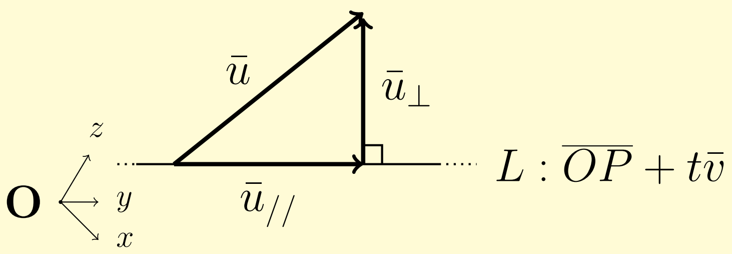
Lite Linjär Algebra 2020

Lektionsanteckningar och sammanfattning

Johan Thim, MAI (johan.thim@liu.se)



Ortogonalprojektion: $\quad \bar{\mathbf{u}}_{//} = \dfrac{\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}}}{\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}}}\,\bar{\mathbf{v}}, \quad \bar{\mathbf{u}}_\perp = \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_{//}.$

Innehåll

1 Bakgrund

Detta dokument är en liten sammanfattning av en del grundläggande begrepp i linjär algebra. Fokus är på två och tre dimensioner, även om de flesta resultaten (kryssprodukten undantagen) generaliserar till flera dimensioner naturligt. Innehållet i dokumentet är inte på något sätt fullständigt, och säkerligen har en hel del fel smugit sig in i det hela, så läsaren uppmanas att vara på sin vakt. Kritik, kommentarer och rättelser mottages tacksamt i form av e-post eller dylikt. Dokumentet är i högsta grad ”levande” och uppdateras så fort jag kommer på något. Detta även om det tog 7 år att uppdatera sedan senaste revision...

2 Matriser

Matris: En matris $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ har m rader och n kolonner (dvs mn element, i beskriver raden och j kolonnen). Matriser skrivs ofta som, t ex,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ där } a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{21} = 3, a_{22} = 4, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{eller} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonal: *Diagonalen* i matrisen är diagonalen från övre vänstra hörnet till nedre högra hörnet. Se även diagonalmatris.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrisaddition: Addition sker termvis. Exempelvis

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}.$$

Det krävs att matriserna har samma dimension!

Multiplikation med skalär: Även detta sker termvis, ex.

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

Matrismultiplikation: För att produkten AB av två matriser A och B skall vara definierad måste antalet kolonner i A vara lika med antalet rader i B. Dimensionen för AB blir lika många rader som A och lika många kolonner som i B. För att räkna ut elementet c_{ij} på rad i och kolonn j i produkten AB så multiplicerar vi "termvis" rad i i A med kolonn j i B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Om A har dimensionerna $m \times n$ och B har dimensionerna $n \times p$, så får AB dimensionerna $m \times p$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \boxed{c_{23}} & \cdots & c_{2p} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Kommuterar: Två matriser A och B sägs *kommutera* om $AB = BA$. Detta gäller inte i allmänhet, även om båda produkterna skulle vara definierade.

Matrisregler

Sats. Följande gäller då uttrycken är definierade:

1. $A + B = B + A$
2. $A(BC) = (AB)C$.
3. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.
4. $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$.
5. $A^m A^n = A^{m+n}$ om m, n är icke-negativa heltal.
6. $(A^m)^n = A^{mn}$ om m, n är icke-negativa heltal.

Transponat: "Byter plats" på rader och kolonner i en matris. Matrisen A's *transponat* skrivs A^T (eller A^t). Om $B = A^T$ så är $b_{ij} = a_{ji}$.

Transponatregler

Sats.

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(AB)^T = B^T A^T$
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
4. $(A^T)^T = A$.

2.1 Speciella matriser

Diagonalmatris: En *diagonalmatris* är en matris som bara har element på *diagonalen*:

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Enhetsmatris: *Enhetsmatrisen* E är diagonalmatrisen med $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 1$. Ibland även kallad I.

Kvadratisk matris: En *kvadratisk matris* har samma antal rader och kolonner, dvs dimensionen $n \times n$.

Symmetrisk matris: En *symmetrisk* matris A är sådan att $A^T = A$. Dvs matrisen är symmetrisk kring diagonalen. En symmetrisk matris måste vara kvadratisk.

Invers: *Inversen* till matrisen A, om den existerar, är en matris A^{-1} sådan att

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Observera även att det räcker att kontrollera "en riktning": om A och B är kvadratiska matriser (samma dimensioner) så är $AB = E$ om och endast om $BA = E$ (ej uppenbart). Observera även att matrisen nödvändigtvis är kvadratisk för att kunna vara inverterbar.

Ortogonalmatris, ON-matris: En *ON-matris* A är en matris där kolonnerna utgör en ON-bas, dvs då kolonnerna är parvis ortogonala och normerade. Matrisen A är en ON-matris om och endast om $A^{-1} = A^T$.

3 Vektorer

Punkt: En *punkt* är en specifik plats i rummet (eller planet) som beskrivs av sina koordinater: $P = (a, b, c)$.

Vektor: En *vektor* har en längd och en riktning. Placering spelar ingen roll. Vektorn beskrivs ofta av en koordinatvektor (matris): $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}^T$. Man brukar skriva vektorer i koordinatform med kolonnmatriser. Koordinaterna eller komponenterna i vektorn brukar tolkas i någon bas (underförstått eller explicit).

Vektor mellan punkter: Om $P_1 = (a_1, b_1, c_1)$ och $P_2 = (a_2, b_2, c_2)$ är punkter så ges vektorn $\overrightarrow{P_1P_2}$ från P_1 till P_2 av

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} a_2 - a_1 \\ b_2 - b_1 \\ c_2 - c_1 \end{pmatrix}.$$

Ortsvektor: Varje punkt P definierar en *ortsvektor* $\overrightarrow{OP}$ från origo (punkten $O = (0, 0, 0)$) till punkten P. Koordinatvektorn för $\overrightarrow{OP}$ är alltså bara punktens koordinater.

Punkter och vektorer

Observera att det är skillnad på en punkt och en vektor! Även om punkten kan tolkas som en ortsvektor i många koordinatsystem är det helt olika objekt. Punkten är fixerad i rummet medan vektorn inte är det. En vektor har endast längd och riktning!

Längd: *Längden* på en vektor $\bar{u}$ betecknas med $|\bar{u}|$ och beräknas som

$$|\bar{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}.$$

Parallella: Två vektorer $\bar{u}$ and $\bar{v}$ är *parallella* om det finns en konstant λ så att $\bar{u} = \lambda\bar{v}$.

Normering: När man *normerar* en vektor $\bar{u}$ hittar man en parallell vektor $\bar{v}$ som har längd ett. Oftast görs detta genom kalkylen $\bar{v} = (1/|\bar{u}|)\bar{u}$.

Enhetsvektor: En *enhetsvektor* är en vektor som har längden ett (en normerad vektor).

Nollvektorn: *nollvektorn* är en vektor med alla element lika med noll, skrivs $\bar{0}$. Det bör framgå av situationen vad $\bar{0}$ har för dimensioner.

3.1 Mängder av vektorer

Linjärkombination: Om $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ är vektorer och $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ är konstanter, så kallas

$$\bar{v} = \lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2 + \cdots + \lambda_n\bar{v}_n$$

en *linjärkombination* (av dessa vektorer).

Linjärt beroende: Mängden $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ är *linjärt oberoende* om och endast om

$$\lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2 + \cdots + \lambda_n\bar{v}_n = 0$$

enbart för $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Specialfall:

- Två vektorer är linjärt beroende om och endast om de är parallella.
- Tre vektorer är linjärt beroende om och endast om de ligger i samma plan eller på samma linje (alla tre parallella).
- Fler vektorer än dimensionen på rummet är alltid linjärt beroende (tre vektorer i planet, fyra i "vanliga" rummet).

Spänner upp: En mängd $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ av vektorer sägs spänna upp en (linjär) mängd (ett plan eller ett rum t ex) om alla vektorer i denna mängd är linjärkombinationer av $\bar{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Orientering: En vektortrippel $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ (tre vektorer i en viss ordning) kallas för ett *positivt orienterat* system om den minsta vridningen som för över $\bar{u}$ på $\bar{v}$ sker moturs sett från spetsen på $\bar{w}$.

Bas: En *bas* är en mängd linjärt oberoende vektorer som spänner upp rummet (eller planet). I rummet behövs tre vektorer och i planet två stycken.

Dimension: *Dimensionen* för ett vektorrum är antalet vektorer som finns i en bas för detta rum. T ex är dimensionen för ett plan två och för det vanliga "rummet" tre.

ON-bas: I en *ON-bas* är basvektorerna parvis ortogonala och normerade (har längd ett):

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 = 0$$
$$|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1.$$

Vektor, koordinater: En vektor $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^T$ tolkas som *koordinater* i någon bas $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$:

$$\bar{u} = u_1\bar{e}_1 + u_2\bar{e}_2 + u_3\bar{e}_3.$$

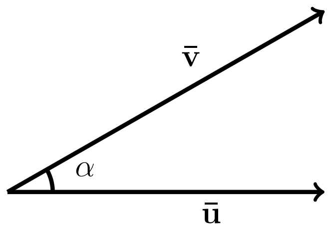
Om inget anges tolkas koordinaterna i en positivt orienterad ON-bas.

3.2 Funktioner av vektorer

Skalärprodukt: *Skalärprodukten* $\bar{u} \cdot \bar{v}$ av två vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ definieras av

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}| \cos \alpha,$$

där α är *vinkeln* mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$. Skalärprodukten är ett tal (en konstant). Om vektorerna är givna i en ON-bas så kan produkten beräknas som



$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n,$$

där $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}^T$ och $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^T$.

Regler för skalärprodukten

Sats.

1. $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$
2. $(\bar{u} + \bar{v}) \cdot \bar{w} = \bar{u} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{w}$.
3. $(\lambda \bar{u}) \cdot \bar{v} = \lambda(\bar{u} \cdot \bar{v})$.
4. $|\bar{u}| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}$.
5. $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{u}^T \bar{v}$ (vanlig matrismultiplikation).

Ortogonala vektorer: Två vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ kallas *ortogonala* om skalärprodukten är noll, dvs $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$. Skrivs ofta $\bar{u} \perp \bar{v}$. Tänk vinkelräta då

$$0 = \bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}| \cos \alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{2} \; (+k\pi),$$

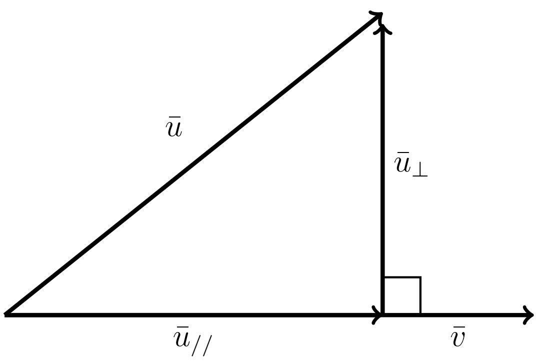
om $\bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}$.

(ortogonal)Projektion: *Projektionen* av en vektor $\bar{u}$ på en vektor $\bar{v}$ är en tredje vektor $\bar{w}$ parallell med $\bar{v}$: $\bar{w} = \lambda \bar{v}$, där

$$\lambda = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{v} \cdot \bar{v}} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|^2}.$$

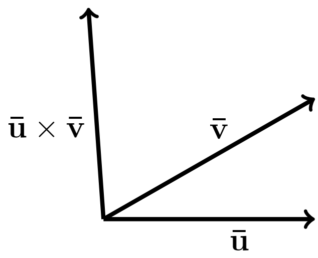
Observera att $\bar{u} - \bar{w}$ är ortogonal mot $\bar{v}$.

Ibland skriver man att man delar upp $\bar{u}$ i $\bar{u} = \bar{u}_{//} + \bar{u}_{\perp}$, där $\bar{u}_{//}$ är parallell med en given vektor $\bar{v}$ och $\bar{u}_{\perp}$ är ortogonal mot $\bar{v}$. Alltså blir $\bar{u}_{//}$ projektionen av $\bar{u}$ på $\bar{v}$ och $\bar{u}_{\perp} = \bar{u} - \bar{u}_{//}$.



Kryssprodukt: *Kryssprodukten* av två vektorer u och v existerar endast om u och v har tre koordinater (vektorer i $\mathbb{R}^3$). Kryssprodukten är ortogonal (vinkelrät) mot både u och v (samtidigt) och ges av

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - v_2u_3 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}.$$



Regler för kryssprodukten

Sats.

1. $\bar{u} \times \bar{v} = -\bar{v} \times \bar{u}$
2. $(\lambda\bar{u}) \times \bar{v} = \bar{u} \times (\lambda\bar{v}) = \lambda(\bar{u} \times \bar{v})$
3. $(\bar{u} + \bar{v}) \times \bar{w} = \bar{u} \times \bar{w} + \bar{v} \times \bar{w}$
4. $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w}$
5. $\bar{u} \times \bar{u} = \bar{0}$
6. $(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{u} = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{v} = \bar{0}$
7. $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \sin\alpha$, där α är vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$.
8. Längden $|u \times v|$ kan tolkas som arean av det parallellogram som spänns upp av vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$.
9. $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} \times \bar{v})$ är ett positivt orienterat system.
10. Om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är parallella är $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{0}$.

4 Linjära ekvationssystem

Ett *linjärt ekvationssystem*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

kan skrivas med matrisnotation som

$$A\bar{u} = \bar{b}, \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ och } \bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Generaliserar naturligt till fler variabler (eller reducerar till färre för den delen).

Koefficientmatris: Matrisen A ovan kallas för *koefficientmatrisen* för systemet av ekvationer.

Homogent ekvationssystem: Ett *homogent ekvationssystem* är ett ekvationssystem där $\bar{b} = 0$. Ett sådant har alltid minst en lösning — den *triviala* ($\bar{u} = \bar{0}$) — men kan även ha oändligt många lösningar.

Lösningar: Ett ekvationssystem kan ha en, oändligt många, eller inga lösningar.

1. En (entydig) lösning $\bar{u} = A^{-1}\bar{b}$ finns om och endast om A är inverterbar. Detta händer om och endast om $\det A \neq 0$

2. Om $\det A = 0$ så finns det inga lösningar eller oändligt många. Lös systemet (genom att introducera parametrar) för att se vilket som är fallet.

Elementära radoperationer (Gausselimination): I ekvationssystemet ovan kan man så klart multiplicera ekvationer med (nollskilda) konstanter, byta plats på ekvationer, och lägga ihop en ekvation med en multipel av en annan ekvation. För att göra detta systematiskt används notationen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

Målet är att få en "triangulär" matris så man enkelt kan hitta lösningarna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & d_3 \end{array}\right) \qquad \text{eller} \qquad \begin{cases} c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z = d_1, \\ \qquad\quad c_{22}y + c_{23}z = d_2, \\ \qquad\qquad\quad c_{33}z = d_3. \end{cases}$$

Bakåtsubstitution: Ur det sista systemet ovan kan man först se att $z = d_3/c_{33}$, och genom att sätta in detta i ekvationen ovanför kan vi lösa ut y. Sist kan vi sen så klart även lösa ut x. Denna process kallas *bakåtsubstitution*.

Beräkning av invers: Vi kan beräkna *inversen* (om den finns) till en matris $A = (a_{ij})$ genom gausselimination. Vi sätter upp systemet

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

och utför elementära radoperationer till vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array}\right).$$

Matrisen $C = (c_{ij})$ är inversen A^{-1} till matrisen A. Vi löser alltså tre ekvationssystem parallellt, en för varje kolonn.

Underbestämt system: Om det finns fler obekanta än ekvationer (t ex två ekvationer som innehållet tre variabler x, y och z) så finns det endera inga lösningar (om ekvationerna motsäger varandra) eller oändligt många (s k parameterlösningar).

Parameterlösningar: Om systemet är underbestämt försöker man att introducera *parametrar* (en för varje saknad ekvation). Man kallar helt enkelt någon av variablerna för en parameter, t ex $z = t$, där $t \in \mathbf{R}$, och använder sedan detta för att lösa ut resten av variablerna med t ex bakåtsubstitution (lösningarna kommer oftast att innehålla parametern t). Om systemet fortfarande är underbestämt så introducerar man fler parametrar, t ex $y = s$, $s \in \mathbf{R}$, och försöker lösa hela systemet igen. Ett par exempel på hur lösningar kan se ut:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbf{R} \qquad \text{eller} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Observera att det första fallet är ett plan och att det andra är en linje!

4.1 Minsta kvadratmetoden

Överbestämt ekvationssystem: Om man har fler ekvationer än obekanta är det oftast så att det inte finns en exakt lösning, men man kan hitta en lösning som ”ligger nära” genom att använda *minsta kvadratmetoden.* Exempelvis skulle vi kunna ha

$$A\bar{x} = \bar{b} \qquad \text{där} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Minsta kvadratlösning: Minsta kvadratlösningen $\bar{x}$ till systemet ovan är den vektor som gör att ”felet”

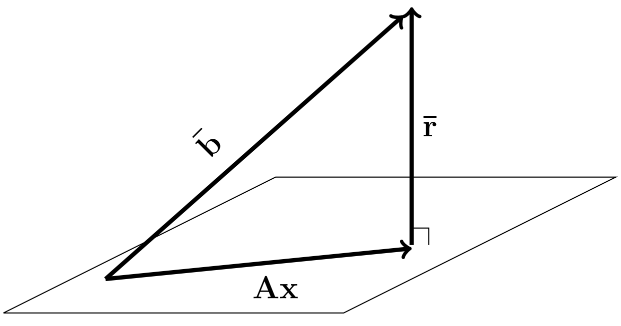
$$\bar{r} = A\bar{x} - \bar{b}$$

blir så litet som möjligt (i meningen att längden $|\bar{r}|$ blir så liten som möjligt).
Observera följande.

1. Lösningen uppfyller att $\bar{r}$ är ortogonal mot $A\bar{x}$ ($\bar{r} \cdot A\bar{x} = 0$). Kontrollera detta när lösning är funnen.
2. För varje vektor $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$ så är $A\bar{x}$ en vektor i det plan genom origo som spänns upp av kolonnerna i A:

$$A\bar{x} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}.$$

   Minsta kvadratlösningen $\bar{x}$ är den vektor som gör att vektorn $A\bar{x}$ i detta plan ligger så nära $\bar{b}$ som möjligt.



3. Med andra ord, $A\bar{x}$ är *ortogonalprojektionen* av $\bar{b}$ i detta plan.
4. Lösningen hittas med hjälp av normalekvationerna.
5. I fallet då systemet faktiskt har en exakt lösning så är denna lösning minsta kvadratlösningen också, och $\bar{r} = 0$.

Normalekvationerna: Man finner minsta kvadratlösningen genom att lösa *normalekvationerna*:

$$A^T A\bar{x} = A^T\bar{b}.$$

Detta ger ett kvadratiskt system med en symmetrisk koefficientmatris. Systemet har en entydig lösning.

5 Basbyten

Basbytesmatris, transformationsmatris: Låt $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ och $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ vara två baser för rummet. Om $\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}^T$, $\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}^T$ och $\bar{f}_3 = \begin{pmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}^T$ är koordinater i basen e kallar vi matrisen $T_{f\to e}$ för *basbytesmatrisen* (eller *transformationsmatrisen*) mellan dessa baser:

$$T_{f\to e} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Matrisen $T_{f\to e}$ byter bas ifrån basen f till basen e. Om $\bar{u} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^T$ är given i basen f, dvs

$$\bar{u} = a\bar{f}_1 + b\bar{f}_2 + c\bar{f}_3,$$

så får vi motsvarande vektor $\bar{u}$ i basen e genom att räkna ut matrisprodukten $T_{f\to e}\bar{u}$:

$$T_{f\to e}\bar{u} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2 + \gamma\bar{e}_3,$$

så $\bar{u} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^T$ i basen e. Sålunda, om $\bar{u}_e$ är vektorn $\bar{u}$'s representation i basen e och $\bar{u}_f$ i basen f har vi alltså sambandet

$$\bar{u}_e = T_{f\to e}\bar{u}_f \qquad \text{eller} \qquad \bar{u}_f = T_{e\to f}\bar{u}_e.$$

Observera här att $T_{e\to f} = (T_{f\to e})^{-1}$; även $T_{f\to e} = (T_{e\to f})^{-1}$ gäller så klart. En basbytesmatris är alltid inverterbar (varför?).

6 Determinanter

Determinant: Om A är en 2×2 matris ges *determinanten* av

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Tolkning: $|\det(A)|$ är arean av det parallellogram som spänns upp av vektorerna $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \end{pmatrix}^T$ och $\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}^T$.

Om A är en 3×3 matris ges determinanten av

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Big/ \text{ Sarrus regel } \Big/$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- \Big(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\Big).$$

Tolkning: $|\det(A)|$ är volymen av den parallellepiped som spänns upp av kolonnerna i A. Tecknet (plus eller minus) på $\det A$ avgör om kolonnerna (lästa från vänster till höger) utgör ett positivt eller negativt orienterat system.

Regler för determinanter

Sats.

1. Om två kolonner (rader) i A är lika så är $\det A = 0$.
2. Om en kolonn (rad) i A består av nollor så är $\det A = 0$.
3. Om alla element i en kolonn (rad) multipliceras med λ så multipliceras också $\det A$ med λ.
4. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ om A har dimensionen $n \times n$.
5. Man kan lägga ihop rader med multipler av andra rader eller kolonner med multipler av andra kolonner utan att ändra determinanten.
6. Byter man plats på två rader (eller kolonner) så ändras bara tecknet på determinanten.
7. $\det A$ är en linjär funktion av varje kolonn (rad).
8. En matris A är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$, och $\det A^{-1} = 1/\det A$.
9. $\det A^T = \det A$

Vi kan sammanfatta egenskaper för matrisen A.

Följande påståenden om matrisen A är ekvivalenta

Sats.

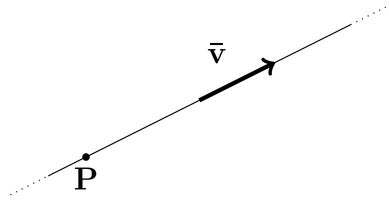
1. A är inverterbar.
2. $\det A \neq 0$.
3. Kolonnerna i A är linjärt oberoende.
4. Raderna i A är linjärt oberoende.
5. Ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{0}$ har enbart den triviala lösningen ($\bar{x} = \bar{0}$).
6. Ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{b}$ har en entydig lösning för alla $\bar{b}$.
7. Noll ($\lambda = 0$) är **inget** egenvärde till matrisen A.

7 Linjer & plan

Linje: En linje kan skrivas på (minst) två sätt.

1. Parameterform. Givet en punkt P på linjen och en *riktningsvektor* $\bar{v}$ som pekar i linjens riktning:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + t\bar{v} \qquad \text{eller} \qquad \begin{cases} x = a + tv_1 \\ y = b + tv_2 \\ z = c + tv_3 \end{cases}, \; t \in \mathbf{R},$$

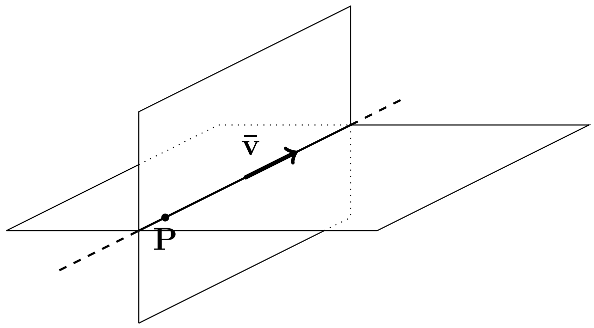


där $P = (a, b, c)$ och $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T$.

2. ”normalform”. Om man löser ut t ur de tre ekvationerna ovan får man en dubbel likhet:

$$t = \frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} = \frac{z-c}{v_3},$$

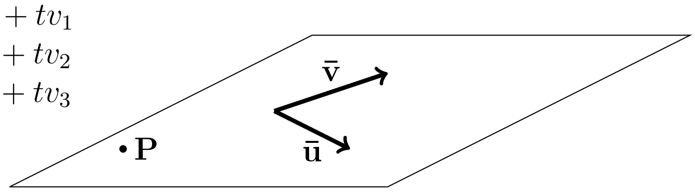
förutsatt att alla $v_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$. Observera att det krävs två ekvationer (”likheter”); dessa ekvationer beskriver tillsammans skärningen mellan två plan. I planet (två dimensioner) ger sambandet ovan den vanliga $y = kx + m$ formen för linjen.



Plan: Liksom linjer kan ett plan i rummet beskrivas på (minst) två sätt.

1. *Parameterform.* Givet en punkt P i planet och två icke-parallella vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ parallella med planet (”ligger i planet”):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + s\bar{u} + t\bar{v} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = a + su_1 + tv_1 \\ y = b + su_2 + tv_2 \\ z = c + su_3 + tv_3 \end{cases}$$



där $P = (a, b, c)$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^T$ och $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T$.

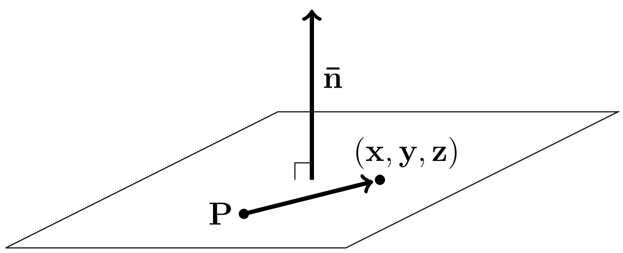
2. *Normalform.* Om *normalen* $\bar{n} = \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}^T$ till planet är given kan planet skrivas

$$Ax + By + Cz = D,$$

där D är en konstant som bestämmer förskjutningen från origo i normalens riktning ($D = 0$ ger ett plan genom origo). För att bestämma D sätts en punkt i planet in i ekvationen ovan (dvs $(x, y, z) = (a, b, c)$). Detta kan utnyttjas direkt:

$$\bar{n} \cdot \left(\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T - P \right) = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} = 0.$$

Ifrån denna likhet ser vi att planet består av de punkter (x, y, z) så att vektorn mellan P och (x, y, z) är ortogonal mot normalen till planet.



7.1 Hitta planets ekvation

Tre punkter: Om vi har tre punkter P_1, P_2 och P_3 och söker det plan som innehåller dessa skapar vi först två vektorer parallella med planet, t ex $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1$ och $\overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1$. Normalen $\bar{n} = \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}^T$ till planet fås genom kryssprodukten av dessa vektorer (förutsatt att de inte ligger på samma linje). Sätt sedan in en punkt i planets ekvation på normalform för att hitta konstanten D.

Punkt och linje: Om vi vet en punkt i planet och en hel linje som också ligger i planet, välj bara två punkter P_2 och P_3 på linjen och gör som i förra exemplet.

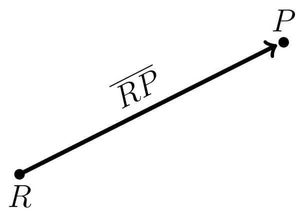
Linje och linje: Om ett plan innehåller en linje och är parallell med en annan, så kan vi finna normalen genom att ta kryssprodukten mellan linjernas respektive riktningsvektor (båda dessa måste så klart vara parallella med planet). En punkt kan man sedan välja ifrån den linje som ligger i planet.

7.2 Avstånd

Punkt till punkt:

Avståndet från en punkt P_0 till en punkt P_1 ges av längden av vektorn $\overrightarrow{P_0P_1}$:

$$|\overrightarrow{P_0P_1}| = |P_1 - P_0|.$$



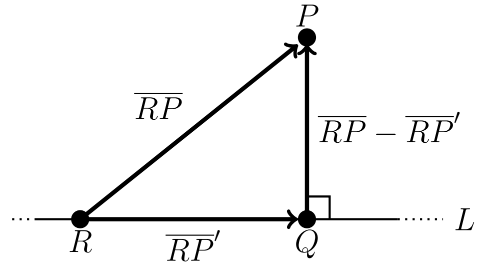
Punkt till linje: Det (kortaste) avståndet från en punkt till en linje kan beräknas enligt följande. Låt linjen L_1 på parameterform ges av

$$\begin{cases} x = a + tv_1 \\ y = b + tv_2 \\ z = c + tv_3 \end{cases}$$

och $P = (p_0, p_1, p_2)$.
Projektion: Välj en punkt R på linjen (fixera t, t ex $t = 0$). Skapa vektorn $\overrightarrow{RP} = P - R$. Projicera $\overrightarrow{RP}$ på riktningsvektorn för L_1, dvs på $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T$. Kalla projektionen för $\overrightarrow{RP}'$. Klart är att $\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RP}'$ är ortogonal mot linjen och att längden av denna vektor ger det sökta avståndet. För att få fram punkten Q på L_1 som ger detta avstånd kan vi först gå från origo till R och sen från R till Q längs vektorn $\overrightarrow{RP}'$:

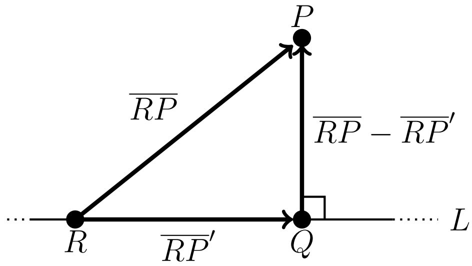
$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RP}'.$$

Här är $\overrightarrow{OQ}$ och $\overrightarrow{OR}$ ortsvektorer (dvs mellan origo och Q respektive R).



Direkt metod: låt $Q = (a + tv_1, b + tv_2, c + tv_3)$ vara en punkt på L_1 (t är inte känd än). Skapa vektorn $\overrightarrow{PQ}$ mellan P och Q. Det kortaste avståndet fås då t väljes så att $\overrightarrow{PQ}$ blir ortogonal mot linjen L_1, dvs precis då

$$\overrightarrow{PQ} \cdot v = (Q - P) \cdot \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T = 0.$$

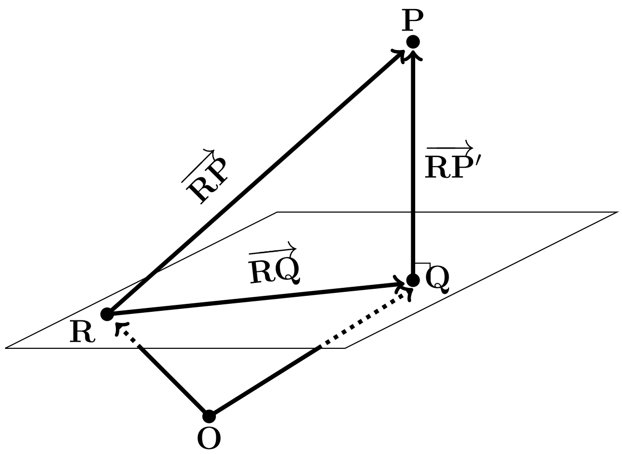


Den enda okända variabeln är t, lös ut denna. Detta ger punkten Q efter insättning i linjens ekvation L_1. Avståndet ges av längden av vektorn $\overrightarrow{PQ}$ med detta val på t.

Punkt till plan: Avståndet från en punkt $P = (a, b, c)$ till planet Π: $Ax + By + Cz = D$ (givet på normalform) kan beräknas på åtminstone två olika sätt.

Projektion: välj en punkt R i planet, skapa vektorn $\overrightarrow{RP}$ mellan R och P och projicera denna på normalen $\begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}^T$: $\overrightarrow{RP}'$. Avståndet ges av längden av $\overrightarrow{RP}'$. Om man vill finna den punkt Q i planet som ger det kortaste avståndet kan man gå från origo till R via ortsvektorn $\overrightarrow{OR}$ och sedan längs vektorn $\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RP}'$ (som ligger i planet) till punkten Q. Dvs,

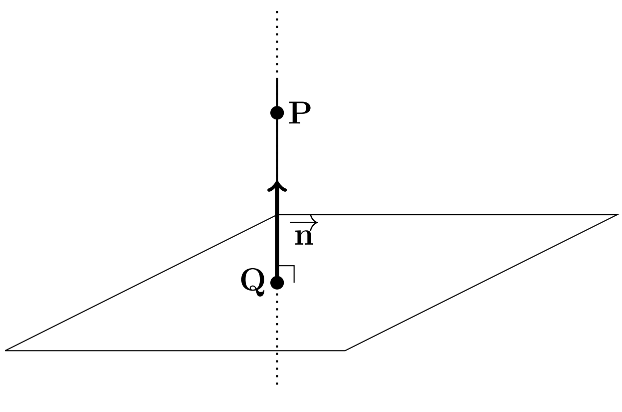
$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RP}'.$$



Koordinaterna för $\overrightarrow{OQ}$ är punkten Q i planet (kontrollera att Q uppfyller planet Π's ekvation).

Direkt metod: skapa linjen L som går i normalens riktning (som därmed är vinkelrät mot planet) och som går genom punkten P:

$$L\colon \begin{cases} x &= a + tA, \\ y &= b + tB, \\ z &= c + tC. \end{cases}$$



Vi söker skärningen mellan L och planet vilket vi får genom att lösa ekvationen

$$A(a + tA) + B(b + tB) + C(c + tC) = D.$$

Vi finner ett värde t och sätter in detta i L för att hitta skärningspunkten Q. Avståndet ges sedan av längden $|\overrightarrow{QP}|$.

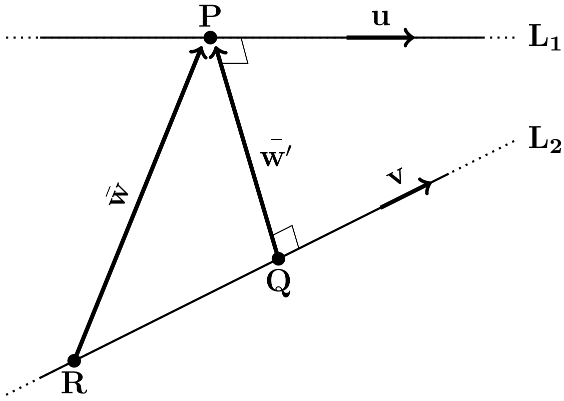
Linje till linje: Låt $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^T$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T$,

$$L_1\colon \begin{cases} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= b_1 + tu_2 \\ z &= c_1 + tu_3 \end{cases} \qquad \text{och} \qquad L_2\colon \begin{cases} x &= a_2 + sv_1 \\ y &= b_2 + sv_2 \\ z &= c_2 + sv_3 \end{cases}.$$

Projektion: Vi söker en vektor som är ortogonal mot både L_1 och L_2. En sådan ges av kryssprodukten mellan linjernas riktningar: $\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v}$. Skapa en vektor (vilken som helst) mellan L_1 och L_2, t ex

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \end{pmatrix}^T;$$

andra val på t och s går naturligtvis lika bra (i fallet ovan tog vi $s = t = 0$). Projicera $\bar{w}$ på $\bar{n}$. Längden av projektionen $\bar{w}'$ ger det sökta avståndet. Om linjerna är parallella fungerar denna metod inte (varför?). Projicera istället direkt $\bar{w}$ på riktningsvektorn för någon av linjerna. Avståndet fås från längden $|\bar{w} - \bar{w}'|$.



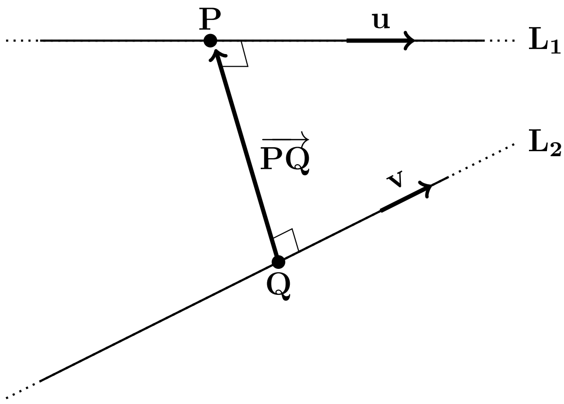
Ekvationssystem: Låt P vara en godtycklig punkt på L_1 och Q en godtycklig punkt på L_2. Vi skapar vektorn $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} a_2 - a_1 + sv_1 - tu_1 \\ b_2 - b_1 + sv_2 - tu_2 \\ c_2 - c_1 + sv_3 - tu_3 \end{pmatrix}.$$

Vi söker s och t så att $\overrightarrow{PQ}$ blir ortogonal mot både L_1 och L_2, dvs

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^T & = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T & = 0 \end{cases}$$

Löser vi detta ekvationssystem finner vi s och t som gör att längden på vektorn $\overrightarrow{PQ}$ ger det kortaste avståndet.



Linje till plan: Låt

$$L_1 \colon \begin{cases} x & = a + tu_1 \\ y & = b + tu_2 \\ z & = c + tu_3 \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \Pi \colon Ax + By + Cz = D.$$

Om linjen inte är parallell med planet blir avståndet noll. Skärningspunkten i detta fall — då linjen inte är parallell med planet — kan man hitta genom att sätta in linjens ekvation (på parameterform) i planets ekvation på normalform:

$$A(a + tu_1) + B(b + tu_2) + C(c + tu_3) = D,$$

och lösa ut t.

Om linjen är parallell med planet kan vi välja godtycklig punkt P på linjen, godtycklig punkt R i planet, och projicera vektorn $\overrightarrow{RP}$ på normalen $\bar{n} = \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}^T$. Längden av projektionen ger det sökta avståndet. Alltså samma situation som avstånd mellan punkt och plan.

8 Egenvärden och egenvektorer

Egenvärde, egenvektor: Om $\bar{u} \neq 0$ är en vektor och A en matris så att

$$A\bar{u} = \lambda\bar{u}$$

för något tal λ så kallas λ för ett *egenvärde* till matrisen A och $\bar{u}$ en *egenvektor* som hör till detta egenvärde. Observera att om $\bar{u}$ är en egenvektor till A så är även $t\bar{u}$ det (med samma egenvärde) för alla $t \neq 0$. Vektorn $\bar{u} = 0$ är aldrig en egenvektor (vilket egenvärde skulle $\bar{u} = 0$ höra till?).

Egenvektorer är linjärt oberoende: Egenvektorer tillhörande olika egenvärden är linjärt oberoende. Om A har n stycken olika egenvärden så finns n stycken linjärt oberoende egenvektorer.

Sekularekvationen: Man kan hitta egenvärdena till A genom att undersöka när (för vilka λ) ekvationen $(A - \lambda E)\bar{u} = 0$ har oändligt många lösningar, dvs precis då *sekularekvationen* är uppfylld:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

8.1 Hitta egenvektorer

Om λ är ett egenvärde för matrisen A kan man hitta samtliga egenvektorer hörande till detta egenvärde genom att lösa ekvationen $A\bar{u} = \lambda\bar{u}$, eller, alternativt formulerat, det homogena systemet $(A - \lambda E)\bar{u} = 0$. Observera att det måste bli parameterlösningar (möjligen med flera parametrar) då matrisen $A - \lambda E$ ej är inverterbar (varför?).
Om $A = \beta B$ för någon konstant β och matris B kan man förenkla kalkylerna genom att låta $\mu = \lambda/\beta$:

$$\det(A - \lambda E) = \det(\beta(B - \mu E)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(B - \mu E) = 0,$$

så lösningarna μ till ekvationen är alltså egenvärderna till B, och motsvarande egenvärden för matrisen A fås genom att dela med β. Observera också att egenvektorerna kan beräknas med B och μ:

$$B\bar{u} = \mu\bar{u} \quad \Leftrightarrow \quad A\bar{u} = \beta B\bar{u} = \beta\mu\bar{u} = \lambda\bar{u},$$

så egenvektorerna för B tillhörande μ är precis samma som egenvektorerna för A tillhörande motsvarande λ.

ON-bas av egenvektorer: En *ON-bas av egenvektorer* är ofta önskvärd, och kan ibland konstrueras

1. Om det finns n (för en $n \times n$ matris) olika (inga dubbelrötter eller värre) reella egenvärden så måste egenvektorerna vara ortogonala ”direkt” för att man skall kunna skapa en ON-bas. Basen skapas genom att man helt enkelt väljer ut en egenvektor till varje egenvärde och normerar dessa (eller rättare sagt, väljer ut en egenvektor med längd ett).

2. Om något egenvärde är en dubbelrot (eller värre..) måste man få lika många parametrar som multipliciteten (hur många gånger egenvärdet upprepas) för att ha en chans att skapa en ON-bas. T ex om vi till en dubbelrot får egenvektorerna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

så söker vi två ortogonala vektorer i det plan som spänns upp. Detta kan man göra genom att först räkna ut normalen till planet ($\bar{n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$) och sedan ta en av vektorerna ovan, t ex $\bar{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$, och räkna ut $\bar{v} = \bar{u} \times \bar{n} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T$ för att hitta en vektor parallell med planet (d v s en egenvektor) som också är ortogonal mot $\bar{u}$. De två vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är ortogonala egenvektorer med samma egenvärde. Om dessa normeras har vi två tänkbara baselement. Man får sedan kontrollera om dessa är ortogonala mot egenvektorer tillhörande övriga egenvärden.

Diagonalisering: Om man kan hitta en bas (ej nödvändigtvis en ON-bas) bestående av egenvektorer så kallas matrisen *diagonaliserbar*:

$$A = TDT^{-1},$$

där T är basbytesmatrisen vars kolonner består av egenvektorer till A i någon ordning och D är diagonalmatrisen med egenvärden på diagonalen (i samma ordning som i matrisen T).

Om A är av typ $n \times n$ och har n stycken olika reella egenvärden så är A alltid diagonaliserbar. Men även om A har dubbla (eller värre) egenvärden kan det finnas en bas av egenvektorer, men för att konstatera detta krävs en mer noggrann analys (t ex genom att beräkna samtliga egenvektorer och direkt se om det går att konstruera en bas).

Potenser av diagonaliserbara matriser: Om A är diagonaliserbar, $A = TDT^{-1}$, så är $A^n = TD^nT^{-1}$ för alla icke-negativa heltal n.

9 Linjära avbildningar

Linjär avbildning: En *linjär avbildning* F är en funktion som för varje vektor $\bar{u}$ tilldelar en vektor $F(\bar{u})$ på ett linjärt sätt:

$$F(a\bar{u} + b\bar{v}) = aF(\bar{u}) + bF(\bar{v}),$$

där a, b är konstanter och $\bar{u}, \bar{v}$ är vektorer. Definitionsmängder och värdemängder är nödvändigtvis linjära vektorrum.

Avbildningsmatris: Till varje linjär avbildning F hör en *avbildningsmatris* A sådan att

$$F(\bar{u}) = A\bar{u} \quad \text{(matrismultiplikation)}$$

för alla vektorer $\bar{u}$ (vektorer i F's definitionsmängd, t ex planet eller rummet). Observera att A beror på i vilken bas man väljer att beskriva vektorerna i. Man säger ibland att F representeras av en avbildningsmatris A.

Konstruktion av avbildningsmatris: Kolonnerna i avbildningsmatrisen A för en linjär avbildning F är helt enkelt vektorerna som ges av hur basvektorerna avbildas av F. Om

$$F(\bar{e}_1) = F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad F(\bar{e}_2) = F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

så får vi A (i basen e) genom att konstruera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Basbyte för linjär avbildning: Om A_e är F's avbildningsmatris i basen e och A_f i basen f så gäller sambandet

$$A_e = T_{f\to e} A_f T_{e\to f} \quad \text{(matrismultiplikation).}$$

Om $T = T_{f\to e}$ byter från basen f till basen e blir sambanden följande:

$$A_e = T A_f T^{-1} \qquad \text{och} \qquad A_f = T^{-1} A_e T.$$

Sammansatta avbildningar: Om F har avbildningsmatrisen A och G har avbildningsmatrisen B så får avbildningen $\bar{u} \mapsto F(G(\bar{u}))$ avbildningsmatrisen AB och $\bar{u} \mapsto G(F(\bar{u}))$ matrisen BA.

Volymförändring: Om $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ är vektorer och F har avbildningsmatrisen A så förändrar F determinanter på följande sätt:

$$\begin{vmatrix} F(\bar{u}) & F(\bar{v}) & F(\bar{w}) \end{vmatrix} = (\det A) \begin{vmatrix} \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \end{vmatrix}.$$

Egenvärden och egenvektorer för linjära avbildningar: Om $F(\bar{u}) = \lambda\bar{u}$ och $\bar{u} \neq 0$, kallas λ för ett *egenvärde* för F och $\bar{u}$ en *egenvektor* för F (tillhörande egenvärdet λ). Egenvärden och egenvektorer för F är oberoende av i vilken bas F representeras, och kan beräknas genom att studera någon representation av F (d v s någon avbildningsmatris).

9.1 Egenskaper

Injektiv avbildning: Om $F(\bar{u}) = 0$ bara händer då $\bar{u} = 0$ kallas F för *injektiv* (eller ett-till-ett). Detta innebär att olika vektorer får olika bilder.

Surjektiv avbildning: Om det för varje vektor $\bar{v}$ finns en vektor $\bar{u}$ så att $F(\bar{u}) = \bar{v}$ kallas F för *surjektiv*.

Bijektiv avbildning: Om F är både injektiv och surjektiv kallas F för *bijektiv*.

Ekvivalenta påståenden för linjära avbildningar

Sats. Om F är en linjär avbildning är följande påståenden ekvivalenta.

1. F är injektiv.
2. F är surjektiv.
3. F är inverterbar.

Invers avbildning: Om F är inverterbar och har avbildningsmatrisen A så är F^{-1} också en linjär avbildning, med avbildningsmatrisen A^{-1}.

Isometrisk avbildning: Om en linjär avbildning F har egenskapen att den bevarar skalärprodukter:

$$F(\bar{u}) \cdot F(\bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{v}$$

för alla vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ kallas den *isometrisk*. Speciellt innebär detta att F bevarar längder: $|F(\bar{u})| = |\bar{u}|$. Om avbildningsmatrisen A för F är given i en ON-bas så är F isometrisk om och endast om A är en ON-matris. Vidare gäller att en isometrisk avbildning i rummet måste vara en rotation eller en spegling eventuellt följd av en rotation.

Symmetrisk avbildning: Om F i någon ON-bas har en symmetrisk avbildningsmatris A (i så fall är avbildningsmatrisen alltid symmetrisk i alla ON-baser) så kallas F för symmetrisk, och följande gäller.

1. Alla egenvärden är reella.
2. Egenvektorer till olika egenvärden ortogonala.
3. Matrisen A kan alltid diagonaliseras (spektralsatsen): det finns en ON-bas f bestående av egenvektorer till A, låt $T_{f\to e}$ vara basbytesmatrisen från denna bas till den gamla. Matrisen $T_{f\to e}$ är en ON-matris, så $(T_{f\to e})^{-1} = (T_{f\to e})^T$ och

   $$A = T_{f\to e} D (T_{f\to e})^T,$$

   där D är en diagonalmatris med egenvärderna (i ”rätt” ordning i förhållande till $T_{f\to e}$).

9.2 Exempel på speciella avbildningar

Projektion i ett plan: Om vi låter $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ vara en ON-bas i rummet där $\bar{f}_1$ är parallell med normalen till planet och $\bar{f}_2$,$\bar{f}_3$ två vektorer i planet så kan avbildningsmatrisen A_f i denna bas skrivas som en diagonalmatris:

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den första kolonnen betyder att $\bar{f}_1$ avbildas på nollvektorn och de andra två att $\bar{f}_2, \bar{f}_3$ avbildas på sig själva. Om T är basbytesmatrisen från basen f till basen e får vi $A_e = T A_f T^{-1}$.

Spegling i ett plan: På samma sätt som i projektionsexemplet får vi $A_e = TA_fT^{-1}$, där

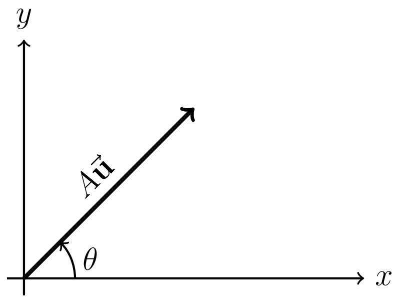
$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rotation i planet (kring origo):

Givet i standardbasen så är

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

en rotation där varje vektor vrids θ radianer kring origo i moturs riktning (positiv riktning).



Rotation kring linje: Vi kan rotera i rummet kring en fix linje genom origo. Vi nyttjar linjens riktningsvektor som basvektorn f_3 och kan representera

$$A_f = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10 Kvadratiska former

Kvadratisk form: En *kvadratisk form* Q är homogent polynom av grad två, vilket innebär att

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

eller

$$Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

i två respektive tre variabler. Att polynomet kallas homogent av grad två är för att varje term har grad två. Notera att $Q(\bar{0}) = 0$ samt $Q(tx_1, tx_2, tx_3) = t^2Q(x_1, x_2, x_3)$.

Matrisrepresentation

Sats. För varje kvadratisk form finns en entydigt bestämd symmetrisk matris S så att

$$Q(\bar{x}) = \bar{x}^T S\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \text{där } \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T.$$

Kanonisk form: Om λ_1, λ_2, λ_3 är egenvärdena till S så kallas

$$Q(\bar{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$$

för den kanoniska formen för Q.

Diagonalisering

Sats. Om $Q(\bar{x})$ är en kvadratisk form $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T S \bar{x}$ finns en basbytesmatris T vars kolonner är normerade parvis ortogonala egenvektorer $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ till S så att om $\bar{x} = T\bar{y}$ gäller att

$$Q_f(\bar{y}) = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$$

representerar samma kvadratiska form. Märk att Q och Q_f är olika funktioner, men representerar samma kvadratiska form i olika koordinatsystem.

Värdemängd: För en kvadratisk form gäller att

$$\lambda_{\text{min}}|x|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_{\text{max}}|x|^2.$$

Likhet då x egenvektor eller $\bar{0}$. Uttrycket λ_{min} är det minsta egenvärdet och λ_{max} det största.

Kategorisering av kvadratiska former: En kvadratisk form säges vara:

- Positivt definit: $Q(\bar{x}) > 0$ för alla $\bar{x} \neq \bar{0}$. Ekvivalent: $\lambda_{\text{min}} > 0$.
- Positivt semidefinit: $Q(\bar{x}) \geq 0$ för alla $\bar{x}$ med likhet för något $\bar{x} \neq 0$. Ekvivalent: $\lambda_{\text{min}} = 0$.
- Negativt definit: $Q(\bar{x}) < 0$ för alla $\bar{x} \neq \bar{0}$. Ekvivalent: $\lambda_{\text{max}} < 0$.
- Negativt semidefinit: $Q(\bar{x}) \leq 0$ för alla $\bar{x}$ med likhet för något $\bar{x} \neq 0$. Ekvivalent: $\lambda_{\text{max}} = 0$.
- Indefinit: $Q(\bar{x})$ antar både positiva och negativa värden. Ekvivalent $\lambda_{\text{min}} < 0 < \lambda_{\text{max}}$.

Geometrisk tolkning: Betrakta $Q(\bar{x}) = 1$. Om Q är postivit definit representerar ekvationen en ellipsoid (eller ellips i 2-D), om Q är indefinit en hyperboloid (eller hyperbel i 2-D). Om Q är negativt definit saknas punkter som uppfyller ekvationen, men ekvationen $Q(\bar{x}) = -1$ representerar en ellipsoid istället. Semidefinita former kräver noggrannare analys. Dessa följder kan ses från den kanoniska formen för Q.

11 Differentialekvationer

Ett linjärt system av första ordningens differentialekvationer med konstanta koefficienter, exempelvis ett system med två ekvationer:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + f_1(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + f_2(t), \end{cases}$$

kan skrivas med matrisnotation som

$$\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{f}(t), \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ \bar{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \text{ och } \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Koefficientmatris: Matrisen A ovan kallas för *koefficientmatrisen* för systemet (precis som för linjära ekvationssystem).

Homogent system: Om $\bar{f} = \bar{0}$ kallas systemet för *homogent*.

Homogena- och partikulärlösningar: Om $\bar{x}_h(t)$ är *alla homogena lösningar* och $\bar{x}_p(t)$ är *en partikulärlösning*, så ges alla lösningar till systemet av $\bar{x}(t) = \bar{x}_h(t) + \bar{x}_p(t)$.

Diagonalisering: Om koefficientmatrisen A tillåter en diagonalisering, $A = TDT^{-1}$, kan vi utföra bytet $\bar{y}(t) = T^{-1}\bar{x}(t)$. Ekvationssystemet reduceras då till

$$T\bar{y}'(t) = AT\bar{y}(t) + \bar{f}(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \bar{y}'(t) = T^{-1}AT\bar{y}(t) + T^{-1}\bar{f}(t) = D\bar{y}(t) + T^{-1}\bar{f}(t).$$

Detta diagonaliserade system kan lösas en ekvation i taget med vanliga tekniker från envariabelanalysen (integrerande faktor). Sen fås lösningarna genom $\bar{x} = T\bar{y}$.

Formel för homogena lösningar: Om A är en $n \times n$ matris med n olika egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ och tillhörande egenvektorer $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ så ges lösningarna till ekvationen $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$ av

$$\bar{x}(t) = c_1\bar{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\bar{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\bar{v}_n e^{\lambda_n t},$$

där $c_1, c_2, \ldots, c_n$ är godtyckliga konstanter.

Begynnelsevillkor: Om *begynnelsevillkor* är givet, t ex $\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}^T$, så sätter vi in detta i ekvationen efter att den allmänna lösningen (med konstanter och partikulärlösningar) är fullständigt bestämd.

Sakregister