LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Kurskod: TATA68
Provkod: TEN1
Datum: 2011-10-08
Institution: MAI

Dugga 1 i Matematisk Grundkurs, TATA68/TEN1 2011-10-08 08–11

Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Varje uppgift är värd 3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7 poäng. Poängen på duggorna summeras och avgör slutbetyg.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA68/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. (a) Ange en ekvation för normalen till linjen $2\,y + 5\,x = 4$ som skär x-axeln i $x = -1$. (1p)

   (b) Hitta koefficienten före x^8 i uttrycket $\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^{10}$. (1p)

   (c) Beräkna summan $\displaystyle\sum_{k=-107}^{107} (1 - 2k)$. (1p)

2. För vilka reella x gäller olikheten $x \geq \dfrac{1}{x}$? (3p)

3. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $|x^2 - 4| = 3x$. (3p)

4. Finn alla (reella och komplexa) lösningar till ekvationen $z^2 + 2(1 + i)z - 3 - 2i = 0$.
   Kontrollera ditt svar! (3p)

5. (a) Visa att för två icke-negativa reella tal a och b gäller att $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a + b}{2}$. (1p)

   (b) Visa att Cauchy-Schwarz olikhet gäller för följder av icke-negativa reella tal a_k och b_k, där $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}.$$

   Tips: använd (a), börja med följder a_k och b_k som uppfyller att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$, och fundera över vad man kan göra för en godtycklig följd. (2p)

Lösningsskisser för TATA68, 2011-10-08

1. (a) Linjen $2\,y + 5\,x = 4$ har riktningskoefficient $-5/2$, så normalen har riktningskoefficient $2/5$. Vi söker alltså en linje $y = 2x/5 + m$ som skär x-axeln i $x = -1$. Alltså måste

$$0 = 2(-1)/5 + m \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{2}{5}.$$

Vi får alltså linjen $y = 2x/5 + 2/5 \;\Leftrightarrow\; 5\,y - 2\,x = 2$.

(b) Vi använder binomialsatsen och skriver

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k \left(\frac{2}{x}\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} x^{k-(10-k)}$$
$$= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} x^{2k-10}.$$

Vi ser att x får exponenten 8 om och endast om $2k - 10 = 8 \;\Leftrightarrow\; k = 9$. Koefficienten blir alltså $\binom{10}{9} 2^{10-9} = 20$.

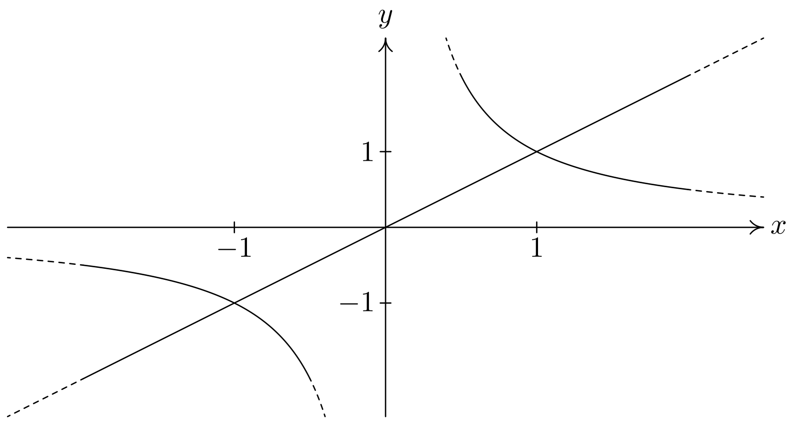
(c) Summan är aritmetisk så vi kan direkt använda formeln för aritmetisk summa om vi vill. Enklare:

$$\sum_{k=-107}^{107} (1 - 2k) = 1 \cdot (2 \cdot 107 + 1) - 2 \sum_{k=-107}^{107} k = 215,$$

ty den sista summan blir noll! Vi summerar symmetriskt kring $k = 0$ och får samma siffror med plus och minus. De tar således ut varandra.

Svar: (a) $5\,y - 2\,x = 2$ (b) 20 (c) 215.

2. Om vi skisserar hur vänsterledet och högerledet i olikheten ser det ut som i figur 1.



Figur 1: Kurvorna som ges av $y = 3x$ respektive $y = 1/x$.

Här ser vi att det verkar som $x \geq 1/x$ när $-1 \leq x < 0$ och $1 \leq x < \infty$. Vi visar att detta verkligen är fallet. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$x \geq \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x+1)}{x} \geq 0.$$

Vi gör ett teckenschema för uttrycket i vänsterledet:

		-1		0		1	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{(x-1)(x+1)}{x}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är större än noll precis då $-1 \leq x < 0$ eller $1 \leq x < \infty$.

Svar: $-1 \leq x < 0$ eller $1 \leq x < \infty$.

3. Vi delar upp i två fall.

Fall 1, då $x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Vi erhåller

$$|x^2 - 4| = 3x \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x^2 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)(x-1) = 0.$$

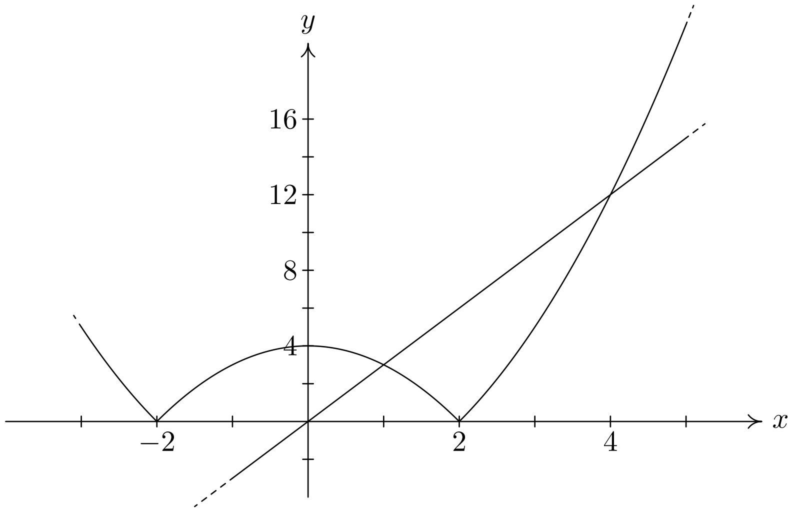
Endast $x = 1$ uppfyller kravet $-2 \leq x \leq 2$.

Fall 2, då $x^2 - 4 \geq 0$. Detta händer då $x \leq -2$ eller $x \geq 2$. Vi har

$$|x^2 - 4| = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)(x+1) = 0.$$

Endast $x = 4$ uppfyller kraven.

Vi skissar upp funktionerna och ser att det vi räknat ut verkar rimligt.



Figur 2: Kurvorna skär varandra i $x = 1$ och $x = 4$.

Svar: $x = 1$ och $x = 4$.

4. Vi kvadratkompletterar för att få en enklare ekvation:

$$z^2 + 2(1+i)z - 3 - 2i = (z + 1 + i)^2 - (1+i)^2 - 3 - 2i = (z + 1 + i)^2 - 3 - 4i = 0.$$

Låt $w = z + 1 + i$ och skriv $w = a + bi$ där a, $b \in \mathbf{R}$. Vi löser

$$w^2 - 3 - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2abi - b^2 - 3 - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

Vi ser att a, $b \neq 0$ och att $b = 2/a$. Då måste $a^2 - (2/a)^2 = 3 \Leftrightarrow a^4 - 4 = 3a^2$ gälla (ekvivalens ty $a \neq 0$). Vi låter $t = a^2$ och ser att

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-4)(t+1) = 0.$$

Endast $t = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$ ger intressanta lösningar då $t = a^2 > 0$. Om $a = 2$ så blir $b = 1$ och om $a = -2$ blir $b = -1$. Vi får alltså lösningarna $w_1 = 2 + i$ och $w_2 = -2 - i$, vilket i sin tur ger $z_1 = 1$ och $z_2 = -3 - 2i$.

Kontroll. Vi ser att $z_1 + z_2 = -(2(1+i))$ vilket stämmer med koefficienten före z-termen. Vidare ser vi att $z_1 z_2 = -3 - 2i$ vilket är konstant-termen. Således har vi funnit våra lösningar.

Svar: $z = 1$ och $z = -3 - 2i$.

5. (a) Vi skall visa att $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ gäller för a, $b \geq 0$. Eftersom allt är positivt kan vi kvadrera båda sidor och behålla ekvivalens:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4ab \leq (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$$

Den sista olikheten är uppenbarligen sann (kvadraten av ett reellt tal $a - b$ är alltid icke-negativ), så vi har visat påståendet.

(b) Vi börjar med att anta att $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$. Eftersom $a_k b_k = \sqrt{a_k^2 b_k^2} \leq \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}$ för $k = 1, 2 \ldots, n$, så gäller

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) = \frac{1}{2} \cdot (1+1) = 1.$$

Om a_k och b_k är två godtyckliga följder av icke-negativa tal, låt

$$\begin{cases} \alpha = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}, \\ \beta = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}, \end{cases}$$

och definiera $A_k = \frac{a_k}{\alpha}$ och $B_k = \frac{b_k}{\beta}$. Vi antar här att inte samtliga a_k eller b_k är lika med noll. Om så skulle vara fallet är olikheten "trivialt" sann. Det följer nu att

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 = \sum_{k=1}^{n} B_k^2 = 1.$$

Enligt ovan medför detta att

$$\sum_{k=1}^{n} A_k B_k \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{\alpha} \cdot \frac{b_k}{\beta}\right) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \alpha\beta,$$

vilket är precis det vi ville visa. Ekvivalenserna följer av att vi arbetar med positiva tal.

Svar: Se ovan.