Lösningsskiss TATA68 Dugga 1 10/9-10

1 a)

$$
\begin{array}{l|l}
\quad x^2+4x-1 & \\
\hline
x^3+2x^2-9x-18 & x-2 \\
-(x^3-2x^2) & \\
\hline
\quad 4x^2-9x-18 & \\
\quad -(4x^2-8x) & \\
\hline
\qquad -x-18 & \\
\qquad -(-x+2) & \\
\hline
\qquad\quad -20 &
\end{array}
$$

ger att

$$\frac{x^3+2x^2-9x-18}{x-2} = x^2+4x-1 - \frac{20}{x-2}$$

b) $x^2+y^2 = 6x-4y+3 \iff x^2-6x+y^2+4y = 3 \iff$

$\iff (x-3)^2+(y+2)^2 = 16 = 4^2$, dvs cirkeln har medelpunkt $(3,-2)$ och radie 4

c) $$\frac{3-2i}{2+i} = \frac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-3i-4i-2}{4+1} =$$

$$= \frac{4-7i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

2) $$\frac{x}{x+1} \le \frac{x-1}{x+2} \iff \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x+2} \le 0 \iff$$

$$\iff \frac{x(x+2)-(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} \le 0 \iff \frac{x^2+2x-(x^2-1)}{(x+1)(x+2)} \le 0$$

$$\iff \frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} \le 0$$

Intressanta punkter (nollställen till täljare & nämnare) är $-\frac{1}{2}, -1, -2$

Vi får följande teckentabell:

x		-2		-1		$-\frac{1}{2}$	
$2x+1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}$	$-$	$\wr$	$+$	$\wr$	$-$	0	$+$

Så olikheten gäller då $x < -2$ eller $-1 < x \le -\frac{1}{2}$

3) $2x+\sqrt{13-8x}=2 \iff \sqrt{13-8x}=2-2x \implies$

$\implies 13-8x=(2-2x)^2 \iff 13-8x=4+4x^2-8x \iff$

$\iff 4x^2=9 \iff x^2=\frac{9}{4} \iff x=\pm\frac{3}{2}$.

Eftersom vi inte har ekvivalens hela vägen, MÅSTE vi kontrollera i ursprungliga ekvationen:

$x=-\frac{3}{2}$ ger $VL=-3+\sqrt{13+12}=-3+5=2=HL$, ok

$x=\frac{3}{2}$ ger $VL=3+\sqrt{13-12}=3+1=4\neq 2=HL$, fel.

Alltså är $x=-3/2$ den enda lösningen.

4) Fallindelning ger $|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4 & \text{om } x\geq 2 \text{ eller } x\leq -2 \\ -(x^2-4) & \text{om } -2\leq x\leq 2\end{cases}$

$x\geq 2$ eller $x\leq -2$: Vi får ekv. $2(x^2-4)+9x+3=0 \iff$

$\iff x^2+\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}=0 \iff x=-\frac{9}{4}\pm\sqrt{\frac{81}{16}+\frac{40}{16}}=$

$=-\frac{9}{4}\pm\sqrt{\frac{121}{16}}=\frac{-9\pm 11}{4}$

dvs $x=-5$ eller $x=\frac{1}{2}$,

varav endast $x=-5$ uppfyller villkoret

$x\geq 2$ eller $x\leq -2$.

$-2\leq x\leq 2$: Vi får ekv $2(4-x^2)+9x+3=0 \iff$

$\iff x^2-\frac{9}{2}x-\frac{11}{2}=0 \iff x=\frac{9}{4}\pm\sqrt{\frac{81}{16}+\frac{88}{16}}=$

$=\frac{9}{4}\pm\sqrt{\frac{169}{16}}=\frac{9\pm 13}{4}$

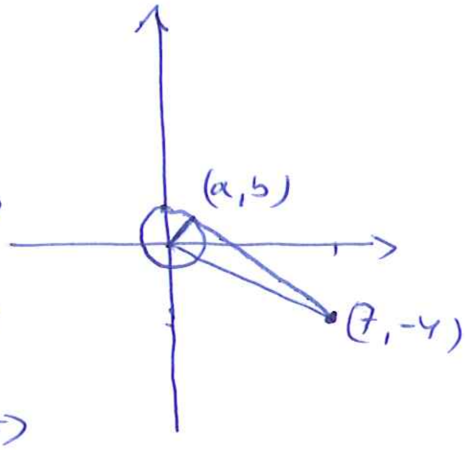
dvs $x=\frac{11}{2}$ eller $x=-1$

varav endast $x=-1$ uppfyller villkoret

$-2\leq x\leq 2$

Svar: $x=-1$ eller $x=-5$

5) (a,b) är en tangeringspunkt om och endast om (a,b), $(7,-4)$ och $(0,0)$ bildar hörn i en rätvinklig triangel med rät vinkel i (a,b).



Pythagoras sats ger

$$7^2+(-4)^2 = a^2+b^2+(7-a)^2+(-4-b)^2 \iff$$

$$\iff 7^2+4^2 = 2(a^2+b^2)-14a+7^2+8b+4^2 \iff$$

$$\iff /a^2+b^2=1/ \iff 0 = 2-14a+8b \iff$$

$$\iff b = \frac{7a-1}{4}.$$ Insätts detta i cirkelns ekvation

fås $$a^2+\left(\frac{7a-1}{4}\right)^2 = 0 \iff \dots \iff a = \frac{3}{5} \text{ eller } a = -\frac{5}{13}$$

$a = \frac{3}{5}$ ger $b = \frac{7a-1}{4} = \frac{4}{5}$

$a = -\frac{5}{13}$ ger $b = -\frac{12}{13}$

dvs tangeringspunkterna är $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ och $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$