationsfria vektorfält. Antagandena är emellertid starkare än vad som behövs för flera av de enskilda implikationerna. Exakt vad som behövs leder till en ganska djup diskussion om vad alla objekt betyder, men vi kan åtminstone undersöka lite närmare vad kraven blir.

2.1 Potentialfält ger vägoberoende utan kontinuitet hos fältet

Antag att $\phi : D \rightarrow \mathbf{R}$ är differentierbar (partiellt deriverbar är inte tillräckligt) och att

$$\mathbf{F} = \nabla \phi.$$

För en styckvis C^1 -kurva $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow D$ ger kedjeregeln

$$\frac{d}{dt} \phi(\mathbf{r}(t)) = \nabla \phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

Om funktionen

$$t \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

är integrerbar på $[a, b]$, får man därför

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)).$$

Det är alltså differentierbarheten hos potentialen och kedjeregeln som är den centrala mekanismen. Kontinuitet hos $\mathbf{F} = \nabla \phi$ är inte nödvändig för själva slutsatsen.

Ett exempel på detta (i $\mathbf{R}^2$) är

$$\phi(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Funktionen är differentierbar (inte självklart) i origo med $\nabla \phi(0, 0) = \mathbf{0}$. För $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ är

$$\nabla \phi = \left(2r \sin \frac{1}{r} - \cos \frac{1}{r} \right) \hat{\mathbf{r}}.$$

Gradienten saknar gränsvärde då $r \rightarrow 0$ och är därför inte kontinuerlig i origo. Trots detta kan fältet skrivas som en gradient och kurvintegralen bestäms, för de kurvor där den integralen är definierad, av potentialens värde i ändpunkterna.

Teknisk reservation. Om man tillåter mycket oregelbundna potentialer och kurvor måste man också precisera vilken integral som används och varför integranden är integrerbar i den meningen (mer om det senare). Antagandet att $\phi \in C^1(D)$ är därför ett praktiskt och robust antagande som gör att Riemannintegralen finns, men det är inte logiskt nödvändigt för varje enstaka gradientfält.

2.2 Vägberoende och noll cirkulation är i grunden globala begrepp

Antag att de aktuella kurvintegralerna existerar och att D är sammanhängande. Då gäller

$$\text{vägberoende} \iff \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ för varje sluten kurva } \Gamma \subset D.$$

Denna ekvivalens bygger endast på att man kan sätta samman en väg med den omvända riktningen av en annan väg. Den kräver i sig varken rotation, partiella derivator, differentierbarhet eller ens att området är enkelt sammanhängande.

Om D inte är sammanhängande får påståendet tillämpas separat på varje sammanhängande komponent. Det finns då i allmänhet ingen kurva i D mellan punkter i olika komponenter.

2.3 Från vägberoende till potential används ofta kontinuitet

Om kurvintegralen är vägberoende kan man fixera en baspunkt $\mathbf{a} \in D$ (godtyckligt vilken) och definiera

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Vägberoendet gör definitionen entydig. Beroende på $\mathbf{a}$ kan ses som att vi fixerar den additiva konstanten som finns hos potentialer. För att därefter visa att funktionen ϕ är differentierbar och att $\nabla\phi = \mathbf{F}$ studerar man korta linjesegment i koordinatriktningarna. I standardbeviset används kontinuitet hos $\mathbf{F}$ när medelvärdessatsen används. Därför är

$$\mathbf{F} \in C^0(D) \quad \text{och} \quad D \text{ vägsammanhängande}$$

ett enkelt tillräckligt villkor för implikationen

$$\text{vägberoende} \implies \mathbf{F} = \nabla\phi.$$

Svagare regularitet kan räcka, men då måste både potentialens differentierbarhet och linjeintegralens innebörd behandlas mer noggrant.

2.4 Från potentialfält till rotationsfritt krävs att rotationen kan bildas

Den formella identiteten

$$\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$$

bygger på att vi kan byta ordningen på blandade andraderivator. Antagandet

$$\phi \in C^2(D)$$

är ett enkelt tillräckligt villkor för detta som är bekant från flervariabelanalysen. Ekvivalent kan man i den vanliga klassiska situationen anta att $\mathbf{F} = \nabla\phi$ tillhör $C^1(D)$.

Detta regularitetsantagande är av en annan typ än att området är enkelt sammanhängande. Regulariteten (deriverbarheten) behövs för att differentialuttrycket $\nabla \times \mathbf{F}$ ska vara klassiskt definierat och för att blandade derivator ska kunna jämföras. Topologin hos D spelar ingen roll för denna riktning.

Exemplet ovan visar också varför man måste vara försiktig: ett fält kan vara ett potentialfält men ändå sakna kontinuerliga partiella derivator. Då är satsen ”potentialfält ger rotationsfrihet” inte direkt ett påstående i den klassiska C^1 -meningen vid den singulära punkten, även om en svagare, distributionell formulering kan vara möjlig.

2.5 Från rotationsfritt till potentialfält krävs ett globalt topologiskt villkor

Antag att

$$\mathbf{F} \in C^1(D), \quad \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Villkoret är lokalt: det beskriver vad som händer i varje liten omgivning kring varje punkt i D . För att dra slutsatsen att en global potential existerar måste man utöver detta dessutom kunna kontrollera vad som händer kring alla slutna kurvor i området.

Ett vanligt tillräckligt villkor är att D är öppen och enkelt sammanhängande. Då kan en sluten kurva spännas upp eller deformeras på ett sätt som, tillsammans med Stokes sats, ger noll cirkulation. Följden blir

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \implies \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \implies \mathbf{F} = \nabla \phi.$$

Kravet att området är enkelt sammanhängande är ett naturligt generellt villkor, men inte ett nödvändigt villkor för ett visst enskilt fält. Ett särskilt fält kan ha en global potential även på ett område som har genomskärande hål. Det som inte gäller är att *varje* rotationsfritt C^1 -fält på ett sådant område måste vara ett potentialfält.

Petigt? Standardmotexemplet i det punkterade planet $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ är

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{y}}.$$

Fältet är rotationsfritt på $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, men cirkulationen runt en positivt orienterad cirkel kring origo är 2π (visa det!). Därför finns ingen global potential på hela området (det vill säga i det punkterade planet).

2.6 En mer precis sammanfattning av implikationerna

För de kurvor som används nedan förutsätts att linjeintegralerna är väldefinierade.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \nabla \phi, \quad \phi \text{ differentierbar} &\implies \text{ändpunktsformeln längs tillåtna kurvor,} \\ \text{ändpunktsformeln} &\implies \text{vägoberoende,} \\ \text{vägoberoende} &\iff \text{noll cirkulation längs varje sluten kurva,} \\ \text{vägoberoende, } \mathbf{F} \in C^0(D) &\implies \mathbf{F} = \nabla \phi, \\ \mathbf{F} = \nabla \phi, \quad \phi \in C^2(D) &\implies \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \\ \left. \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F} \in C^1(D), \\ D \text{ enkelt sammanhängande} \end{array} \right\} &\implies \mathbf{F} = \nabla \phi. \end{aligned}$$

Praktisk slutsats. Antagandena $\mathbf{F} \in C^1(D)$ och att D är enkelt sammanhängande är utmärkta som en lättanvänd huvudsats: de gör alla vanliga villkor ekvivalenta. För att förstå gränsen för teorin bör man emellertid hålla isär tre typer av krav:

- **integrerbarhet längs kurvor**, så att kurvintegralerna är definierade;
- **regularitet**, så att gradient, rotation och kedjeregeln kan användas i önskad klassisk mening;
- **topologi**, så att lokalt rotationsfria fält också får en global potential.

3 ****Svaga potentialer och en mer generell integrationsteori (återblick efter TATA77 och TATM85)**

Okej.. detta avsnitt förtjänar nog mer än en dubbelstjärna-markering egentligen. Men det har växt fram lite från mina egna funderingar av var vektoranalysen bär iväg om man håller sig på $\mathbf{R}^3$.

I vektoranalysen möter man först en ganska ren kedja av idéer. Ett fält är ett potentialfält om

$$\mathbf{F} = \nabla\phi,$$

kurvintegralen blir då endast en skillnad mellan potentialvärden i ändpunkterna, och tillräckligt släta (deriverbara) potentialfält är rotationsfria. Det är en bra första bild, men den blandar också ihop flera olika frågor: om derivator finns punktvist, om de är kontinuerliga, om en integral existerar, om en identitet gäller nästan överallt eller i distributionsmening, och om områdets geometri tillåter att lokala potentialer fogas ihop till en global. Detta är långt ifrån trivialt att reda ut (och hyfsat modern teori).

Efter distributionsteorin i TATA77 och Lebesgueintegralen i TATM85 går det att skilja dessa frågor åt. Resultatet är inte att de klassiska satserna försvinner. Gradient, rotation och divergens kan definieras utan punktvisa derivator, primitiver kan förstås genom absolut kontinuitet, och en potential kan existera i ett Sobolevrum även när ingen klassisk C^1 -potential finns.

3.1 **Lebesgueintegralen flyttar fokus från punktvist regularitet**

Riemannintegralen är väl anpassad till kontinuerliga funktioner på kompakta intervall. Lebesgueintegralen är i stället byggd för mätbara funktioner och att enkelt kunna göra gränsövergångar. Funktioner som är lika nästan överallt representerar samma element i L^p , och centrala konvergenssatser gör det möjligt att passera till gränsen under integralen på ett sätt som är svårt (eller otympligt) att formulera enbart med Riemannintegralen.

För vektoranalysen betyder detta att man naturligt arbetar med

$$\mathbf{F} \in L^p(D; \mathbf{R}^n)$$

i stället för att omedelbart kräva kontinuitet. Ett sådant fält är bara definierat nästan överallt (objekt i L^p är egentligen ekvivalensklasser), men volymintegraler av fältet är ändå entydigt definierade (för rimliga volymer). Derivatorna behöver inte heller vara vanliga funktioner i

klassisk mening; de kan först definieras som distributioner och, om de råkar representeras av L^p -funktioner, som svaga derivator.

Detta löser dock inte automatiskt frågan om kurvintegraler. En kurva har n -dimensionellt Lebesguemått noll i $\mathbf{R}^n$, så ett godtyckligt L^p -fält har inget kanoniskt punktvärde längs kurvan. Uttrycket

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

kräver därför mer än att $\mathbf{F}$ tillhör ett Lebesguerum. Man behöver en lämplig representant, en så kallad spårteori, eller i form av extra regularitet. Detta är en viktig skillnad: svaga derivator och Lebesgueintegraler gör volymteorin robust, men endimensionella spår längs en enskild kurva är nu en separat fråga som inte är trivial.

3.2 Distributions- och svag derivata

Låt $D \subset \mathbf{R}^n$ vara ett öppet område och låt $u \in L^1_{\text{loc}}(D)$. Funktionen u bestämmer distributionen

$$\langle u, \psi \rangle = \int_D u \psi \, dx, \quad \psi \in C_c^\infty(D).$$

Distributionsderivatan $\partial_j u$ definieras genom att flytta derivatan till testfunktionen:

$$\langle \partial_j u, \psi \rangle = -\langle u, \partial_j \psi \rangle = - \int_D u \partial_j \psi \, dx.$$

Definitionen är vald så att den vanliga partiella integrationen finns kvar utan randterm, eftersom testfunktionen har kompakt stöd i D . Om det finns en funktion $g_j \in L^1_{\text{loc}}(D)$ sådan att

$$\int_D u \partial_j \psi \, dx = - \int_D g_j \psi \, dx$$

för alla testfunktioner ψ , kallas g_j den svaga derivatan av u med avseende på x_j . Då skriver man fortfarande $g_j = \partial_j u$, men likheten gäller nästan överallt och förstås via integralidentiteten, inte via en punktvis differenskvot.

Sobolevrummet $W^{1,p}(D)$ består av de funktioner $u \in L^p(D)$ vars första svaga derivator också tillhör $L^p(D)$. En svag potential till ett fält $\mathbf{F} \in L^p(D; \mathbf{R}^n)$ är därför naturligt en funktion

$$\phi \in W^{1,p}_{\text{loc}}(D)$$

sådan att

$$\nabla \phi = \mathbf{F} \quad \text{nästan överallt i } D.$$

Ekvivalent kan man kräva att

$$\int_D \phi \partial_j \psi \, dx = - \int_D F_j \psi \, dx$$

för varje j och varje $\psi \in C_c^\infty(D)$.

Potentialen är fortfarande entydig upp till en konstant på varje sammanhängande komponent. Det är egentligen samma typ av bevis som tidigare, men påståendet "gradienten är noll" tolkas nu nästan överallt istället för punktvis. För ett sammanhängande område gäller att en Sobolevfunktion med svag gradient noll nästan överallt, är lika med en konstant nästan överallt.

3.3 Primitiver i en dimension

I en dimension blir sambandet mellan Lebesgueintegration och svaga derivator särskilt tydligt. Om $f \in L^1(a, b)$ och

$$F(x) = c + \int_a^x f(t) dt,$$

där integralen är en Lebesgueintegral, så är F absolutkontinuerlig och

$$F'(x) = f(x) \quad \text{för nästan alla } x \in (a, b).$$

Omvänt har varje absolutkontinuerlig funktion en derivata nästan överallt, derivatan ligger i L^1 , och

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) dt.$$

Detta är den lämpliga generaliseringen av integralkalkylens fundamentalsats. Den svaga derivatan bestämmer inte i allmänhet en punktvis formel överallt, men den bestämmer en absolutkontinuerlig representant och därmed funktionen upp till en konstant. I själva verket kan $W^{1,1}(a, b)$ identifieras med de absolutkontinuerliga funktionerna vars derivata ligger i L^1 .

Distributionsteorin går ett steg längre. Varje distribution i en dimension har lokalt en distributionell primitiv. Om $T \in \mathcal{D}'(I)$ på ett intervall I , finns lokalt en distribution S sådan att

$$S' = T.$$

Primitiven är entydig upp till en konstant distribution. Diracs delta är det välkända exemplet:

$$H' = \delta_0$$

i distributionsmening, där H är Heavisidefunktionen. Här finns ingen klassisk derivata i sprängpunkten och ingen L^1 -funktion som representerar derivatan, men den distributionella derivatan är ändå fullt meningsfull.

3.4 Kedjeregeln i Sobolevrum

Den klassiska kedjeregeln kan inte användas direkt på godtyckliga svagt deriverbara funktioner. En robust standardform är följande. Om

$$u \in W^{1,p}(D)$$

och $G: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ är Lipschitzkontinuerlig, så är $G \circ u$ svagt deriverbar. För en lämplig nästan överallt definierad derivata G' gäller

$$\nabla(G \circ u) = G'(u)\nabla u \quad \text{nästan överallt,}$$

med den vanliga reservationen vid de punkter där G inte är klassiskt deriverbar. Om G är C^1 och G' är begränsad blir formeln renare.

För sammansättning med en kurva är situationen mer känslig. En Sobolevfunktion är en ekvivalensklass modulo mängder av mått noll, och en enskild kurva kan ligga i en sådan nollmängd. I många situationer finns ändå en bättre representant. Sobolevfunktioner är absolut

kontinuerliga på nästan alla linjer parallella med koordinataxlarna, och längs sådana linjer gäller den endimensionella fundamentalsatsen. För mer generella och allmänna kurvor behövs lämpliga spår- eller regularitetsresultat.

Om potentialen har högre Sobolevregularitet, exempelvis om $p > n$ på ett tillräckligt reguljärt område, ger Sobolevinbäddningssatser en kontinuerlig representant. Då blir det betydligt lättare att tolka potentialens ändpunktsvärden och att återknyta till den klassiska ändpunktsformeln. Men man ska fortfarande kontrollera vilken sats om sammansättning med kurvor som faktiskt används.

3.5 Svag gradient och ändpunktsformeln

Antag att

$$\phi \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D), \quad \mathbf{F} = \nabla \phi \quad \text{nästan överallt.}$$

Detta är en potential i svag mening. Den säger omedelbart något om volym- och distributionsidentiteter, men inte automatiskt att varje klassisk kurvintegral av varje representant för $\mathbf{F}$ är entydigt definierad.

När sammansättningen $\phi \circ \mathbf{r}$ är absolutkontinuerlig längs en absolutkontinuerlig kurva $t \mapsto \mathbf{r}(t)$, och när kedjeregeln gäller längs kurvan, får man

$$\frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t)) = \nabla \phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \quad \text{för nästan alla } t.$$

Lebesgueintegrering över parameterintervallet ger då

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)).$$

Ändpunktsformeln lever alltså kvar, men förutsättningarna flyttas från "allt är kontinuerligt" till tre mer precisa frågor:

- har ϕ en representant som kan användas längs kurvan,
- är $\phi \circ \mathbf{r}$ absolutkontinuerlig,
- är integranden Lebesgueintegrerbar?

Detta är mer omständigt. Betydligt mer omständigt. Ett L^p -fält har inte i sig väldefinierade punktvärden på en given kurva (eller någonstans). Man får därför inte skriva ändpunktsformeln för alla kurvor enbart från att $\mathbf{F} = \nabla \phi$ gäller nästan överallt, utan att först ange hur det så kallade spåret på kurvan förstås.

3.6 Rotation i distributionsmening

För ett lokalt integrerbart vektorfält $\mathbf{F} \in L_{\text{loc}}^1(D; \mathbf{R}^3)$ definieras den svaga (eller i distributionsmening) rotationen komponentvis. Ett kompakt sätt att skriva definitionen är

$$\langle \nabla \times \mathbf{F}, \boldsymbol{\psi} \rangle = \int_D \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) dx, \quad \boldsymbol{\psi} \in C_c^\infty(D; \mathbf{R}^3).$$

Tecknet är positivt eftersom rotationen är (formellt) självadjungerad under integration när randtermen försvinner. Villkoret

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{i } \mathcal{D}'(D)$$

betyder alltså att integralen ovan är noll för alla testfält.

Om $\mathbf{F} = \nabla\phi$ i distributionsmening, så gäller alltid

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0} \quad \text{i } \mathcal{D}'(D).$$

Här behövs inte $\phi \in C^2$. Distributionella derivator kommuterar alltid, så identiteten är inbyggd i teorin. Detta är en av de tydligaste vinsterna med distributionsspråket: den klassiska regulariteten ersätts av en svag identitet som fortfarande är exakt.

Man kan på samma sätt definiera svag divergens. För $\mathbf{F} \in L^1_{\text{loc}}$ är

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{F}, \psi \rangle = - \int_D \mathbf{F} \cdot \nabla \psi \, dx.$$

Då gäller identiteten $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ i distributionsmening utan klassiska andraderivator. Finurligt, eller hur?

3.7 Svagt rotationsfritt fält och existensen av en svag potential

Den svaga motsvarigheten till den klassiska frågan är nu:

Om $\mathbf{F} \in L^p_{\text{loc}}(D; \mathbf{R}^n)$ och $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ i distributionsmening, finns då $\phi \in W^{1,p}_{\text{loc}}(D)$ sådan att $\nabla\phi = \mathbf{F}$ nästan överallt?

Lokalt är svaret ja under ganska rimliga antaganden. På ett klot, eller mer allmänt på ett stjärnformat område, är ett fält med rotation noll (i svag mening) lokalt eller globalt en svag gradient. Detta är en svag version av Poincarés lemma. En möjlig bevisidé är att först regularisera fältet med en mollifierare. De mollifierade fälten är glatta och rotationsfria på något mindre områden, där den klassiska teorin ger punktvisa potentialer. Därefter använder man L^p -uppskattningar och svag kompakthet för att passera till en Sobolevpotential. Detta är något av standardgrepp när det kommer till PDE-teori i svag mening.

Globalt återkommer topologin. Enkelt sammanhängande, exempelvis, behövs för att lokala potentialer ska kunna fogas samman utan perioder runt hål. I den punktvisa teorin mäts hindret av cirkulation längs slutna kurvor. I den svaga teorin uttrycks samma hinder genom perioder, distributionella differentialformer eller dualitet mot lämpliga testobjekt. Språket är annorlunda, men topologin har inte försvunnit i den nya analysen.

För $1 < p < \infty$ är ett praktiskt standardsammanhang

$$\mathbf{F} \in L^p(D; \mathbf{R}^n), \quad \nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad \text{i } \mathcal{D}'(D),$$

på ett tillräckligt reguljärt och enkelt sammanhängande område. Då kan man under vanliga antaganden på D söka en potential $\phi \in W^{1,p}(D)$, entydig upp till en konstant. Exakta globala satser beror på områdets regularitet och på p . Eftersom potentialen är entydig endast upp till en additiv konstant behöver man dessutom välja en normalisering, exempelvis $\int_D \phi \, dx = 0$.

8. Cirkulation i den svaga teorin

I den klassiska teorin är cirkulationen längs varje styckvis glatt kurva det naturliga globala testet. För ett rent L^p -fält är detta inte alltid möjligt, eftersom kurvan kan träffa en mängd där den valda representanten är odefinierad eller förändras utan att L^p -klassen ändras.

Det finns flera sätt att gå vidare, beroende på teori och syfte:

- Man kan kräva tillräcklig Sobolevregularitet för att fältet ska ha meningsfulla spår på kurvor.
- Man kan formulera Stokes sats svagt och arbeta med ytor, tangentiella spår och rum av typen $H(\text{curl})$ (där vi endast kräver att svaga rotationen ligger i L^2 , inte samtliga partiella derivatorer).
- Man kan angripa det hela mer i termer av differentialgeometri.
- Man kan regularisera fältet, beräkna klassiska cirkulationer för de släta approximationerna och därefter studera gränsvärdet.

Det är därför inte helt korrekt att utan kommentar ersätta ”cirkulationen är noll för varje sluten kurva” med samma mening för ett godtyckligt L^p -fält. Den geometriska idén är fortfarande rätt, men själva linjeintegralen behöver först få en analytisk mening. Detta är ett hyfsat abstrakt problem.

3.8 En svag version av implikationsdiagrammet

Det är nästa omöjligt att göra om figuren från första sidan i den här svaga meningen. Men ett schematiskt försök följer.

$$\begin{array}{llll} \phi \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D), & \mathbf{F} = \nabla \phi & \implies & \nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad \text{i } \mathcal{D}'(D), \\ \mathbf{F} \in L_{\text{loc}}^p(D), & \nabla \times \mathbf{F} = 0 & \implies & \text{lokal Sobolevpotential,} \\ \text{lokal Sobolevpotential och} & & \implies & \text{global Sobolevpotential,} \\ \text{enkel global topologi} & & & \\ \text{Sobolevpotential och} & & \implies & \text{ändpunktsformel längs } \Gamma \\ \text{tillräcklig spårregularitet längs } \Gamma & & & \end{array}$$

Den första implikationen är egentligen bara distributionsalgebra och kräver mycket lite. Den andra är ett svagt Poincarélemma, känt från PDE-teori. Den tredje är rent topologisk egentligen. Den fjärde är i första hand en fråga om representanter, kedjeregler och Lebesgueintegrerbarhet längs kurvan. I den klassiska C^1 -teorin ligger alla dessa frågor dolda i ett enda bekvämt regularitetsantagande.

3.9 Vad blir kvar av de klassiska begreppen?

Potentialfält. Klassiskt betyder det att $\mathbf{F} = \nabla \phi$ gäller punktvis. Svagt betyder det att $\phi \in W_{\text{loc}}^{1,p}$ och $\nabla \phi = \mathbf{F}$ nästan överallt, eller samma likhet tolkat i distributionsmening.

Rotationsfritt. Klassiskt betyder det att de partiella derivatorna finns och att $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ punktvis. Svagt betyder det att motsvarande distribution är noll när den paras med alla kompakta testfält.

Konservativt. Klassiskt formuleras detta genom vägoberoende kurvintegraler. I låg regularitet måste man först ange för vilka kurvor och med vilken spårtolkning integralen definieras. Alternativt kan man göra existensen av en global Sobolevpotential till huvudbegreppet.

Primitiv. Klassiskt är en primitiv en punktvis deriverbar funktion. I Lebesgueteorin är den naturliga representanten absolutkontinuerlig och återfås genom en integral av derivatan nästan överallt. I distributionsteorin kan som bekant även objekt som Diracs delta ha primitiver.

Noll cirkulation. Klassiskt testas varje sluten kurva. Svagt kan samma topologiska information behöva beskrivas genom spår, svag Stokesformel, eller differentialformer.

Till skillnad från en del andra situationer ger den generella teorin inte en enda svagare hypotes som ersätter alla klassiska antaganden. Den delar i stället upp problemet i olika delproblem. Lebesgueintegralen hanterar mätbarhet och gränsövergångar, Sobolevrummen kombinerar funktioner med svaga derivator, distributionerna gör differentialidentiteter möjliga utan punktvis regularitet, och topologin avgör om en lokal potential kan bli global. Det är först när dessa fyra delar passar ihop som den klassiska bilden av ett konservativt potentialfält återkommer i något som påminner om det kraftfulla resultatet vi stötte på i klassisk mening.